الفصل الرابع

نظام إقليدس المعدل

قدم عالم الرياضيات الالماني ديفيد هلبرت David Hilbert (المولود بتاريخ 1862-1-23 والمتوفي بتاريخ 1943-2-14) نظاماً بديهياً متكاملاً صحح فيه الاخطاء والعيوب الموجودة في الهندسة الاقليدية (أو ما يطلق عليه بنظام إقليدس المعدل) سيكون إهتمامنا في هذا الفصل هو دراسة مستوي هلبرت الذي هو تعديل للهندسة الاقليدية المستوية .

مستوي هلبرت (Hilbert Plane)

مستوي هلبرت H (Hilbert Plane H) يتكون من مجموعة من **النقاط Points** (يرمز لها بالحروف A ، B ، C ، ⋯) موزعة على مجموعة من **الخطوط المستقيمة Lines** (يرمز لها بالحروف a ، b ، c ، ⋯) (النقاط والخطوط هي مصطلحات غير معرفة) إضافة الى المصطلح الغير معرف **تقع بين Between** بحيث تحقق مجموعتي البديهيات التالية :

أولاً : مجموعة بديهيات الوقوع والوجود (Axioms of Incidence and Existance)

بديهية 1 (Axiom 1): اذا كانت A و B نقطتين مختلفتين فهنالك بالضبط خط مستقيم واحد a يحتويهما.

بديهية 2 (Axiom 2): هنالك على الاقل نقطتين مختلفتين على كل خط مستقيم في المستوي **H** .

بديهية 3 (Axiom 3): هنالك على الاقل ثلاثة نقاط مختلفة لا تقع على خط مستقيم واحد في المستوي **H** .

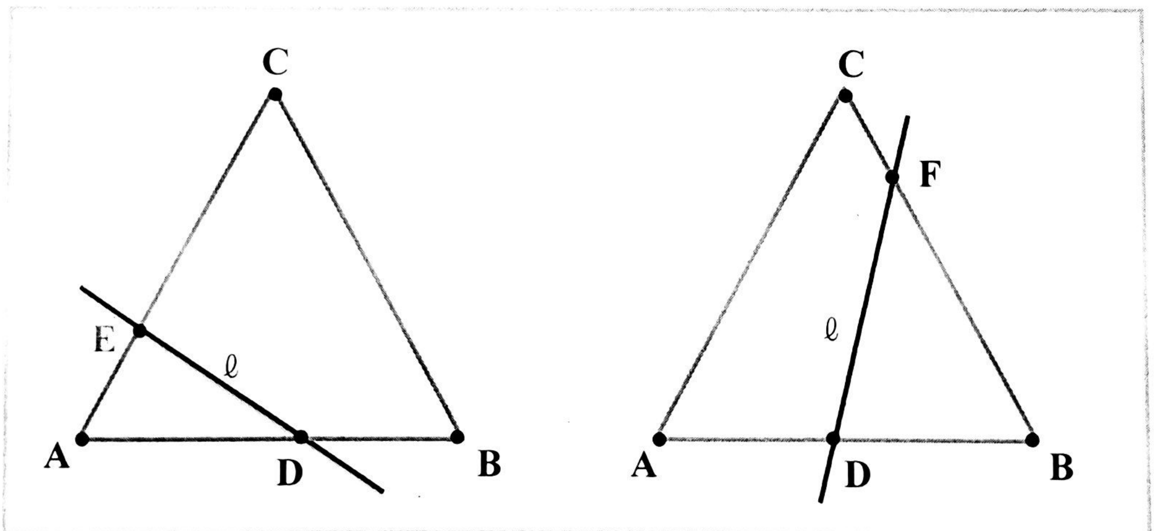
ثانياً : مجموعة بديهيات الترتيب (Axioms of Order)

بديهية 4 (Axiom 4): إذا كانت النقطة **B** تقع بين النقطتين **A** و **C** فان **A** و **B** و **C** هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد وأن النقطة **B** تقع بين النقطتين **C** و **A** .

بديهية 5 (Axiom 5): إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين واقعتين على خط مستقيم ما ℓ فان هنالك على الاقل نقطة واحدة C تقع على الخط المستقيم ℓ بحيث أن B تقع بين A و C .

بديهية 6 (Axiom 6): إذا كانت A و B و C ثلاث نقاط مختلفة تقع على خط مستقيم ما ℓ فان نقطة واحدة فقط من هذه النقاط ستقع بين النقطتين المتبقيتين .

بديهية 7 - بديهية باخ (Axiom 7 - Pasch's Axiom): لتكن A و B و C ثلاث نقاط مختلفة غير واقعة على خط مستقيم واحد وليكن ℓ أي خط مستقيم لا تقع عليه أي نقطة من النقاط A و B و C . إذا كانت D هي نقطة واقعة على ℓ بحيث أن D تقع بين A و B فأما هنالك نقطة E تقع على ℓ بحيث أن E تقع بين A و C أو هنالك نقطة F تقع على ℓ بحيث أن F تقع بين B و C .



ملاحظة 1 (Remark 1) : سوف نرمز للعبارة (أن النقطة **B** تقع بين النقطتين **A** و **C**) بالرمز **A – B – C** .

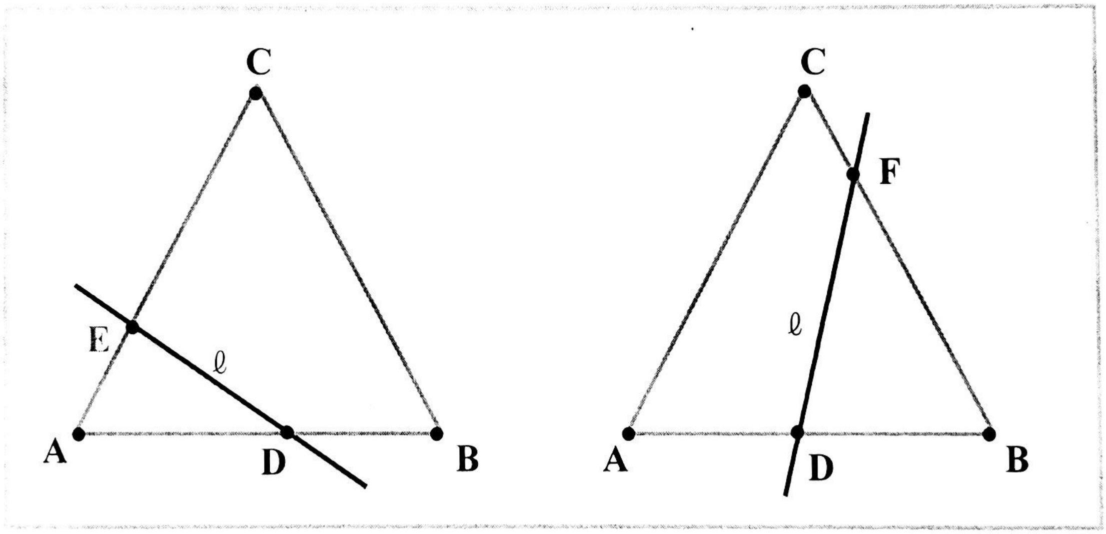
من الملاحظة أعلاه يمكن إعادة كتابة بديهيات الترتيب كما يأتي :

