الحل (Solution) :

الامثلة للخطوط الزائدية الخمسة التي تمر من النقطة **P (0 , 0)** والتي تكون موازية للخط الزائدي **(S , R)** بضمنها الخط الزائدي الموازي الايمن والخط الموازي الايسر للخط الزائدي **(S , R)** هي :

١) الوتر الذي يمر من النقطتين **P** و **R** هو الخط الزائدي الموازي الايمن للخط الزائدي **(S , R)**.

نجد معادلة الخط المستقيم **PR** كما يلي :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftarrow \frac{-6-0}{8-0} = \frac{y-0}{x-0} \Leftarrow \frac{y}{x} = \frac{-3}{4}$$

∴ معادلة الخط المستقيم **PR** هي : $y = \frac{-3}{4}x \quad (1) \cdots$

معادلة دائرة كلين هي :

$$(10)^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 \Leftarrow x^2 + y^2 = 100 \quad (2) \cdots$$

نعوض معادالة (1) في معادلة (2) ينتج

$$x^2 + (\frac{-3}{4}x)^2 = 100 \Leftarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 100$$

$$\Leftarrow 16x^2 + 9x^2 = 1600$$

$$\Leftarrow 25x^2 = 1600 \Leftarrow x^2 = 64$$

$$\Leftarrow x = 8 \text{ أو } x = -8$$

نعوض $x = -8$ في معادالة (1) ينتج

$$y = \frac{-3}{4}(-8) \Leftarrow y = 6$$

إذن النقطة **T** $(-8 , 6)$ هي نقطة تقاطع **PR** مع دائرة كلين .

إذن الخط الزائدي الموازي الايمن للخط الزائدي **(S , R)** هو **(T , R)** أي $((-8,6),(8,-6))$.

٢) الوتر الذي يمر من النقطتين **P** و **S** هو الخط الزائدي الموازي الايسر للخط الزائدي $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$.

نجد معادلة الخط المستقيم **SP** كما يلي :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftarrow \frac{-6-0}{-8-0} = \frac{y-0}{x-0} \Leftarrow \frac{3}{4} = \frac{y}{x}$$

∴ معادلة الخط المستقيم **SP** هي : $y = \frac{3}{4} x \quad \cdots (3)$

معادلة دائرة كلين هي معادلة (2) أعلاه .

نعوض معادالة (3) في معادلة (2) ينتج :

$$x^2 + (\frac{3}{4} x)^2 = 100 \Leftarrow x^2 + \frac{9}{16} x^2 = 100$$

$$\Leftarrow 16x^2 + 9x^2 = 1600$$

$$\Leftarrow 25x^2 = 1600 \Leftarrow x^2 = 64$$

$$\Leftarrow x = 8 \text{ أو } x = -8$$

نعوض $x = 8$ في معادالة (3) ينتج :

$$y = \frac{3}{4}(8) \Leftarrow y = 6$$

إذن النقطة $\mathbf{V}(8, 6)$ هي نقطة تقاطع **SP** مع دائرة كلين .

إذن الخط الزائدي الموازي الايسر للخط الزائدي $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ هو $(\mathbf{S}, \mathbf{V})$ أي $((8, 6), (-8, -6))$.

لذا سيكون اي وتر $(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ يمر من النقطة P موازياً للخط الزائدي $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ يجب ان تكون معادلته هي $y = t x$ حيث أن $\frac{-3}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}$.

٣) الوتر الذي يمر من النقطة **P** ومعادلته $y = \frac{1}{2} x \quad \cdots (4)$

هو خط زائدي موازي للخط الزائدي $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$.

