$$\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{R} \text{ and}$$
$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = (x_2 - h)^2 + (y_2 - k)^2 = r^2 \}$$

والوتر $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ هو مجموعة كل النقاط (x, y) التي تحقق المعادلة $(x, y) = t(x_1, y_1) + (1 - t)(x_2, y_2)$ بحيث أن $0 < t < 1$. أي أن

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \{ t(x_1, y_1) + (1 - t)(x_2, y_2) \mid t \in \mathbf{R} \text{ and } 0 < t < 1 \}.$$

٣) النقطة الزائدية $P(x, y)$ تقع على الخط الزائدي $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ (أي أن النقطة الزائدية $P(x, y)$ تقع على الوتر $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ الذي يمثل الخط الزائدي $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$) يعني أن

هنالك t بحيث أن $0 < t < 1$ وأن $(x, y) = t(x_1, y_1) + (1 - t)(x_2, y_2)$.

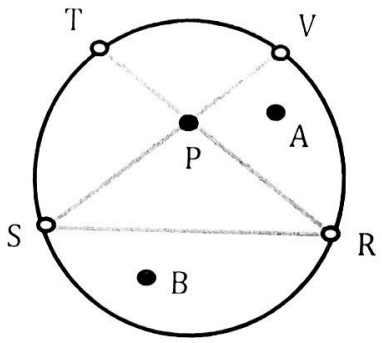

Figure (1) **شكل (1)**

ملاحظة 1 (Remark 1) : الشكل (1) أعلاه يمثل نموذج كلين (Klein's Model) وفيه نلاحظ ما يلي :

١) النقاط A و B و P هي نقاط زائدية (H – Points) .

٢) النقاط R و S و T و V هي ليست نقاط زائدية لانها لا تقع داخل الدائرة .

٣) الاوتار (S, R) و (T, R) و (S, V) هي خطوط زائدية (H – Lines) .

٤) النقطة P لا تقع على الخط الزائدي (الوتر) (S, R) والوترين (T, R) و (S, V) يمران من النقطة P وهما الخط الزائدي الموازي الايمن والخط الزائدي الموازي الايسر للخط الزائدي (للوتر) (S, R) وأي وتر يمر من النقطة P ويقطع الزاوية RPV من الداخل يكون ايضاً خط

زائدي موازي لنخط تزائدي (S,R) وأي وتر يمر من النقطة P ويقطع الزاوية RPS من الداخل يكون خط زائدي قطع نخط تزائدي (S,R) . أي أن هنالك ما لا نهاية من الخطوط الزائدية التي تمر من النقطة P توازي نخط تزائدي (S,R) وان هنالك ما لا نهاية من الخطوط الزائدية التي تمر من النقطة P والتي تقطع الخط الزائدي (S,R) .

مثال 1 (Example 1) : في نموذج كلين $K((0,5),10)$ إعطي عشرة أمثلة لنقاط من المستوي xy ($xy-plane$) هي نقاط زائدية مع ذكر السبب لكل واحدة منها وعشرة أمثلة لنقاط أخرى من المستوي xy هي ليست نقاط زائدية مع ذكر السبب لكل واحدة منها ثم إعطي عشرة أمثلة لخطوط زائدية مع ذكر السبب لكل واحدة منها .

الحل (Solution) :

العشرة أمثلة للنقاط الزائدية في نموذج كلين $K((0,5),10)$ هي :

١) النقطة $P_1(0,5)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة $(0,5)$ الذي يساوي $\sqrt{(0-0)^2+(5-5)^2}=0$ هو أقل من 10 أي أنها تقع داخل الدائرة التي مركزها $(0,5)$ ونصف قطرها 10 .

٢) النقطة $P_2(0,6)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة $(0,5)$ الذي يساوي $\sqrt{(0-0)^2+(6-5)^2}=1$ هو أقل من 10 أي أنها تقع داخل الدائرة التي مركزها $(0,5)$ ونصف قطرها 10 .

٣) النقطة $P_3(1,5)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة $(0,5)$ الذي يساوي $\sqrt{(1-0)^2+(5-5)^2}=1$ هو أقل من 10 أي أنها تقع داخل الدائرة التي مركزها $(0,5)$ ونصف قطرها 10 .

٤) النقطة $P_4(3,9)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة $(0,5)$ الذي يساوي $\sqrt{(3-0)^2+(9-5)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ هو اقل من 10 أي أنها تقع داخل الدائرة التي مركزها $(0,5)$ ونصف قطرها 10 .

