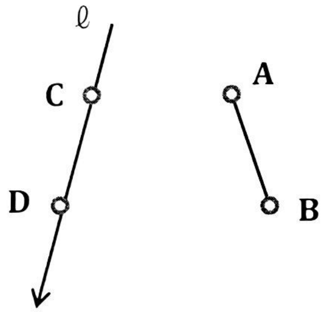
الفصل الخامس

المقارنة والتطابق Comparison and Congruences

بديهية 8 (Axiom 8): لتكن $A-B$ أي قطعة مستقيم . ولتكن C أي نقطة على الخط المستقيم ℓ .
فان كل شعاع على ℓ نقطة بدايته C توجد عليه نقطة واحدة فقط D بحيث أن $A-B=C-D$.



بديهية 9 (Axiom 9): تطابق قطع المستقيمات هو علاقة تكافؤ .

ملاحظة 12 (Remark 12) : بديهية 10 تعني

1) إن كل قطعة مستقيم $A-B$ تطابق نفسها (أي ان $A-B \cong A-B$).

2) اذا كانت قطعة المستقيم $A-B$ تطابق قطعة المستقيم $C-D$ فان قطعة المستقيم $C-D$ تطابق قطعة المستقيم $A-B$ (أي اذا كانت $A-B \cong C-D$ فان $C-D \cong A-B$).

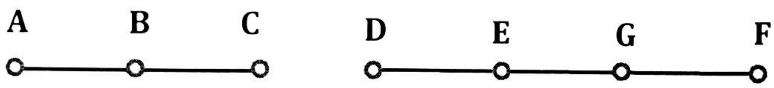
3) اذا كانت قطعة المستقيم $A-B$ تطابق قطعة المستقيم $C-D$ وكانت قطعة المستقيم $C-D$ تطابق قطعة المستقيم $E-F$ فان قطعة المستقيم $A-B$ تطابق قطعة المستقيم $E-F$ (أي اذا كانت $A-B \cong C-D$ وكانت $C-D \cong E-F$ فان $A-B \cong E-F$).

بديهية 10 (Axiom 10): إذا كان لدينا $A-B-C$ و $D-E-F$ وكان $A-B \cong D-E$ و $B-C \cong E-F$ فان $A-C \cong D-F$.

<u>مبرهنة 20 (Theorem 20) :</u> إذا كان لدينا $A - B - C$ و $D - E - F$ وكان $A - B \cong D - E$ و $A - C \cong D - F$ فان $B - C \cong E - F$.

<u>البرهان :</u>

نفرض أن $B - C$ لا تطابق $E - F$ فانه من بديهية (8) توجد نقطة G بحيث أن $D - E - G$ و $B - C \cong E - G$.



بما أن $B - C$ لا تطابق $E - F$ فانه من بديهية (9) نستنتج أن $E - G$ لا تطابق $E - F$.

لهذا فان $F \neq G$ $\cdots$ $(*)$

بما أن $A - B \cong D - E$ و $B - C \cong E - G$ فان $A - C \cong D - G$ حسب بديهية (10) .

وبما أن $A - C \cong D - F$ حسب الفرض لذا فان $D - F \cong D - G$ حسب بديهية (9) .

اذن $F = G$ حسب البديهيتين (8 و 9) وهذا يناقض $(*)$. وهذا يعني أن فرضيتنا بان $B - C$ لا تطابق $E - F$ خاطئة .

إذن $B - C \cong E - F$.

<u>مبرهنة 21 (Theorem 21) :</u> إذا كان $A - C \cong D - F$ وكانت B نقطة بحيث أن $A - B - C$ فانه توجد نقطة E بحيث أن $D - E - F$ وأن $A - B \cong D - E$.

<u>تعريف 16 (Definition 16) :</u> تكون قطعة المستقيم $A - B$ أصغر من قطعة المستقيم $C - D$ إذا كانت هنالك نقطة E بحيث أن $C - E - D$ وأن $A - B \cong C - E$ (يرمز للعبارة $A - B$ أصغر من $C - D$ بالرمز $A - B \angle C - D$) .

مبرهنة 22 (Theorem 22) : إذا كانت $A - B$ و $C - D$ أي قطعتي مستقيمين فأن عبارة واحدة فقط تتحقق مما يأتي :

أما $A - B \angle C - D$ أو $A - B \cong C - D$ أو $C - D \angle A - B$.

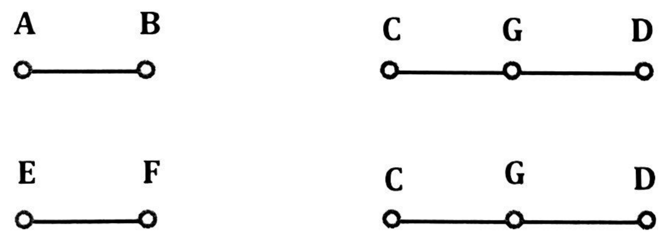
مبرهنة 23 (Theorem 23) : إذا كان $A - B \angle C - D$ و $A - B \cong E - F$ فان $E - F \angle C - D$.