بديهية 4 (Axiom 4): إذا كانت **C – B – A** فان **A – B – C** وان **A** و **B** و **C** هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد .

بديهية 5 (Axiom 5): إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين واقعتين على خط مستقيم ما ℓ فان هنالك على الاقل نقطة واحدة C تقع على الخط المستقيم ℓ بحيث أن A – B – C .

بديهية 6 (Axiom 6): إذا كانت A و B و C ثلاث نقاط مختلفة تقع على خط مستقيم ما ℓ فأما أن تكون A – B – C أو A – C – B أو C – A – B .

بديهية 7 - بديهية باخ (Axiom 7 - Pasch's Axiom): لتكن A و B و C ثلاث نقاط مختلفة غير واقعة على خط مستقيم واحد وليكن ℓ أي خط مستقيم لا تقع عليه أي نقطة من النقاط A و B و C . إذا كانت D هي نقطة واقعة على ℓ بحيث أن A – D – B فأما هنالك نقطة E تقع على ℓ بحيث أن A – E – C أو هنالك نقطة F تقع على ℓ بحيث أن B – F – C .



ملاحظة 2 (Remark 2) : من البديهية 1 نستنتج أن الخط المستقيم يتعين بنقطتين .

تعريف 1 (Definition 1): تكون المجموعتين متساويتين إذا وفقط إذا احتوت بالضبط على نفس العناصر.

مبرهنة 1 (Theorem 1): أي خطين مستقيمين مختلفين يشتركان بنقطة واحدة على الاكثر.

البرهان :

ليكن ℓ و m أي خطين مستقيمين مختلفين .

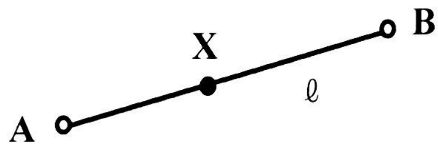
نفرض أن ℓ و m يشتركان في النقطتين A و B .

أصبح لدينا النقطتين A و B يحتويهما خطين مستقيمين مختلفين هما ℓ و m وهذا يناقض بديهية 1 (اذا كانت A و B نقطتين مختلفتين فهنالك بالضبط خط مستقيم واحد a يحتويهما) .

∴ أي خطين مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر (وهذا يعني أن أي خطين مستقيمين أما أن يكونان متوازيين أو يتقاطعان في نقطة واحدة فقط).

مبرهنة 2 (Theorem 2): إذا كانت **A** و **B** نقطتين مختلفتين واقعتين على الخط المستقيم ℓ فان هنالك نقطة C تقع على ℓ بحيث **A − C − B** .

تعريف 2 (Definition 2): لتكن **A** و **B** نقطتين مختلفتين واقعتين على الخط المستقيم ℓ فان مجموعة كل النقاط **X** بحيث أن **A − X − B** تدعى قطعة مستقيم (segment) ويرمز لها بالرمز **A − B** .



ملاحظة 3 (Remark 3) : نستنتج من التعريف 2 أعلاه أن

$\mathbf{A - X - B} \Leftrightarrow \mathbf{X \in A - B}$.

ملاحظة 4 (Remark 4) : من مبرهنة 2 نستنتج أن قطعة المستقيم **A − B** هي مجموعة غير خالية .

مبرهنة 3 (Theorem 3) : النقطتان **A** و **B** لا تنتميان الى قطعة المستقيم **A − B** .

البرهان :

نفرض أولاً أن **A ∈ A − B** فحسب تعريف قطعة المستقيم (تعريف 2) يكون لدينا **A − A − B** .

∴ حسب بديهية 4 (إذا كانت **A − B − C** فان **C − B − A** وان **A** و **B** و **C** هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد) تكون **A** و **A** و **B** ثلاث نقاط مختلفة تقع على مستقيم واحد وهذا يعطينا أن **A** تختلف عن **A** وهذا تناقض .

∴ $\mathbf{A \notin A - B}$.

وبنفس الطريقة أعلاه سوف نستنتج أن $\mathbf{B \notin A - B}$.

∴ النقطتان A و B لا تنتميان الى قطعة المستقيم $A - B$.

(و. هـ. م.)

مبرهنة 4 (Theorem 4) : $A - B = B - A$ (أي أن قطعة المستقيم $A - B$ هي نفسها قطعة المستقيم $B - A$).

البرهان :

لتكن $X \in A - B$ فحسب تعريف قطعة المستقيم (تعريف 2) يكون لدينا $A - X - B$.

من بديهية 4 (إذا كانت $A - B - C$ فان $A - B - C$ وان A و B و C هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد) يكون $B - X - A$ ومن تعريف قطعة المستقيم (تعريف 2) يكون $X \in B - A$.

∴ $A - B \subseteq B - A \quad \cdots \quad (*)$

وبنفس الطريقة أعلاه نبرهن أن $B - A \subseteq A - B \quad \cdots \quad (**)$

∴ من الجملتين $(*)$ و $(**)$ نحصل على أن $A - B = B - A$.

(و. هـ. م.)

مبرهنة 5 (Theorem 5) : قطعة المستقيم $A - B$ هي مجموعة جزئية من الخط المستقيم AB .

البرهان :

لتكن $X \in A - B$ فحسب تعريف قطعة المستقيم (تعريف 2) يكون لدينا $A - X - B$.

من بديهية 4 (إذا كانت $A - B - C$ فان $C - B - A$ وان A و B و C هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد) تكون A و X و B ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد .

لذا فان النقطة X تقع على الخط المستقيم AB . وهذا يعني أن $X \in AB$.

∴ $A - B \subset AB$.

(و. هـ. م.)

