الفصل الرابع

نظام إقليدس المعدل

قدم عالم الرياضيات الالماني ديفيد هلبرت David Hilbert (المولود بتاريخ 23-1-1862 والمتوفي بتاريخ 14-2-1943) نظاماً بديهياً متكاملاً صحح فيه الاخطاء والعيوب الموجودة في الهندسة الاقليدية (أو ما يطلق عليه بنظام إقليدس المعدل) سيكون إهتمامنا في هذا الفصل هو دراسة مستوي هلبرت الذي هو تعديل للهندسة الاقليدية المستوية .

مستوى هلبرت (Hilbert Plane)

مستوي هلبرت H (**Hilbert Plane H**) يتكون من مجموعة من **النقاط** **Points** (يرمز لها بالحروف A ، B ، C ، $\cdots$) موزعة على مجموعة من **الخطوط** (**مستقيمات**) **Lines** (يرمز لها بالحروف a ، b ، c ، $\cdots$) (النقاط والخطوط هي مصطلحات غير معرفة) إضافة الى المصطلح الغير معرف **تقع بين** **Between** بحيث تحقق مجموعتي البديهيات التالية :

أولاً : مجموعة بديهيات الوقوع والوجود (Axioms of Incidence and Existance)

بديهية 1 (Axiom 1): اذا كانت A و B نقطتين مختلفتين فهنالك بالضبط خط (مستقيم) واحد a يحتويهما .

بديهية 2 (Axiom 2): هنالك على الاقل نقطتين مختلفتين على كل خط في المستوي H .

بديهية 3 (Axiom 3): هنالك على الاقل ثلاثة نقاط مختلفة لا تقع على خط واحد في المستوي **H**.

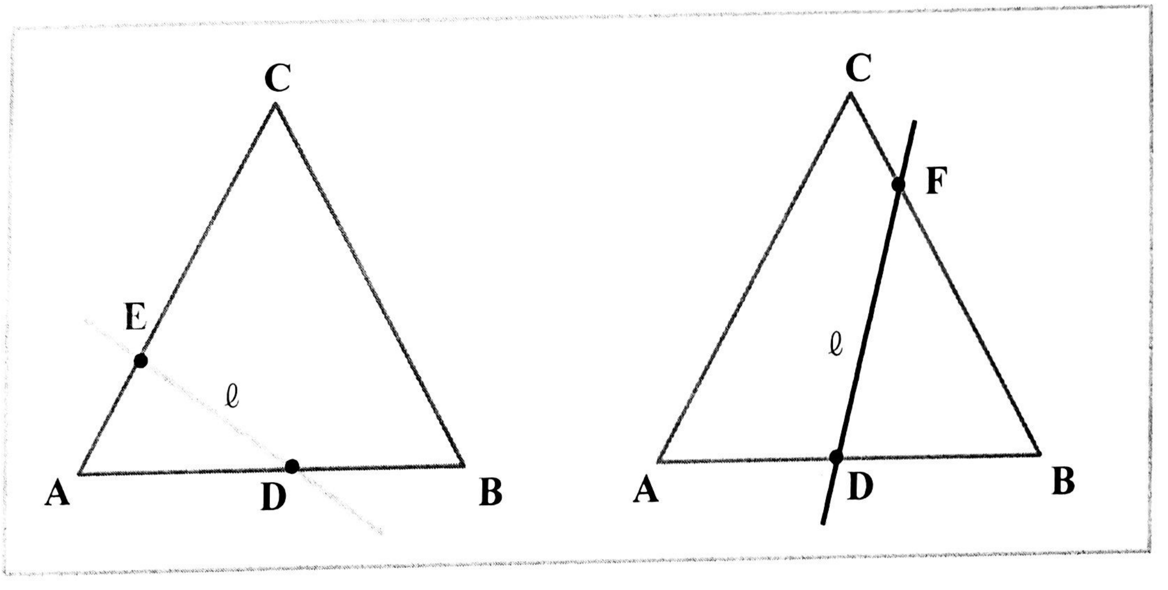
ثانياً : مجموعة بديهيات الترتيب (Axioms of Order)

بديهية 4 (Axiom 4): إذا كانت النقطة B تقع بين النقطتين A و C فان A و B و C هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على نفس الخط وان النقطة B تقع بين النقطتين C و A .