٥) النقطة $P_5(-3,9)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة $(0,5)$ الذي يساوي $\sqrt{(-3-0)^2+(9-5)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ هو أقل من 10 أي أنها تقع

داخل الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

٦) النقطة $P_6\,(3,1)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(3-0)^2+(1-5)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ هو أقل من 10 أي أنها تقع داخل الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

٧) النقطة $P_7\,(-3,-2)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(-3-0)^2+(-2-5)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} \approx 7.6$ هو أقل من 10 أي أنها تقع داخل الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

٨) النقطة $P_8\,(-4,14)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(-4-0)^2+(14-5)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97} \approx 9.8$ هو أقل من 10 أي أنها تقع داخل الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

٩) النقطة $P_9\,(-8,8)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(-8-0)^2+(8-5)^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} \approx 8.5$ هو أقل من 10 أي أنها تقع داخل الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

١٠) النقطة $P_{10}\,(-8,1)$ هي نقطة زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(-8-0)^2+(1-5)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} \approx 8.9$ هو أقل من 10 أي أنها تقع داخل الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

والعشرة أمثلة للنقاط الغير زائدية في نموذج كلين $\mathbf{K}\,((\mathbf{0},\mathbf{5}),\mathbf{10})$ هي :

١) النقطة $P_{11}\,(-8,11)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(-8-0)^2+(11-5)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ أي أنها تقع على محيط الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 وليست داخل الدائرة .

٢) النقطة $P_{12}\,(8,-1)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(8-0)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ أي أنها تقع على

محيط الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 وليست داخل الدائرة .

٣) النقطة $P_{13}\ (6,-3)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(6-0)^2+(-3-5)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ أي أنها تقع على محيط الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 وليست داخل الدائرة .

٤) النقطة $P_{14}\ (10,5)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(10-0)^2+(5-5)^2} = \sqrt{100+0} = \sqrt{100} = 10$ أي أنها تقع على محيط الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 وليست داخل الدائرة .

٥) النقطة $P_{15}\ (8,11)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(8-0)^2+(11-5)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ أي أنها تقع على محيط الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 وليست داخل الدائرة .

٦) النقطة $P_{16}\ (-5,-4)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(-5-0)^2+(-4-5)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106} \approx 10.3$ هو أكثر من 10 أي أنها تقع خارج الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

٧) النقطة $P_{17}\ (-3,-9)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(-3-0)^2+(-9-5)^2} = \sqrt{9+196} = \sqrt{205} \approx 14.3$ هو أكثر من 10 أي أنها تقع خارج الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

٨) النقطة $P_{18}(-12,10)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(-12-0)^2+(10-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$ هو أكثر من 10 أي أنها تقع خارج الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

٩) النقطة $P_{19}\ (12,10)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة (0 , 5) الذي يساوي $\sqrt{(12-0)^2+(10-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$ هو أكثر من 10 أي أنها تقع خارج الدائرة التي مركزها (0 , 5) ونصف قطرها 10 .

١٠) النقطة $P_{20}\,(5\,,16)$ هي نقطة ليست زائدية لان بعدها عن مركز الدائرة $(0\,,5)$ الذي يساوي $\sqrt{(5-0)^2+(16-5)^2} = \sqrt{25+121} = \sqrt{146} \approx 12.1$ هو أكثر من 10 أي أنها تقع خارج الدائرة التي مركزها $(0\,,5)$ ونصف قطرها 10 .

والامثلة العشرة للخطوط الزائدية في نموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$ نجدها كما يلي :

النقاط $P_{11}\,(-8\,,11)$ و $P_{12}\,(8\,,-1)$ و $P_{13}\,(6\,,-3)$ و $P_{14}\,(10,5)$ و $P_{15}\,(8\,,11)$ واقعة على محيط الدائرة كما بينا في الامثلة أعلاه لذا فان أي قطعة مستقيم تصل بين أي نقطتين من هذه النقاط ستكون وتراً وبالتالي تكون خطاً زائدياً وكما يلي :

١) الوتر $((-1\,,8)\,,(-8\,,11))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

٢) الوتر $((-3\,,6)\,,(-8\,,11))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

٣) الوتر $((10,5)\,,(-8\,,11))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

٤) الوتر $((8\,,11)\,,(-8\,,11))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

٥) الوتر $((-3\,,6)\,,(1\,,-8))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

٦) الوتر $((10,5)\,,(1\,,-8))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

٧) الوتر $((8\,,11)\,,(1\,,-8))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

٨) الوتر $((10\,,5)\,,(3\,,-6))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

٩) الوتر $((8\,,11)\,,(3\,,-6))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

١٠) الوتر $((8\,,11)\,,(10\,,5))$ هو خط زائدي لنموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,5)\,,10)$.

<u>مثال 2 (Example 2) :</u> في نموذج كلين $\mathbf{K}\,((0\,,0)\,,10)$ تكون النقطة الزائدية $\mathbf{P}\,(0\,,0)$ غير واقعة على الخط الزائدي (الوتر) $(\mathbf{S}\,,\mathbf{R})$ حيث أن $\mathbf{R}\,(8\,,-6)$ و $\mathbf{S}\,(-8\,,-6)$. جد أمثلة لخمسة خطوط زائدية تمر من النقطة $\mathbf{P}\,(0\,,0)$ تكون موازية للخط الزائدي $(\mathbf{S}\,,\mathbf{R})$ بضمنها الخط الزائدي الموازي الايمن والخط الزائدي الموازي الايسر للخط الزائدي $(\mathbf{S}\,,\mathbf{R})$. ثم جد أمثلة لخمسة خطوط زائدية تمر من النقطة $\mathbf{P}\,(0\,,0)$ تكون قاطعة للخط الزائدي $(\mathbf{S}\,,\mathbf{R})$.