مبرهنة 6 (Theorem 6) : لتكن A و B نقطتين مختلفتين فان $A - B = C - D$ اذا وفقط اذا كانت $\{A , B\} = \{C , D\}$.

تعريف 3 (Definition 3): تدعى كل من A و B نقطة نهاية لقطعة المستقيم A − B .

ملاحظة 5 (Remark 5) : لتكن $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هما نقطتي نهاية قطعة المستقيم A − B ، فان النقطة $X(x, y)$ تقع على قطعة المستقيم A − B اذا وفقط اذا كانت النقطة X تحقق معادلة الخط المستقيم AB وتكون قيمة x محصورة بين قيمتي x_1 و x_2 أو تكون قيمة y محصورة بين قيمتي y_1 و y_2 .

مثال 1 (Example 1) : لتكن $A(2, 5)$ و $B(4, 9)$ هما نقطتي نهاية قطعة المستقيم A − B ، فاوجد فيما اذا كانت كل نقطة من النقاط $C(3, 7)$ و $D(5, 11)$ و $E(3, 9)$ تقع على قطعة المستقيم A − B .

الجواب :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftarrow \frac{9 - 5}{4 - 2} = \frac{y - 5}{x - 2}$$

$$\Leftarrow \frac{y - 5}{x - 2} = 2 \Leftarrow y - 5 = 2x - 4$$

$$\Leftarrow y - 2x - 5 + 4 = 0 \Leftarrow \boxed{y - 2x - 1 = 0}$$ معادلة الخط المستقيم AB

1) النقطة $C(3, 7)$ تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $7 - 2(3) - 1 = 0$ ولان $2 < 3 < 4$ فان النقطة $C(3, 7)$ تقع على قطعة المستقيم A − B .

2) النقطة $D(5, 11)$ تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $11 - 2(5) - 1 = 0$ ولكن 5 لا تقع بين 2 و 4 لذا فان النقطة $D(5, 11)$ لا تقع على قطعة المستقيم A − B .

3) النقطة $E(3, 9)$ لا تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $9 - 2(3) - 1 = 2 \neq 0$ لذا فان النقطة $E(3, 9)$ لا تقع على قطعة المستقيم A − B .

مثال 2 (Example 2) : لتكن $A\ (-1\ ,1)$ و $B\ (3\ ,13)$ هما نقطتي نهاية قطعة المستقيم $A - B$ ، فاوجد فيما اذا كانت كل نقطة من النقاط $C\ (2\ ,6)$ و $D\ (1\ ,7)$ و $E\ (4\ ,16)$ تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

الجواب :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftarrow \frac{13 - 1}{3 + 1} = \frac{y - 1}{x + 1}$$

$$\Leftarrow \frac{y - 1}{x + 1} = 3 \Leftarrow y - 1 = 3x + 3$$

$$\Leftarrow y - 3x - 1 - 3 = 0 \Leftarrow \boxed{y - 3x - 4 = 0}$$ معادلة الخط المستقيم AB

1) النقطة $C\ (2\ ,6)$ لا تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $0 \neq -4 = 4 - (2)3 - 6$ لذا فان النقطة $C\ (2\ ,6)$ لا تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

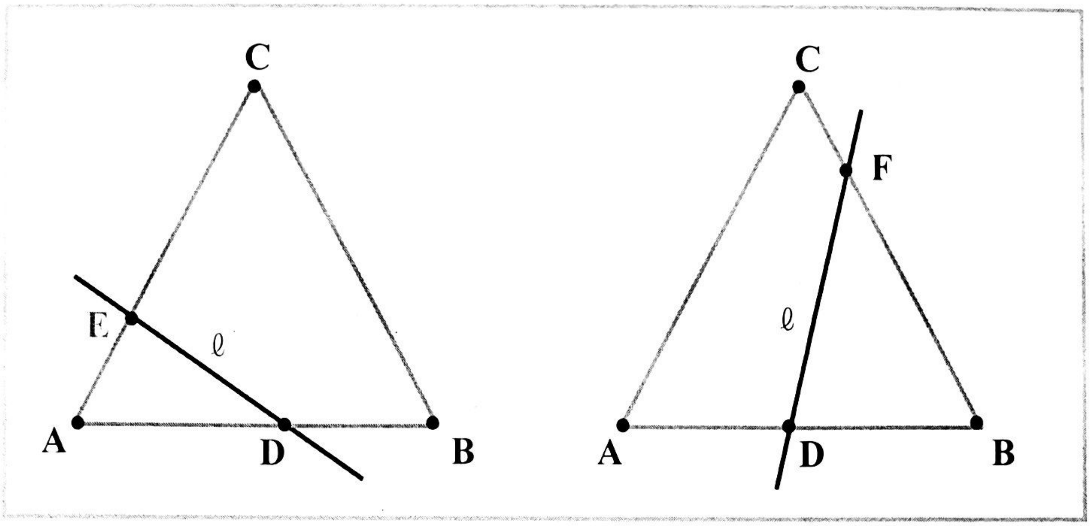
2) النقطة $D\ (1\ ,7)$ تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $0 = 4 - (1)3 - 7$ ولان $3 > 1 > -1$ فان النقطة $D\ (1\ ,7)$ تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

3) النقطة $E\ (4\ ,16)$ تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $0 = 4 - (4)3 - 16$ ولكن 4 لا تقع بين $1 -$ و 3 لذا فان النقطة $E\ (4\ ,16)$ لا تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