بديهية 5 (Axiom 5): إذا كانت A و B نقطتان مختلفتان واقعتان على خط (مستقيم) ما ℓ فان هنالك على الاقل نقطة واحدة C تقع على الخط (المستقيم) ℓ بحيث أن B تقع بين A و C .

بديهية 6 (Axiom 6): إذا كانت A و B و C ثلاث نقاط مختلفة تقع على خط (مستقيم) ما ℓ فان نقطة واحدة فقط من هذه النقاط ستقع بين النقطتين المتبقيتين .

بديهية 7 - بديهية باخ (Axiom 7 - Pasch's Axiom): لتكن A و B و C ثلاث نقاط مختلفة غير واقعة على خط (مستقيم) واحد وليكن ℓ أي خط (مستقيم) لا تقع عليه أي نقطة من النقاط A و B و C . إذا كانت D هي نقطة واقعة على ℓ بحيث أن D تقع بين A و B فأما هنالك نقطة E تقع على ℓ بحيث أن E تقع بين A و C أو هنالك نقطة F تقع على ℓ بحيث أن F تقع بين B و C .



ملاحظة Remark : سوف نرمز للعبارة (أن النقطة B تقع بين النقطتين A و C) بالرمز $A - B - C$.

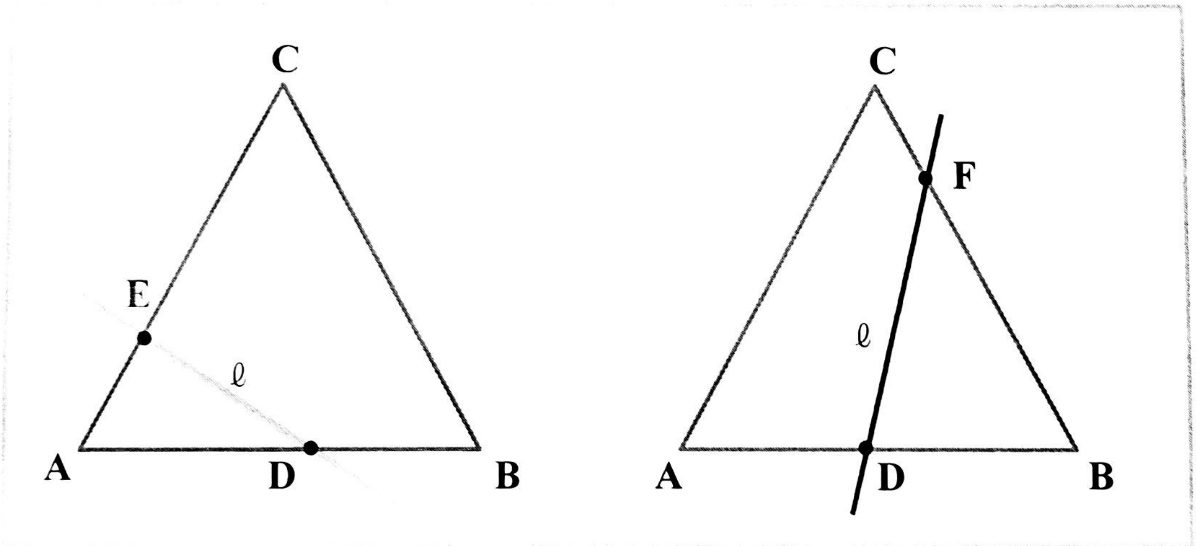
من الملاحظة أعلاه يمكن إعادة كتابة بديهيات الترتيب كما يأتي :

بديهية 4 (Axiom 4): إذا كانت $A - B - C$ فان $C - B - A$ وان A و B و C هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على نفس الخط .

بديهية 5 (Axiom 5): إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين واقعتين على خط مستقيم ما ℓ فان هنالك على الاقل نقطة واحدة C تقع على الخط المستقيم ℓ بحيث أن $A - B - C$.

بديهية 6 (Axiom 6): إذا كانت A و B و C ثلاث نقاط مختلفة تقع على خط مستقيم ما ℓ فأما أن تكون $A - B - C$ أو $A - C - B$ أو $C - A - B$.

بديهية 7 - بديهية باخ (Axiom 7 - Pasch's Axiom): لتكن A و B و C ثلاث نقاط مختلفة غير واقعة على خط مستقيم واحد وليكن ℓ أي خط مستقيم لا تقع عليه أي نقطة من النقاط A و B و C . إذا كانت D هي نقطة واقعة على ℓ بحيث أن $A - D - B$ فأما هنالك نقطة E تقع على ℓ بحيث أن $A - E - C$ أو هنالك نقطة F تقع على ℓ بحيث أن $B - F - C$.