نعوض معادالة (4) في معادلة (2) أعلاه ينتج :

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 100 \Leftarrow x^2 + (\frac{1}{2}x)^2 = 100$$

$$4x^2 + x^2 = 400 \Leftarrow$$

$$x^2 = 80 \Leftarrow 5x^2 = 400 \Leftarrow$$

$x = -4\sqrt{5}$ أو $x = 4\sqrt{5} \Leftarrow$

نعوض $x = 4\sqrt{5}$ في معادالة (4) ينتج :

$$y = 2\sqrt{5} \Leftarrow y = \frac{1}{2}(4\sqrt{5})$$

إذن النقطة $P_1(4\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ هي نقطة تقاطع هذا الخط الزائدي (الوتر) مع دائرة كلين .

نعوض $x = -4\sqrt{5}$ في معادالة (4) ينتج :

$$y = -2\sqrt{5} \Leftarrow y = \frac{1}{2}(-4\sqrt{5})$$

إذن النقطة $P_2(-4\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ هي نقطة تقاطع هذا الخط الزائدي (الوتر) مع دائرة كلين .

إذن هذا الخط الزائدي هو (P_2, P_1) أي $((-4\sqrt{5}, -2\sqrt{5}), (4\sqrt{5}, 2\sqrt{5}))$ وهو خط زائدي موازي للخط الزائدي (S, R) .

٤) الوتر الذي يمر من النقطة P ومعادلته $y = \frac{1}{3}x \quad \cdots \quad (5)$

هو خط زائدي موازي للخط الزائدي (S, R) .

نعوض معادالة (5) في معادلة (2) أعلاه ينتج :

$$9x^2 + x^2 = 900 \Leftarrow x^2 + \frac{1}{9}x^2 = 100 \Leftarrow x^2 + (\frac{1}{3}x)^2 = 100$$

$$x^2 = 90 \Leftarrow 10x^2 = 900 \Leftarrow$$

$x = 3\sqrt{10}$ ⇐ أو $x = -3\sqrt{10}$

نعوض $x = 3\sqrt{10}$ في معادالة (5) ينتج :

$y = \frac{1}{3}(3\sqrt{10})$ ⇐ $y = \sqrt{10}$

إذن النقطة $P_3(3\sqrt{10}\,,\ \sqrt{10})$ هي نقطة تقاطع هذا الخط الزائدي (الوتر) مع دائرة كلين .

نعوض $x = -3\sqrt{10}$ في معادالة (5) ينتج :

$y = \frac{1}{3}(-3\sqrt{10})$ ⇐ $y = -\sqrt{10}$

إذن النقطة $P_4(-3\sqrt{10}\,,-\sqrt{10})$ هي نقطة تقاطع هذا الخط الزائدي (الوتر) مع دائرة كلين .

إذن هذا الخط الزائدي هو $(P_4\,,P_3)$ أي $((-3\sqrt{10}\,,-\sqrt{10})\,,(3\sqrt{10}\,,\ \sqrt{10}))$ وهو خط زائدي موازي للخط الزائدي $(S\,,R)$.

٥) الوتر الذي يمر من النقطة P ومعادلته $y = 0x = 0 \quad \cdots (6)$

هو خط زائدي موازي للخط الزائدي $(S\,,R)$.

نعوض معادالة (6) في معادلة (2) أعلاه ينتج :

$x^2 + (0)^2 = 100$ ⇐ $x^2 = 100$ ⇐ $x = 10$ أو $x = -10$

نعوض $x = 10$ في معادالة (6) ينتج : $y = 0(10) = 0$

إذن النقطة $P_5(10\,,\ 0)$ هي نقطة تقاطع هذا الخط الزائدي (الوتر) مع دائرة كلين .

نعوض $x = -10$ في معادالة (6) ينتج : $y = 0(-10) = 0$

إذن النقطة $P_6(-10\,,0)$ هي نقطة تقاطع هذا الخط الزائدي (الوتر) مع دائرة كلين .

إذن هذا الخط الزائدي هو $(P_6\,,P_5)$ أي $((-10\,,0)\,,(10\,,\ 0))$ وهو خط زائدي موازي للخط الزائدي $(S\,,R)$.