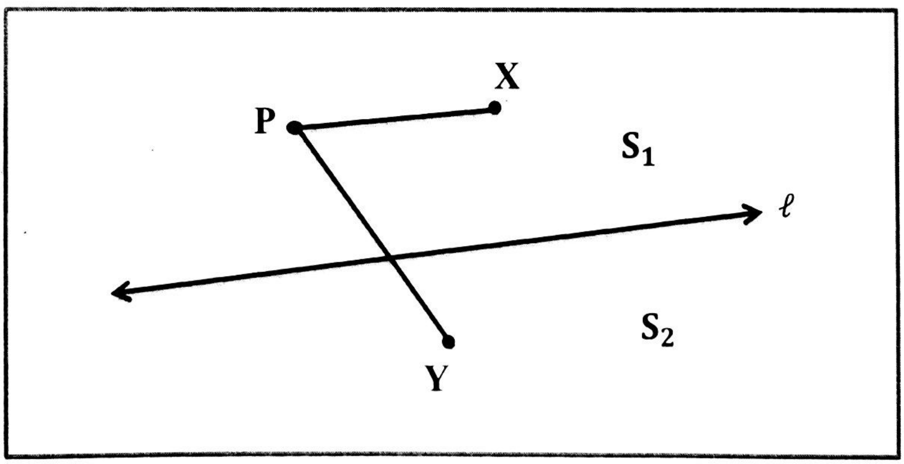
تعريف 4 (Definition 4) : لتكن A و B و C ثلاث نقاط مختلفة لا تقع على خط مستقيم واحد فان إتحاد $\{A\ ,B\ ,C\}$ مع قطع المستقيمات $A - B$ و $A - C$ و $B - C$ يدعى المثلث ABC ، وتدعى النقاط A و B و C رؤوس المثلث ABC وتدعى قطع المستقيمات $A - B$ و $A - C$ و $B - C$ أضلاع المثلث ABC والخطوط التي تحوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع . يرمز للمثلث ABC بـ $\Delta\ ABC$.

ملاحظة 6 (Remark 6) : يمكن إعادة صيااغة بديهية باخ بما يلي :

الخط المستقيم ℓ الذي لا يمر من أي رأس من رؤوس المثلث ABC ويقطع أحد أضلاعه يجب أن يقطع أحد الضلعين الاخرين .



تعريف 5 (Definition 5) : ليكن ℓ أي خط مستقيم و **P** أي نقطة لا تقع على ℓ ولتكن S_1 المجموعة التي تحتوي على **P** وعلى كل النقاط **X** التي لا تقع على ℓ بحيث أن $P - X$ لا تحتوي على أي نقطة من ℓ ولتكن S_2 مجموعة كل النقاط **Y** بحيث أن $P - Y$ تحتوي على نقطة من ℓ . فأن المجموعتين S_1 و S_2 تدعى جهتي المستقيم ℓ وتدعى أيضاً نصفي المستوي بالنسبة للمستقيم ℓ .



ملاحظة 7 (Remark 7) : يمكن كتابة المجموعتان S_1 و S_2 التي ذكرت في التعريف **5** أعلاه بالصيغة التالية :

$$S_1 = \{ X \notin \ell : \; P - X \cap \ell = \emptyset \;\; \text{or} \;\; X = P \}$$

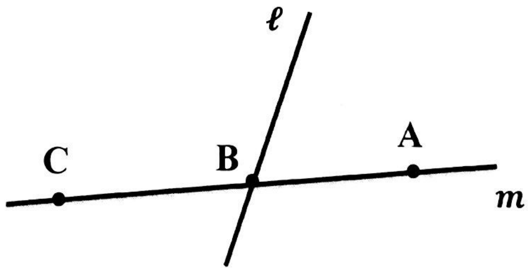
$$S_2 = \{ Y \notin \ell : \; P - Y \cap \ell \neq \emptyset \}$$

تعريف 6 (Definition 6) : لتكن A و B نقطتين مختلفتين غير واقعتين على الخط المستقيم ℓ .
يقال عن النقطتين A و B بانهما واقعتين على جهتين مختلفتين من الخط المستقيم ℓ اذا كانت $A - B$ تحتوي على نقطة من الخط المستقيم ℓ .

تعريف 7 (Definition 7) : لتكن A و B نقطتين مختلفتين غير واقعتين على الخط المستقيم ℓ .
يقال عن النقطتين A و B بانهما واقعتين على نفس الجهة من الخط المستقيم ℓ اذا كانت $A - B$ لا تحتوي على أي نقطة من الخط المستقيم ℓ .

مبرهنة 7 (Theorem 7) : جهتي الخط المستقيم غير خاليتين .

البرهان : ليكن ℓ أي خط مستقيم ولتكن B أي نقطة تقع على ℓ .
حسب بديهية 3 (هنالك على الاقل ثلاثة نقاط مختلفة لا تقع على خط مستقيم واحد في المستوي H) هنالك نقطة A لا تقع على ℓ وليكن m الخط المستقيم الذي يمر من النقطتين A و B .
حسب بديهية 5 (إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين واقعتين على خط مستقيم ما ℓ فان هنالك على الاقل نقطة واحدة C تقع على الخط المستقيم ℓ بحيث أن B تقع بين A و C) هنالك نقطة C تقع على الخط المستقيم m بحيث أن B تقع بين A و C .



$\therefore$ قطعة المستقيم $A - C$ تحتوي على النقطة B من الخط المستقيم ℓ وحسب تعريف 6 (لتكن A و B نقطتين مختلفتين غير واقعتين على الخط المستقيم ℓ . يقال عن النقطتين A و B بانهما واقعتين على جهتين مختلفتين من الخط المستقيم ℓ اذا كانت $A - B$ تحتوي على نقطة من الخط المستقيم ℓ) فان A و C واقعتين على جهتين مختلفتين من الخط المستقيم ℓ .
$\therefore$ جهتي الخط المستقيم ℓ غير خاليتين لان إحداهما تحوي النقطة A والاخرى تحوي النقطة C . أي أن $S_1 \neq \emptyset$ و $S_2 \neq \emptyset$.

(و. هـ. م.)

ملاحظة 8 (Remark 8) :

لتكن $a\,y + b\,x + c = 0$ معادلة الخط المستقيم ℓ ولتكن $A(x_1\,,\,y_1)$ و $B(x_2\,,\,y_2)$ أي نقطتين فاذا كانت القيمتين $a\,y_1 + b\,x_1 + c$ و $a\,y_2 + b\,x_2 + c$ كلاهما موجبة أو كلاهما سالبة فان النقطتين A و B تقعان على نفس الجهة من الخط المستقيم ℓ أما إذا كانت القيمتين $a\,y_1 + b\,x_1 + c$ و $a\,y_2 + b\,x_2 + c$ إحداهما موجبة والاخرى سالبة فان النقطتين A و B تقعان على جهتين مختلفتين من الخط المستقيم ℓ .

مثال 3 (Example 3) : لتكن $2\,y - 3\,x + 1 = 0$ معادلة الخط المستقيم ℓ. فأوجد فيما اذا كانت كل نقطتين من النقاط $A\,(3\,,5)$ و $B\,(2\,,4)$ و $C\,(4\,,2)$ تقعان على نفس الجهة من الخط المستقيم ℓ أو تقعان على جهتين مختلفتين من الخط المستقيم ℓ .