البرهان :

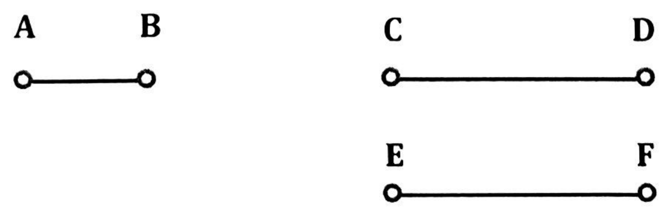
بما أن $A - B \angle C - D$ بالفرض . فحسب تعريف (16) توجد نقطة G بحيث أن $C - G - D$ وأن $A - B \cong C - G$.

بما أن $A - B \cong E - F$ بالفرض فان $E - F \cong C - G$ حسب بديهية (9)

إذن $E - F \angle C - D$ حسب تعريف (16) .



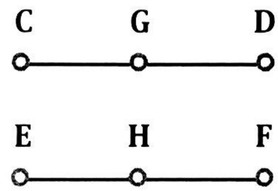
مبرهنة 24 (Theorem 24) : إذا كان $A - B \angle C - D$ و $C - D \cong E - F$ فان $A - B \angle E - F$.



البرهان :

بما أن $C - D \angle A - B$ بالفرض فحسب تعريف (16) توجد نقطة G بحيث أن $C - G - D$ وأن $A - B \cong C - G$.

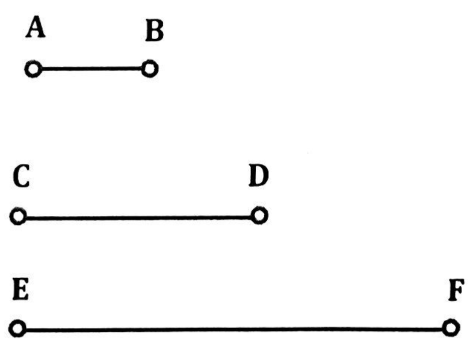
إذن حسب مبرهنة (21) توجد نقطة H بحيث أن $E - H - F$ وأن $E - H \cong C - G$.



بما أن $A - B \cong C - G$ فحسب بديهية (9) $A - B \cong E - H$.

إذن $A - B \angle E - F$ حسب تعريف (16) .

مبرهنة 25 (Theorem 25) : إذا كان $A - B \angle C - D$ و $C - D \angle E - F$ فان $A - B \angle E - F$.



البرهان :

بما أن $\mathbf{A-B \angle C-D}$ بالفرض فحسب تعريف (16) توجد نقطة $\mathbf{G}$ بحيث أن $\mathbf{C-G-D}$ وأن $\mathbf{A-B \cong C-G}$.

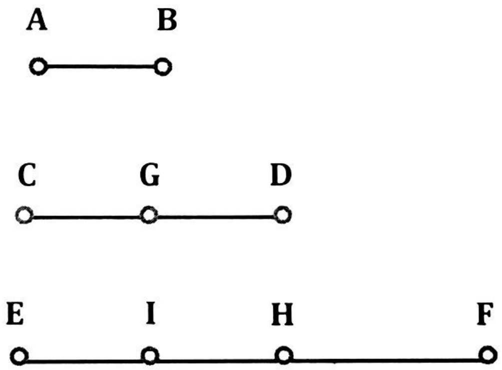
وبما أن $\mathbf{C-D \angle E-F}$ بالفرض فحسب تعريف (16) توجد نقطة $\mathbf{H}$ بحيث أن $\mathbf{E-H-F}$ وأن $\mathbf{C-D \cong E-H}$.

إذن حسب مبرهنة (24) يكون $\mathbf{A-B \angle E-H}$.

إذن حسب تعريف (16) توجد نقطة $\mathbf{I}$ بحيث أن $\mathbf{E-I-H}$ وأن $\mathbf{A-B \cong E-I}$.

بما أن $\mathbf{E-H-F}$ وأن $\mathbf{E-I-H}$ فسيكون لدينا $\mathbf{E-I-H-F}$.

إذن أصبح لدينا $\mathbf{E-I-F}$ و $\mathbf{A-B \cong E-I}$ لذا يكون $\mathbf{A-B \angle E-F}$ حسب تعريف (16) .



مثال 8 (Example 8) : أذا كانت لدينا النقاط $\mathbf{O\,(0\,,0)}$ و $\mathbf{A\,(6\,,8)}$ و $\mathbf{B\,(4\,,2)}$ و $\mathbf{C\,(9\,,2)}$ فأوجد احداثيات النقطة $\mathbf{D}\,(x\,,y)$ على الشعاع $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ بحيث أن $\mathbf{O-D \cong B-C}$.

الجواب :