طول $B - C = \sqrt{(9-4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

إذن يجب أن يكون طول $O - D = 5$ لكي يكون $B - C \cong O - D$.

طول $O - D = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 5 \Leftarrow 5 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Leftarrow \quad x^2 + y^2 = 25 \quad \cdots \quad (*)$$

الان نجد معادلة المستقيم OA كما يلي :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftarrow \frac{8 - 0}{6 - 0} = \frac{y - 0}{x - 0}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{8}{6} = \frac{y}{x}$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{8x = 6y}$$ معادلة الخط المستقيم OA

$$\Leftarrow \quad y = \frac{4}{3}x \quad \cdots \quad (**)$$

نعوض قيمة y في $(*)$ نحصل على

$$25 = x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 \Leftarrow 25 = x^2 + \frac{16}{9}x^2 \Leftarrow 225 = 9x^2 + 16x^2$$

$$\Leftarrow \quad 225 = 25x^2 \Leftarrow 9 = x^2$$

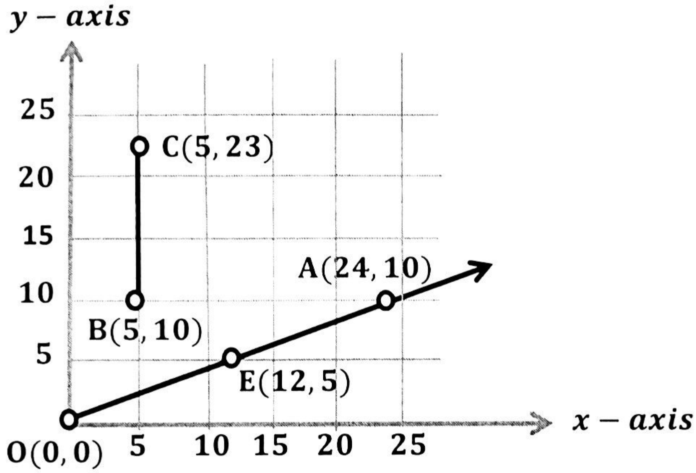
$\Leftarrow x = 3$ أو $x = -3$ (يهمل لان الشعاع في الربع الاول)

$$\Leftarrow \quad y = (3)\frac{4}{3} = 4$$

إذن إحداثيات النقطة D هي $D(3, 4)$.

مثال 9 (Example 9) : أذا كانت لدينا النقاط $O\ (0\,,0)$ و $A\ (24\,,10)$ و $B\ (5\,,10)$ و $C\ (5\,,23)$ فأوجد احداثيات النقطة $E\ (x\,,y)$ على الشعاع $\overrightarrow{OA}$ بحيث أن $O - E \;\cong\; B - C$.

الجواب :



طول $B - C \;=\; \sqrt{(23-10)^2 + (5-5)^2} \;=\; \sqrt{13^{\,2} + 0^{\,2}} \;=\; \sqrt{169} \;=\; 13$

إذن يجب أن يكون طول $O - E \;=\; 13$ لكي يكون $B - C \;\cong\; O - E$.

طول $O - E \;=\; \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \;=\; 13 \;\Leftarrow\; \sqrt{x^{\,2} + y^{\,2}} \;=\; 13$

$\Leftarrow\; x^{\,2} + y^{\,2} \;=\; 169 \qquad \cdots\ (*)$

الان نجد معادلة المستقيم OA كما يلي :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \;\Leftarrow\; \frac{10 - 0}{24 - 0} = \frac{y - 0}{x - 0}$$

$$\Leftarrow\; \frac{5}{12} = \frac{y}{x}$$

$\Leftarrow\; \boxed{12\,y \;=\; 5\,x}$ معادلة الخط المستقيم OA

$\Leftarrow\; y \;=\; \frac{5}{12}x \qquad \cdots\ (**)$

نعوض قيمة y في $(*)$ نحصل على

$$169 = x^2 + \frac{25}{144}x^2 \Leftarrow 169 = x^2 + \left(\frac{5}{12}x\right)^2$$

$$144\,(169) = 144\,x^2 + 25\,x^2 \Leftarrow$$

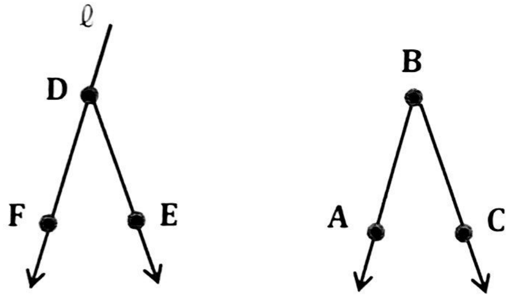
$$144 = x^2 \Leftarrow 144\,(169) = 169\,x^2 \Leftarrow$$

$\Leftarrow$ $12 = x$ أو $-12 = x$ (يهمل لان الشعاع في الربع الاول)

$$5 = (12)\,\frac{5}{12} = y \Leftarrow$$

إذن إحداثيات النقطة E هي $E\,(12, 5)$.

<u>بديهية 11 (Axiom 11) :</u> لكل $< ABC$ ولكل شعاع $\overrightarrow{DF}$ على خط ما ℓ ، فان على كل جهة من ℓ يوجد شعاع واحد فقط $\overrightarrow{DE}$ بحيث تكون $< ABC \cong < EDF$.



<u>بديهية 12 (Axiom 12) :</u> تطابق الزوايا هو علاقة تكافؤ .