الجواب :

نعوض إحداثيات النقطة A في الجهة اليسرى من معادلة ℓ ينتج

$$2\,(5) - 3\,(3) + 1 = 2$$

نعوض إحداثيات النقطة B في الجهة اليسرى من معادلة ℓ ينتج

$$2\,(4) - 3\,(2) + 1 = 3$$

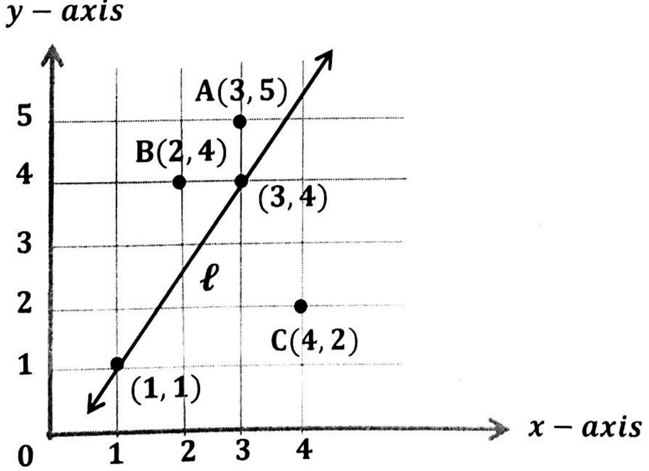
نعوض إحداثيات النقطة C في الجهة اليسرى من معادلة ℓ ينتج

$$2\,(2) - 3\,(4) + 1 = -7$$

$\therefore$ النقطتين A و B تقعان على نفس الجهة من الخط المستقيم ℓ

والنقطتين A و C تقعان على جهتين مختلفتين من الخط المستقيم ℓ

والنقطتين B و C تقعان على جهتين مختلفتين من الخط المستقيم ℓ .



تعريف 8 (Definition 8) : تدعى المجموعة S مجموعة محدبة (Convex Set) إذا وفقط إذا كانت $P - Q$ مجموعة جزئية من S لكل P و Q تنتميان الى S .

مبرهنة 8 (Theorem 8) : كل خط مستقيم هو مجموعة محدبة .

مبرهنة 9 (Theorem 9) : كل قطعة مستقيم هي مجموعة محدبة .

مبرهنة 10 (Theorem 10) : كل جهة من جهتي الخط المستقيم ℓ هي مجموعة محدبة .

مبرهنة 11 (Theorem 11) : تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة .

البرهان : لتكن S_1 و S_2 و $\cdots$ و S_n مجموعات محدبة .

وليكن $S = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n$.

Let $X , Y \in S$

$\Rightarrow \; X , Y \in S_1 \; , \; X , Y \in S_2 \; , \; \cdots \; , \; X , Y \in S_n$

$\Rightarrow \; X - Y \subseteq S_1 \; , \; X - Y \subseteq S_2 \; , \; \cdots \; , X - Y \subseteq S_n$

لان S_1 و S_2 و $\cdots$ و S_n مجموعات محدبة

$\Rightarrow \; X - Y \subseteq S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n$

$\Rightarrow \; X - Y \subseteq S$

$\therefore$ S هي مجموعة محدبة .

تعريف 9 (Definition 9) : لتكن O أي نقطة على الخط المستقيم ℓ و A أي نقطة أخرى على ℓ .

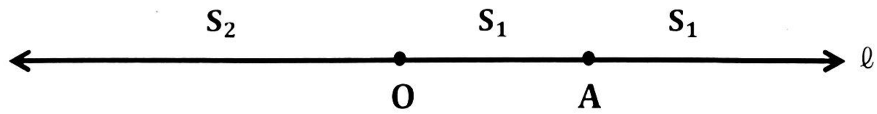
لتكن S_1 مجموعة كل النقاط X على ℓ بحيث أن $O - X - A$ أو $O - A - X$ إضافة الى النقطة A .

لتكن S_2 مجموعة كل النقاط X على ℓ بحيث أن $X - O - A$.

فان S_1 و S_2 تدعى جهتي النقطة O بالنسبة للخط المستقيم ℓ وتدعى S_1 و S_2 أيضاً نصفي الخط المستقيم ℓ بالنسبة للنقطة O. أي أن

$$S_1 = \{ X \in \ell : O - X - A \;\; \vee \;\; O - A - X \;\; \vee \;\; X = A \}$$

$S_2 = \{ X \in \ell : X - O - A \}$.



مبرهنة 12 (Theorem 12) : جهتي النقطة O على الخط المستقيم ℓ لا يحتويان على النقطة O.

البرهان : لتكن S_1 و S_2 جهتي النقطة O .

ولتكن A تنتمي الى S_1 بحيث أن $A \neq O$.

نفرض أن $O \in S_1$.

بما أن $A \neq O$ فحسب تعريف 9 لجهتي النقطة O نستنتج أن $A - O - O$ أو $O - A - O$.

من بديهية 4 (إذا كانت $A - B - C$ فان $C - B - A$ وان A و B و C هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد) تكون A و O و O ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد وهذا يعطينا أن O تختلف عن O وهذا تناقض .

$\therefore \; O \notin S_1$.

الان نفرض أن $O \in S_2$.

فحسب تعريف 9 لجهتي النقطة O نستنتج أن $A - O - O$.

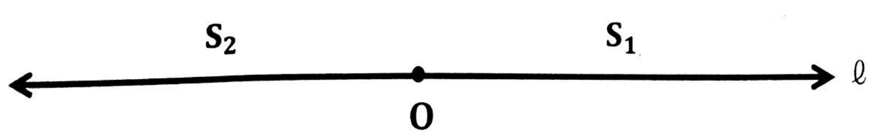
من بديهية 4 (إذا كانت $A - B - C$ فان $C - B - A$ وان A و B و C هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد) تكون A و O و O ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد وهذا يعطينا أن O تختلف عن O وهذا تناقض .

$\therefore \; O \notin S_2$.

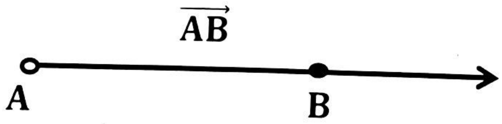
$\therefore$ النقطة O لا تنتمي الى جهتي النقطة O على الخط المستقيم ℓ.

