الفصل السادس

Non-Euclidean Geometry الهندسة اللا اقليدية

1) الهندسة الزائدية (Hyperbolic Gometry) :

الهندسة الاقليدية إستمرت على مدى أكثر من الفين ومئة عام بدون أن تكون هنالك هندسة أخرى تنافسها وبغضون أعوام قليلة جداً يفكر ثلاثة علماء في نفس الوقت تقريباً وفي ثلاث مواقع مختلفة من العالم بأن يستبدلوا البديهية الخامسة لاقليدس ببديهية أخرى إتفق ثلاثتهم عليها والعلماء الثلاثة هم :

١) **كارل فريدريك كاوس Carl Friedrich Gauss** (1777 / 4 / 30 – 1855 / 2 / 23) من المانيا .

٢) **جانوس بولياي Janos Bolyai** (1802 / 12 / 15 – 1860 / 1 / 27) من هنغاريا .

٣) **نيكولاي لوباجفسكي Nikolai Lobachevsky** (1792 / 11 / 20 – 1856 / 2 / 12) من روسيا .

كاوس هو أول من فكر بابدال البديهية الخامسة لاقليدس وقد أبلغ زملائه بفكرته هذه ومن ضمنهم **فاراكاس بولياي Farakas Bolyai** الذي كان زميله في الدراسة بجامعة **جوتنجن Gottingen** (والذي هو والد جانوس بولياي) . كان كاوس متربعاً على عرش الرياضيات انذاك ولذلك (خوفاً على مقامه) لم تكن له الجرأة بنشر إكتشافه لهندسة جديدة ولم يحاول أن يستمر بايجاد النتائج للنظام الهندسي الجديد وإكتفى بان إستبدال البديهية الخامسة لاقليدس بالبديهية الزائدية الجديدة يولد هندسة جديدة غير الهندسة الاقليدية.

أما جانوس بولياي فانه وجد كل التفاصيل الخاصة بالهندسة الجديدة والتي تعتمد على البديهيات الاربعة الاولى لاقليدس وإستبدال البديهية الخامسة لاقليدس بالبديهية الخامسة الزائدية والتي تنص على (من نقطة خارجة عن خط مستقيم معلوم هنالك أكثر من خط مستقيم يمر من النقطة يوازي الخط المستقيم المعلوم) وكان بحث بولياي في الهندسة الجديدة قد إكتمل عام **1823** أي عندما كان عمره **21** سنة ولصغر سنه تردد في نشر بحثه لغاية عام **1832** أي عند بلوغه **30** سنة وخلال الفترة من إكتمال البحث ولغاية نشره قام بولياي بالقاء المحاضرات عن هذه الهندسة الجديدة التي سميت فيما بعد بالهندسة الزائدية .

أما نيكولاي لوباجفسكي فانه قد توصل الى نفس النائج التي توصل اليها جانوس بولياي وقام بنشرها في عام **1829** .

الهندسة التي سميت قيما بعد بالهندسة الزائدية **Hyperbolic Geometry** (وتسمى أيضا الهندسة الهذولية) تسمى الان أيضاً بهندسة بولياي لوباجفسكي **Bolyai – Lobachevsky Geometry** وفي روسيا والدول الشرقية تدعى بهندسة لوباجفسكي **Lobachevsky Geometry** .

بديهيات الهندسة الزائدية (The Hyperbolic Axioms) :

١) ممكن رسم خط مستقيم من أي نقطة الى أي نقطة أخرى .

٢) ممكن مد أي خط مستقيم على إستقامته .

٣) ممكن إنشاء دائرة لاي مركز وعلى أي بعد من ذلك المركز .

٤) جميع الزوايا القائمة متساوية فيما بينها .

٥) من نقطة خارجة عن خط مستقيم معلوم هنالك أكثر من خط مستقيم يمر من النقطة يوازي الخط المستقيم المعلوم .

بديهية التوازي الزائدية (The Hyperbolic Parallel Axiom) :

نص البديهية الزائدية هو (من نقطة خارجة عن خط مستقيم معلوم هنالك أكثر من خط مستقيم يمر من النقطة يوازي الخط المستقيم المعلوم) وهذه البديهية الزائدية تؤدي الى ما يلي :

اذا كانت P نقطة لا تقع على خط مستقيم معلوم m فانه يوجد شعاعين فقط $\overrightarrow{PS}$ و $\overrightarrow{PR}$ بحيث ان :

١) $\overrightarrow{PS}$ و $\overrightarrow{PR}$ شعاعين غير متعاكسين .

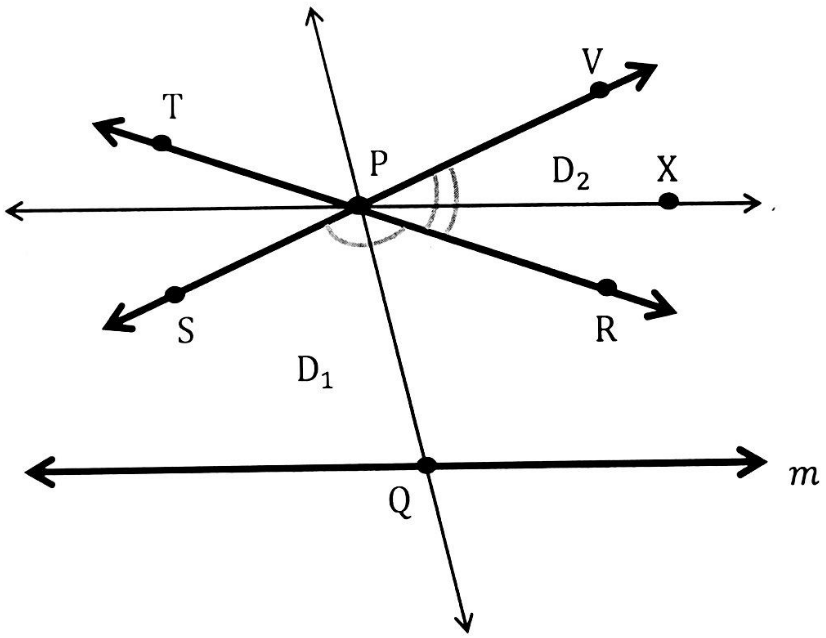
٢) $\overrightarrow{PS}$ و $\overrightarrow{PR}$ لا يقطعان m .