ملاحظة 2 (Remark 2) : من البديهية 1 نستنتج أن الخط المستقيم يتعين بنقطتين .

تعريف 1 (Definition 1): تكون المجموعتين متساويتين إذا وفقط إذا احتوت بالضبط على نفس العناصر.

مبرهنة 1 (Theorem 1): أي خطين مستقيمين مختلفين يشتركان بنقطة واحدة على الاكثر.

البرهان :

ليكن ℓ و m أي خطين مستقيمين مختلفين .

نفرض أن ℓ و m يشتركان في النقطتين A و B .

أصبح لدينا النقطتين A و B يحتويهما خطين مستقيمين مختلفين هما ℓ و m وهذا يناقض بديهية 1 (اذا كانت A و B نقطتين مختلفتين فهنالك بالضبط خط مستقيم واحد a يحتويهما) .

$\therefore$ أي خطين مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر (وهذا يعني أن أي خطين مستقيمين أمّا أن يكونان متوازيين أو يتقاطعان في نقطة واحدة فقط).

<u>مبرهنة 2 (Theorem 2):</u> إذا كانت $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نقطتين مختلفتين واقعتين على الخط المستقيم ℓ فان هنالك نقطة C تقع على ℓ بحيث $\mathbf{A-C-B}$.

<u>البرهان :</u> غير مطلوب .

<u>تعريف 2 (Definition 2):</u> لتكن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نقطتين مختلفتين واقعتين على الخط المستقيم ℓ فان مجموعة كل النقاط $\mathbf{X}$ بحيث أن $\mathbf{A-X-B}$ تدعى قطعة مستقيم (segment) ويرمز لها بالرمز $\mathbf{A-B}$.

<u>ملاحظة 3 (Remark 3) :</u> نستنتج من التعريف 2 أعلاه أن

$\mathbf{A-X-B \Leftrightarrow X \in A-B}$.

<u>ملاحظة 4 (Remark 4) :</u> من مبرهنة 2 نستنتج أن قطعة المستقيم $\mathbf{A-B}$ هي مجموعة غير خالية .

<u>مبرهنة 3 (Theorem 3):</u> النقطتان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ لا تنتميان الى قطعة المستقيم $\mathbf{A-B}$.

<u>البرهان :</u>

نفرض أولاً أن $\mathbf{A \in A-B}$ فحسب تعريف قطعة المستقيم (تعريف 2) يكون لدينا $\mathbf{A-A-B}$.

$\therefore$ حسب بديهية 4 (إذا كانت $\mathbf{A-B-C}$ فان $\mathbf{C-B-A}$ وان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد) تكون $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ثلاث نقاط مختلفة تقع على مستقيم واحد وهذا يعطينا أن $\mathbf{A}$ تختلف عن $\mathbf{A}$ وهذا تناقض .

$\therefore$ حسب $\mathbf{A \notin A-B}$.

وبنفس الطريقة أعلاه سوف نستنتج أن $\mathbf{B \notin A-B}$.

∴ النقطتان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ لا تنتميان الى قطعة المستقيم $\mathbf{B - A}$.

(و. هـ. م.)

مبرهنة 4 (Theorem 4) : $\mathbf{B - A = A - B}$ (أي أن قطعة المستقيم $\mathbf{B - A}$ هي نفسها قطعة المستقيم $\mathbf{B - A}$).

البرهان :

لتكن $\mathbf{X \in A - B}$ فحسب تعريف قطعة المستقيم (تعريف 2) يكون لدينا $\mathbf{B - X - A}$.

من بديهية 4 (إذا كانت $\mathbf{C - B - A}$ فان $\mathbf{A - B - C}$ وان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد) يكون $\mathbf{A - X - B}$ ومن تعريف قطعة المستقيم (تعريف 2) يكون $\mathbf{X \in B - A}$.

$$\mathbf{A - B \subseteq B - A} \quad \cdots \quad (*)$$

وبنفس الطريقة أعلاه نبرهن أن $\mathbf{B - A \subseteq A - B} \quad \cdots \quad (**)$

∴ من الجملتين $(*)$ و $(**)$ نحصل على أن $\mathbf{B - A = A - B}$.