و . هـ . م

تعريف 10 (Definition 10) : لتكن O أي نقطة واقعة على الخط المستقيم ℓ فان كل جهة من جهتي النقطة O بالنسبة للخط المستقيم ℓ تدعى شعاع وتدعى O نقطة البداية للشعاع . والشعاعين على جهتي O بالنسبة للخط المستقيم ℓ تدعى شعاعين متعاكسين .



ملاحظة 9 (Remark 9) : يرمز للشعاع الذي بدايته النقطة A ويحوي النقطة B بالرمز $\overrightarrow{AB}$.



مبرهنة 13 (Theorem 13) : الشعاع هو مجموعة محدبة .

ملاحظة 10 (Remark 10) : لتكن $A\,(x_1\,,\,y_1)$ و $B\,(x_2\,,\,y_2)$ هما أي نقطتين في المستوي xy فان قطعة المستقيم $A-B$ والشعاع $\overrightarrow{AB}$ والشعاع المعاكس لـ $\overrightarrow{AB}$ والذي سنرمز له $\sim\overrightarrow{AB}$ والخط المستقيم AB هي مجموعات من النقاط وكما يلي :

$$A-B=\{\,(1-t)\,A+t\,B:0<t<1\,\}.$$

$$\overrightarrow{AB}=\{\,(1-t)\,A+t\,B:0<t\,\}.$$

$$\sim\overrightarrow{AB}=\{\,(1-t)\,A+t\,B:t<0\,\}.$$

$$AB=\{\,(1-t)\,A+t\,B:t\in\mathbb{R}\,\}.$$

مثال 4 (Example 4) : اذا كانت لدينا النقطتين $A\,(2\,,\,3)$ و $B\,(4\,,\,1)$ فأوجد ثلاثة نقاط تقع على قطعة المستقيم $A-B$.

الجواب :

لتكن $t=0.2$ فان

$$(1-t)\,A+t\,B=(1-0.2)\,A+0.2\,B=0.8\,(2\,,3)+0.2\,\,(4\,,1)$$
$$=(1.6\,,2.4)+\,(0.8\,,0.2)=\,(2.4\,,2.6)$$

لتكن $t=0.5$ فان

$$(1-t)\,A+t\,B=(1-0.5)\,A+0.5\,B=0.5\,(2\,,3)+0.5\,\,(4\,,1)$$
$$=(1\,,1.5)+\,(2\,,0.5)=\,(3\,,2)$$

لتكن $t=0.7$ فان

$$(1-t)\,A+t\,B=(1-0.7)\,A+0.7\,B=0.3\,(2\,,3)+0.7\,\,(4\,,1)$$
$$=(0.6\,,0.9)+\,(2.8\,,0.7)=\,(3.4\,,1.6)$$

النقاط الثلاث $P_1\ (2.4\ ,2.6)$ و $P_2\ (3\ ,2)$ و $P_3\ (3.4\ ,1.6)$ تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

مثال 5 (Example 5) : اذا كانت لدينا النقطتين $A\ (2\ ,\ 3)$ و $B\ (4\ ,\ 1)$ فأوجد ثلاثة نقاط تقع على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بحيث أنها لا تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

الجواب :

لتكن $t = 2$ فان

$$(1 - t)\ A + t\ B = (1 - 2)\ A + 2\ B = -1\ (2\ ,3) + 2\ \ (4\ ,1)$$
$$= \ (-2\ ,-3) + \ (8\ ,2) = \ (6\ ,-1)$$

لتكن $t = 3$ فان

$$(1 - t)\ A + t\ B = (1 - 3)\ A + 3\ B = -2\ (2\ ,3) + 3\ \ (4\ ,1)$$
$$= \ (-4\ ,-6) + \ (12\ ,3) = \ (8\ ,-3)$$

لتكن $t = 4$ فان

$$(1 - t)\ A + t\ B = (1 - 4)\ A + 4\ B = -3\ (2\ ,3) + 4\ \ (4\ ,1)$$
$$= \ (-6\ ,-9) + \ (16\ ,4) = \ (10\ ,-5)$$

النقاط الثلاث $P_1\ (6\ ,-1)$ و $P_2\ (8\ ,-3)$ و $P_3\ (10\ ,-5)$ تقع على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بحيث أنها لا تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

مثال 6 (Example 6) : اذا كانت لدينا النقطتين $A\ (2\ ,3)$ و $B\ (4\ ,1)$ فأوجد ثلاثة نقاط تقع على الشعاع $\overrightarrow{AB}\sim$ المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$.

الجواب :

لتكن $t = -0.5$ فان

$$(1 - t)\ A + t\ B = (1 + 0.5)\ A - 0.5\ B = 1.5\ (2\ ,3)\ -\ 0.5\ (4\ ,1)$$
$$= \ (3\ ,4.5)\ -\ (2\ ,0.5) = \ (1\ ,4)$$

لتكن $t = -1$ فان

$$(1 - t)\ A + t\ B = (1 + 1)\ A -\ B = 2\ (2\ ,3)\ -\ (4\ ,1)$$
$$= \ (4\ ,6)\ -\ (4\ ,1) = \ (0\ ,5)$$

لتكن $t = -2$ فان

$$(1-t)\,A + t\,B = (1+2)\,A - 2\,B = 3\,(2\,,3) - 2\,\,(4\,,1)$$
$$= (6\,,9) - (8\,,2) = (-2\,,7)$$

النقاط الثلاث $P_1\,(1\,,4)$ و $P_2\,(0\,,5)$ و $P_3\,(-2\,,7)$ تقع على الشعاع $\overrightarrow{AB}\sim$ المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$.

مثال 7 (Example 7) : اذا كانت لدينا النقطتين $A\,(1\,,-3)$ و $B\,(2\,,-1)$ فأوجد ثلاثة نقاط تقع على الخط المستقيم AB .

الجواب :

لتكن $t = -2$ فان

$$(1-t)\,A + t\,B = (1+2)\,A - 2\,B = 3\,(1\,,-3) - 2\,\,(2\,,-1)$$
$$= (3\,,-9) + (-4\,,2) = (-1\,,-7)$$

لتكن $t = 2$ فان

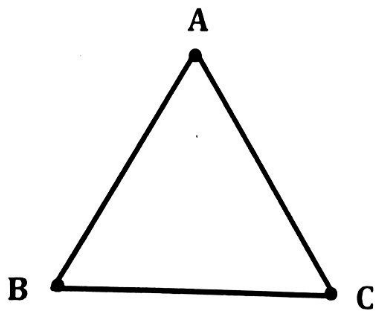
$$(1-t)\,A + t\,B = (1-2)\,A + 2\,B = -1\,(1\,,-3) + 2\,\,(2\,,-1)$$
$$= (-1\,,3) + (4\,,-2) = (3\,,1)$$

لتكن $t = 4$ فان

$$(1-t)\,A + t\,B = (1-4)\,A + 4\,B = -3\,(1\,,-3) + 4\,\,(2\,,-1)$$
$$= (-3\,,9) + (8\,,-4) = (5\,,5)$$

النقاط الثلاث $P_1\,(-1\,,-7)$ و $P_2\,(3\,,1)$ و $P_3(5\,,5)$ تقع على الخط المستقيم AB .