٣) اي شعاع $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m إذا وفقط اذا $\overrightarrow{PQ}$ يقع داخل $< RPS$.

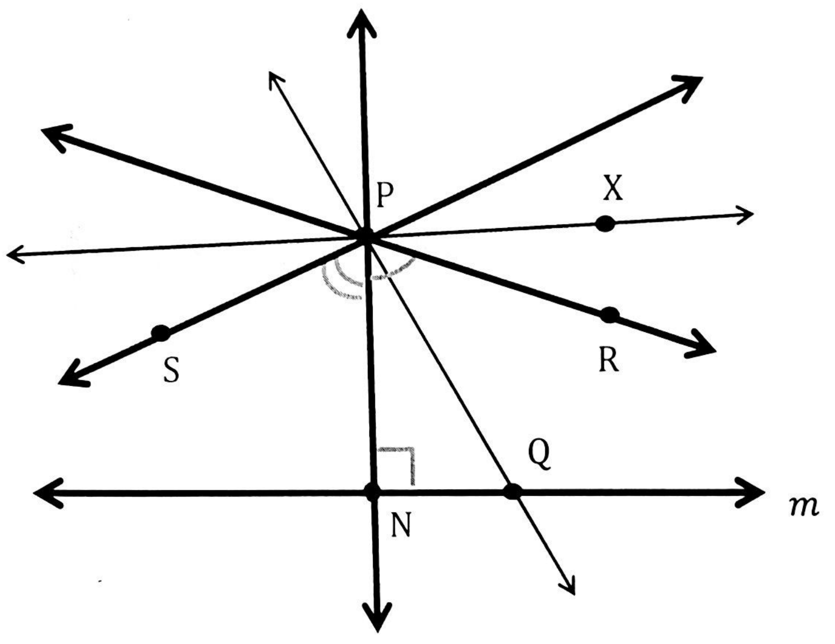
٤) ليكن $\overrightarrow{PV}$ و $\overrightarrow{PT}$ هما الشعاعين المعاكسين للشعاعين $\overrightarrow{PS}$ و $\overrightarrow{PR}$ على التوالي فان الخطوط المستقيمة التي تمر من P تشكل مجموعتين هما D_1 و D_2 حيث أن D_1 هي مجموعة جميع الخطوط

المستقيمة PQ التي تقطع **RPS** > من الداخل وتكون هذه الخطوط المستقيمة هي التي تقطع الخط المستقيم m بينما D_2 هي مجموعة جميع الخطوط المستقيمة PX التي تقطع **RPV** > من الداخل إضافة للخطين المستقيمين PR و PS وجميع هذه الخطوط المستقيمة توازي الخط المستقيم m .

٥) الخط المستقيم PR يدعى الخط المستقيم الموازي الايمن والخط المستقيم PS يدعى الخط المستقيم الموازي الايسر وكما هو مبين بالشكل التالي :



مبرهنة 1 (Teorem 1) : اذا كانت P اي نقطة لا تقع على خط مستقيم معلوم m فانه يوجد خطين مستقيمين مختلفين PR و PS بحيث انهما لا يقطعان m وانهما يصنعان زاويتين حادتين متساويتين مع الخط المستقيم العمود PN على الخط المستقيم m وأن أي خط مستقيم PX يمر من النقطة P في المجال المحصور ما بين PR و PS الذي لا يحوي العمود PN (المجال المظلل في الشكل التالي) يكون موازياً للخط المستقيم m (لا يقطع الخط المستقيم m) وأن أي خط مستقيم PQ يمر من النقطة P في المجال المحصور ما بين PR و PS الذي يحوي العمود PN يكون قاطعاً للخط المستقيم m .



نموذج كلين للمستوى الزائدي الحقيقي

(Klein's Model for the Real Hyperbolic Plane)

نموذج كلين $K(A, r)$ للمستوي الزائدي الحقيقي يكون فيه ما يلي :

١) النقاط الزائدية (**Hyperbolic Points denoted by H - Points**) هي جميع النقاط $P(x, y)$ في المستوي الاقليدي الواقعة داخل الدائرة التي مركزها النقطة $A(h, k)$ ونصف قطرها r .

أي أن مجموعة كل النقاط الزائدية (**H – Points**) هي :

$$\{ P(x, y) \mid x, y \in R \text{ and } (x-h)^2 + (y-k)^2 < r^2 \}.$$

٢) الخطوط الزائدية (**Hyperbolic Lines denoted by H - Lines**) هي جميع أوتار (**Chords**) الدائرة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ وكل وتر سوف يرمز له بـ (D, E) حيث أن D و E هما نقطتي تقاطع الوتر مع الدائرة .

لذا فان مجموعة كل الخطوط الزائدية (**H - Lines**) هي :