<u>ملاحظة 13 (Remark 13) :</u> بديهية 12 تعني

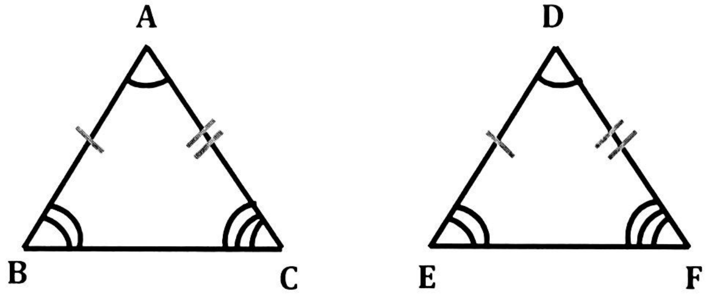
1) إن كل زاوية ABC تطابق نفسها (أي ان $< ABC \cong < ABC$).

2) اذا كانت الزاوية ABC تطابق الزاوية DEF فان الزاوية DEF تطابق الزاوية ABC

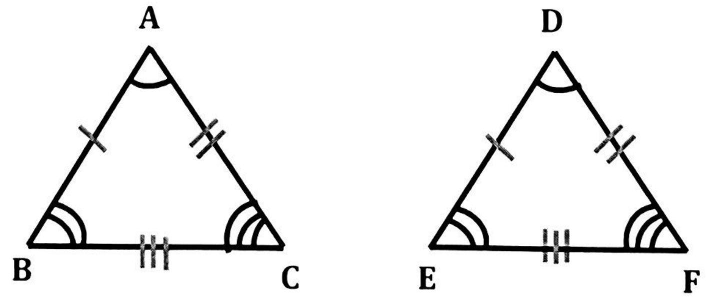
(أي اذا كانت $< DEF \cong < ABC$ فان $< ABC \cong < DEF$).

3) اذا كانت الزاوية **ABC** تطابق الزاوية **DEF** وكانت الزاوية **DEF** تطابق الزاوية **GHK** فان الزاوية **ABC** تطابق الزاوية **GHK** (أي اذا كانت $< DEF \cong < ABC$ وكانت $< GHK \cong < DEF$ فان $< GHK \cong < ABC$).

<u>بديهية 13 (Axiom 13) :</u> إذا كان $D - E \cong A - B$ و $D - F \cong A - C$ و $< D \cong < A$ في المثلثين **ABC** و **DEF** فان $< E \cong < B$ و $< F \cong < C$.

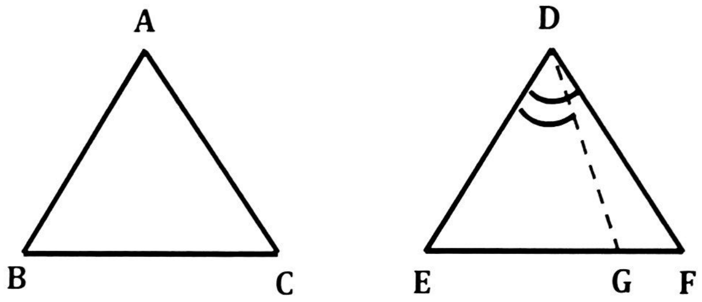


<u>تعريف 17 (Definition 17) :</u> يتطابق المثلثان **ABC** و **DEF** إذا كان $D - E \cong A - B$ و $D - F \cong A - C$ و $E - F \cong B - C$ و $< D \cong < A$ و $< E \cong < B$ و $< F \cong < C$.



<u>مبرهنة 26 (Theorem 26) :</u> إذا كان ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث تطابق ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في مثلث اخر فان المثلثين يتطابقان (أي إذا كان $D - E \cong A - B$ و $D - F \cong A - C$ و $< EDF \cong < BAC$ فان $\Delta DEF \cong \Delta ABC$).

البرهان :



حسب بديهية (13) يكون لدينا $< B \cong < E$ و $< C \cong < F$.

إذن حسب تعريف (17) علينا أن نبرهن أن $B - C \cong E - F$ لكي يتطابق المثلثان **ABC** و **DEF** .

نفرض أن $B - C$ لا يطابق $E - F$ فحسب مبرهنة (22) إما أن يكون $B - C \angle E - F$ أو $E - F \angle B - C$.

نفرض أن $B - C \angle E - F$.

من تعريف (16) توجد نقطة **G** بحيث أن $E - G - F$ وأن $B - C \cong E - G$.

من بديهية (13) نستنتج أن $< BAC \cong < EDG$.

من بديهية (12) نستنتج أن $< EDG \cong < EDF$ لذا يتطابق الشعاعين $\overrightarrow{DG}$ و $\overrightarrow{DF}$ حسب بديهية (11).

وبذلك فان **G** تقع على المستقيم **DF** وكذلك **G** تقع أيضا على المستقيم **EF** .

إذن **G** هي نقطة تقاطع المستقيمين **DF** و **EF** ولكن **F** هي نقطة تقاطع المستقيمين **DF** و **EF** أيضاً.

إذن $G = F$ وهذا يناقض أن $G \neq F$ (لان **G** تقع بين **E** و **F** $(E - G - F)$) .

لذلك فان الفرض بأن $B - C \angle E - F$ غير صحيح لانه يؤدي الى تناقض .

بنفس الطريقة أعلاه نبرهن أن $E - F \angle B - C$ غير صحيح أيضاً .

لذلك فان $B - C \cong E - F$ وأن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.