تعريف 11 (Definition 11) : ليكن ABC مثلث فان داخل المثلث ABC هو مجموعة كل النقاط الناتجة من تقاطع جهة المستقيم AB التي تحوي C وجهة المستقيم AC التي تحوي B وجهة المستقيم BC التي تحوي A .



تعريف 12 (Definition 12) : خارج المثلث **ABC** هو مجموعة كل النقاط التي لا تقع على المثلث ولا تقع في داخله .

مبرهنة 14 (Theorem 14) : داخل أي مثلث هو مجموعة محدبة .

البرهان :

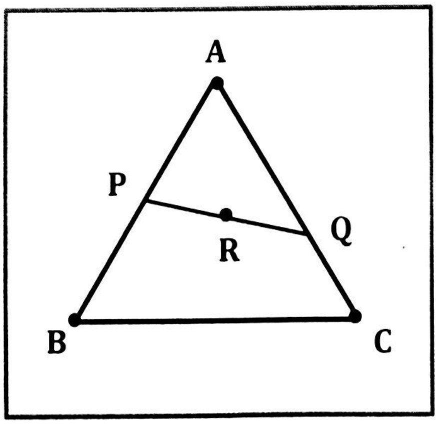
ليكن **ABC** مثلث فمن تعريف 11 (ليكن **ABC** مثلث فان داخل المثلث **ABC** هو مجموعة كل النقاط الناتجة من تقاطع جهة المستقيم **AB** التي تحوي **C** وجهة المستقيم **AC** التي تحوي **B** وجهة المستقيم **BC** التي تحوي **A**) ومن مبرهنة 10 (كل جهة من جهتي الخط المستقيم ℓ هي مجموعة محدبة) ومن مبرهنة 11 (تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة) نستنتج أن داخل المثلث **ABC** (الذي هو تقاطع ثلاثة مجموعات محدبة) هو مجموعة محدبة .

و . هـ . م

مبرهنة 15 (Theorem 15) : اذا كانت **P** و **Q** نقطتين على ضلعي مثلث فان **P − Q** هي مجموعة جزئية من داخل المثلث .

مبرهنة 16 (Theorem 16) : داخل أي مثلث هو مجموعة غير خالية .

البرهان : ليكن **ABC** مثلث فمن مبرهنة 2 (إذا كانت **A** و **B** نقطتين مختلفتين واقعتين على الخط المستقيم ℓ فان هنالك نقطة C تقع على ℓ بحيث **A − C − B**) توجد نقطة **P** بحيث أن **A − P − B** وكذلك توجد نقطة **Q** بحيث أن **A − Q − C** .



من مبرهنة 1 (أي خطين مستقيمين مختلفين يشتركان بنقطة واحدة على الاكثر) نستنتج أن **P ≠ Q** .

من مبرهنة 2 توجد نقطة **R** بحيث أن **P − R − Q** وهذا يعني أن **R ∈ P − Q** .

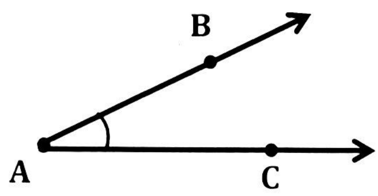
$\therefore$ **R** تنتمي الى داخل المثلث **ABC** حسب مبرهنة 15 (اذا كانت **P** و **Q** نقطتين على ضلعي مثلث فان **P − Q** هي مجموعة جزئية من داخل المثلث) .

لذا فان داخل المثلث **ABC** هو مجموعة غير خالية .

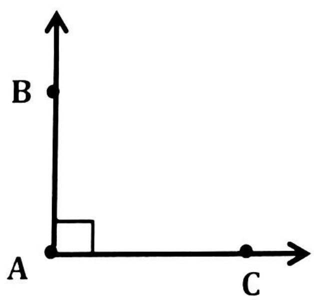
و . هـ . م

<u>تعريف 13 (Definition 13) :</u> ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين لهما نقطة بداية مشتركة **A** فان اتحاد الشعاعين مع نقطة البداية يدعى زاوية ويرمز لها بالرمز **CAB** > أو **BAC** > أو للاختصار **A** > اذا لم تكن هنالك أكثر من زاوية تشترك في النقطة **A** .

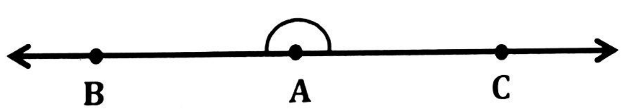
تدعى **A** رأس **BAC** > وتدعى $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ضلعي **BAC** > .



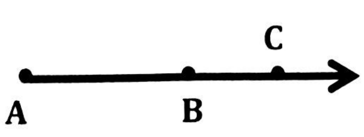
<u>تعريف 14 (Definition 14) :</u> اذا كان ضلعا الزاوية **BAC** شعاعين متعامدين فان **BAC** > تدعى **زاوية قائمة** **(Right Angle)** .



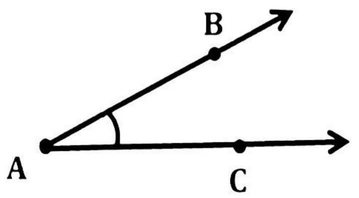
واذا كان ضلعا الزاوية **BAC** شعاعين متعاكسين فان **BAC** > تدعى **زاوية مستقيمة** (**Straight Angle**).



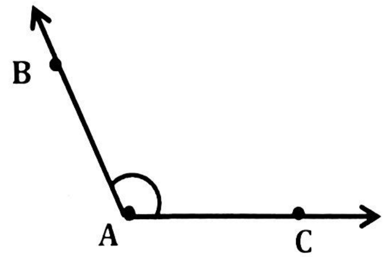
واذا كان ضلعا الزاوية **BAC** شعاعين متطابقين فان **BAC** > تدعى **زاوية صفرية** **(Zero Angle)** أو **(Null Angle)**.



