7/11/2023 محاضرة

الثنائية في البرمجة الخطية :-
Duality in LP

لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل مشتق منه ، يعرف النموذج الاصلي بالنموذج الاولي [Primal Model] ويعرف النموذج المقابل بـ [Dual Model] ، استخدام النموذج المقابل يضمن فوائد متعددة منها سهولة التوصل الى الحل لامثل لمشكلة البرمجة الخطية بالحصول على نموذج يحتوي على عدد أقل من القيود ، بالاضافة الى التخلص من الاشارة السالبة في كلتا الامين.

اهم شروط النموذج المقابل :-

دالة الهدف $\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.t. $x_j \leq b_i$ ← Primal Model

1- $\min W = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$ s.t. $y_i \geq c_j$ ← Dual Model

2- عدد المتغيرات في المسالة الاولية x_j تساوي عدد القيود

$x_1 + x_2$ ← عدد متغيرين في القيود ودالة الهدف

عدد القيود الجديدة هي أثنين

3- عدد القيود في المسالة الاولية تساوي عدد المتغيرات y_i في المسالة الثنائية.

$2x_1 + 6x_2 \leq 50$ → y_1

$5x_1 - 3x_2 \leq 10$ → y_2

4- دائما مستخدم المصفوفة Transpose تحول كل عامود بصفوفة

$2x_1 + 6x_2 \leq 50$

$5x_1 - 3x_2 \leq 10$ → $2y_1 + 5y_2$

٥- اذا كان احد القيود في المسألة الاولية على شكل مساواة [معادلة] ولكن القيد الثالث يناظرة مثلاً متغير y_3 حيكون غير مقيد بالاشارة في المسألة الثنائية. [un restricted variable]

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 50 \rightarrow y_1$$
$$5x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 10 \rightarrow y_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \rightarrow y_3$$

$y_1, y_2 \geq 0$ ، y_3 un restricted

٦- إذا كان احد المتغيرات x_3 في المسألة الاولية غير مقيد [un restricted variable] فان القيد الثالث في المسألة الثنائية يكون مساواة.
حسب مثال رقم [ ]

Ex1) Express the dual Problem when Primal is in Canonical forms Primal Prob.

صيغة السؤال المقصدة

Primal Model

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

Dual model

$$\text{Min } W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\text{S.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad , \quad y_i \geq 0$$

Ex1 Express The Dual Problem when Primal is in Canonical forms.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 6x_2 \leq 50$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 35$$
$$5x_1 - 3x_2 \geq 10 \quad \text{convert}$$
$$x_2 \leq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solution:- First, convert to Canonical form

Primal Model in Canonical form

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.t.

$$2x_1 + 6x_2 \leq 50 \quad \rightarrow y_1$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 35 \quad \rightarrow y_2$$
$$-5x_1 + 3x_2 \leq -10 \quad \rightarrow y_3$$
$$x_2 \leq 20 \quad \rightarrow y_4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

→ Dual Prob.

$$\text{Min } W = 50y_1 + 35y_2 - 10y_3 + 20y_4$$

s.t.

$$2y_1 + 3y_2 - 5y_3 \geq 3$$
$$6y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 5$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Ex2) Express The Dual Prob. when The Primal in canonical form.

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

S.t.

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \quad \text{--- (1)}$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 1 \quad \text{--- (2)}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad \text{--- (3)}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solution)

∵ دالة الهدف Min فيجب ان تكون القيود (≥) فالقيد الاول يتغير

* القيد الثالث هو عبارة عن معادلة فيتفتح لمعادلة رقم (5)

⇒ convert to Canonical form

$$-3x_1 - x_2 - x_3 \geq -6 \rightarrow y_1$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 1 \rightarrow y_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \rightarrow y_3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

∵ y_3 يناظر القيد الثالث ، والقيد الثالث عبارة عن معادلة فاذن y_3 حيكون unrestricted variables

Dual Prob.

$$\text{Max } W = -6y_1 + 1y_2 + 4y_3$$

S.t.

$$-3y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$$
$$-y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 1$$
$$-y_1 + y_3 \leq 0$$

لان لايوجد له قيمة في دالة الهدف Primal Model

$$y_1, y_2 \geq 0$$
y_3 unrestricted

Ex3) Express The Dual Model from Primal Prob.

$$\text{Max } Z = X_2 + 3X_3$$

S.t.

$$2X_1 + X_2 \leq 3$$
$$X_1 + 2X_2 + 6X_3 \geq 5$$
$$-X_1 + X_2 - 2X_3 = 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0, \quad X_3 \text{ Unrestricted.}$$

انتباه * استخدام ملاحظة رقم (6)

Solution

$$\text{Max } Z = X_2 + 3X_3$$

S.t.

$$2X_1 + X_2 \leq 3 \rightarrow y_1$$
$$-X_1 - 2X_2 - 6X_3 \leq -5 \rightarrow y_2$$
$$-X_1 + X_2 - 2X_3 = 2 \rightarrow y_3 \} \rightarrow y_3 \text{ Unrestricted}$$
$$X_1, X_2 \geq 0, \quad X_3 \text{ Unrestricted}$$

ملاحظة (5)

هضافة لهيه الله يو الجيد تكون اشارة مساواة

Convert to Dual Prob.

$$\text{Min } W = 3y_1 - 5y_2 + 2y_3$$

S.t.

$$2y_1 - y_2 - y_3 \geq 0$$
$$y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 1$$
$$-6y_2 - 2y_3 = 3$$
$$y_1, y_2 \geq 0, \quad y_3 \text{ Unrestricted}$$

لان المتغير لها قيمة في دالة الهدف Primal

Ex4) Min $Z = 5x_1 + 6x_2$

s.t.

$x_1 + 2x_2 = 5$

$-x_1 + 5x_2 \geq 3$

$[4x_1 + 7x_2 \leq 8] * (-1)$

x_1 unrestricted, $x_2 \geq 0$

1- write the Dual Prob.

2- write the standard form.

Solution :- Convert to canonical form

Min $Z = 5x_1 + 6x_2$

s.t. $x_1 + 2x_2 = 5 \rightarrow y_1 \rightarrow$ y_1 unrestricted

$-x_1 + 5x_2 \geq 3 \rightarrow y_2$

$-4x_1 - 7x_2 \geq -8 \rightarrow y_3$

x_1 unrestricted, $x_2 \geq 0$

→ Dual Prob. Max $W = 5y_1 + 3y_2 - 8y_3$

s.t.

$y_1 - y_2 - 4y_3 = 5$

$2y_1 + 5y_2 - 7y_3 \leq 6$

y_1 unrestricted, $y_2, y_3 \geq 0$

2- Standard form :-

$x_1 \rightarrow$ unrestricted $\therefore$ let $x_1 = x_1' - x_1''$

Min $Z = 5(x_1' - x_1'') + 6x_2 + 0s_1 + 0s_2$

s.t. $(x_1' - x_1'') + 2x_2 = 5$

$-(x_1' - x_1'') + 5x_2 - s_1 = 3$

$4(x_1' - x_1'') + 7x_2 + s_2 = 8$

$x_1', x_1'', x_2, s_1, s_2 \geq 0$