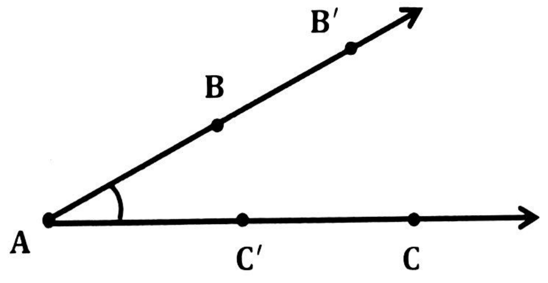
واذا كانت الزاوية BAC أكبر من زاوية صفرية وأقل من زاوية قائمة فان BAC > تدعى **زاوية حادة** **(Acute Angle)**.



واذا كانت الزاوية BAC أكبر من زاوية قائمة وأقل من زاوية مستقيمة فان BAC > تدعى **زاوية منفرجة** **(Obtuse Angle)** .

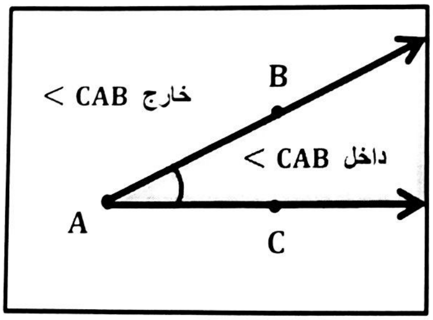


مبرهنة 17 (Theorem 17) : ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين وان B' تقع على $\overrightarrow{AB}$ و C' تقع على $\overrightarrow{AC}$ فان $< B'AC' = < B'AC = < BAC' = < BAC$.



تعريف 15 (Definition 15) : لتكن الزاوية BAC أكبر من زاوية صفرية وأقل من زاوية مستقيمة فان داخل الزاوية BAC هو تقاطع جهة المستقيم AC التي تحوي B وجهة المستقيم AB التي تحوي C .
أما خارج الزاوية BAC فهو مجموعة كل النقاط التي لا تقع في داخل الزاوية BAC ولا تقع على الزاوية BAC .

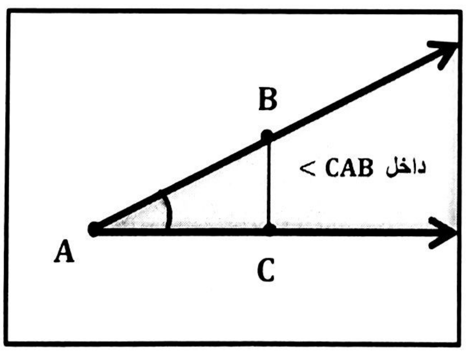
ملاحظة 11 (Remark 11) :



المنطقة المظللة في الشكل أعلاه تمثل داخل الزاوية **BAC** والباقي من المستوي الذي هو غير مظلل يمثل خارج الزاوية **BAC** .

مبرهنة 18 (Theorem 18) : لتكن الزاوية **BAC** أكبر من زاوية صفرية وأقل من زاوية مستقيمة فان داخل الزاوية **BAC** هو مجموعة غير خالية .

البرهان :



بما أن داخل المثلث **BAC** هو مجموعة جزئية من داخل الزاوية **BAC** .

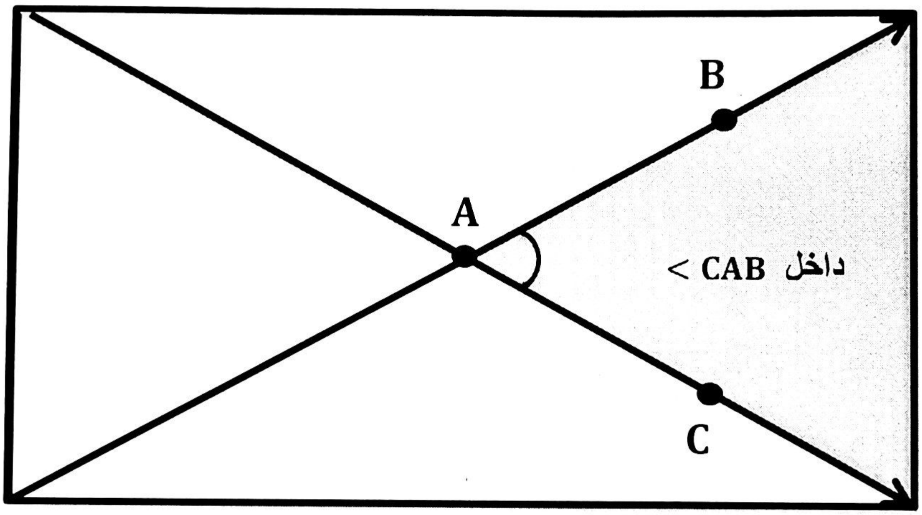
وبما أن داخل المثلث **BAC** هو مجموعة غير خالية حسب مبرهنة **16** (داخل أي مثلث هو مجموعة غير خالية) .

فان داخل الزاوية **BAC** هو مجموعة غير خالية .

و . هـ . م

مبرهنة 19 (Theorem 19) : لتكن الزاوية **BAC** أكبر من زاوية صفرية وأقل من زاوية مستقيمة فان داخل الزاوية **BAC** هو مجموعة محدبة .

البرهان :



حسب تعريف **15** (لتكن الزاوية **BAC** أكبر من زاوية صفرية وأقل من زاوية مستقيمة فان داخل الزاوية **BAC** هو تقاطع جهة المستقيم **AC** التي تحوي **B** وجهة المستقيم **AB** التي تحوي **C** . أما خارج الزاوية **BAC** فهو مجموعة كل النقاط التي لا تقع في داخل الزاوية **BAC** ولا تقع على الزاوية **BAC**) يكون داخل الزاوية **BAC** هو تقاطع جهة المستقيم **AC** التي تحوي **B** وجهة المستقيم **AB** التي تحوي **C** .

حسب مبرهنة **10** (كل جهة من جهتي الخط المستقيم ℓ هي مجموعة محدبة) تكون جهة المستقيم **AC** التي تحوي **B** مجموعة محدبة وتكون جهة المستقيم **AB** التي تحوي **C** أيضاً مجموعة محدبة .

حسب مبرهنة **11** (تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة) يكون داخل الزاوية **BAC** هو مجموعة محدبة لانه تقاطع مجموعتين محدبتين .

و . هـ . م