(و. هـ. م.)

مبرهنة 5 (Theorem 5) : قطعة المستقيم $\mathbf{B - A}$ هي مجموعة جزئية من الخط المستقيم $\mathbf{AB}$.

البرهان :

لتكن $\mathbf{X \in A - B}$ فحسب تعريف قطعة المستقيم (تعريف 2) يكون لدينا $\mathbf{B - X - A}$.

من بديهية 4 (إذا كانت $\mathbf{C - B - A}$ فان $\mathbf{A - B - C}$ وان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ هي ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد) تكون $\mathbf{A}$ و $\mathbf{X}$ و $\mathbf{B}$ ثلاث نقاط مختلفة واقعة على خط مستقيم واحد .

لذا فان النقطة $\mathbf{X}$ تقع على الخط المستقيم $\mathbf{AB}$. وهذا يعني أن $\mathbf{X \in AB}$.

∴ $\mathbf{A - B \subset AB}$.

(و. هـ. م.)

مبرهنة 6 (Theorem 6) : لتكن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نقطتين مختلفتين فان $\mathbf{D - C = B - A}$ اذا وفقط اذا كانت $\{\mathbf{C}, \mathbf{D}\} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$.

تعريف 3 (Definition 3): تدعى كل من A و B نقطة نهاية لقطعة المستقيم $A - B$.

ملاحظة 5 (Remark 5) : لتكن $A\ (x_1\ ,\ y_1)$ و $B\ (x_2\ ,\ y_2)$ هما نقطتي نهاية قطعة المستقيم $A - B$ ، فان النقطة $X\ (x\ ,\ y)$ تقع على قطعة المستقيم $A - B$ اذا وفقط اذا كانت النقطة X تحقق معادلة الخط المستقيم AB وتكون قيمة x محصورة بين قيمتي x_1 و x_2 أو تكون قيمة y محصورة بين قيمتي y_1 و y_2 .

مثال 1 (Example 1) : لتكن $A\ (2\ ,\ 5)$ و $B\ (4\ ,\ 9)$ هما نقطتي نهاية قطعة المستقيم $A - B$ ، فاوجد فيما اذا كانت كل نقطة من النقاط $C\ (3\ ,\ 7)$ و $D\ (5\ ,\ 11)$ و $E\ (3\ ,\ 9)$ تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

الجواب :

$$\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(y - y_1)}{(x - x_1)} \Rightarrow \frac{(9 - 5)}{(4 - 2)} = \frac{(y - 5)}{(x - 2)}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{(y - 5)}{(x - 2)} \Rightarrow y - 5 = 2x - 4$$

$$\Rightarrow y - 2x - 5 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{y - 2x - 1 = 0}$$ معادلة الخط المستقيم AB

1) النقطة $C\ (3\ ,\ 7)$ تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $0 = 1 - 7 - 2(3)$ ولان $2 < 3 < 4$ فان النقطة $C\ (3\ ,\ 7)$ تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

2) النقطة $D\ (5\ ,\ 11)$ تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $0 = 1 - 11 - 2(5)$ ولكن 5 لا تقع بين 2 و 4 لذا فان النقطة $D\ (5\ ,\ 11)$ لا تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

3) النقطة $E\ (3\ ,\ 9)$ لا تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $0 \neq 2 = 1 - 9 - 2(3)$ لذا فان النقطة $E\ (3\ ,\ 9)$ لا تقع على قطعة المستقيم $A - B$.

مثال 2 (Example 2) : لتكن $A(-1,1)$ و $B(3,13)$ هما نقطتي نهاية قطعة المستقيم $A-B$ ، فاوجد فيما اذا كانت كل نقطة من النقاط $C(2,6)$ و $D(1,7)$ و $E(4,16)$ تقع على قطعة المستقيم $A-B$.

الجواب :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftarrow \frac{13-1}{3+1} = \frac{y-1}{x+1}$$

$$\Leftarrow \frac{y-1}{x+1} = 3 \Leftarrow y - 1 = 3x + 3$$

$$\Leftarrow y - 3x - 1 - 3 = 0 \Leftarrow \boxed{y - 3x - 4 = 0}$$ معادلة الخط المستقيم AB

1) النقطة $C(2,6)$ لا تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $6 - 3(2) - 4 = -4 \neq 0$ لذا فان النقطة $C(2,6)$ لا تقع على قطعة المستقيم $A-B$.

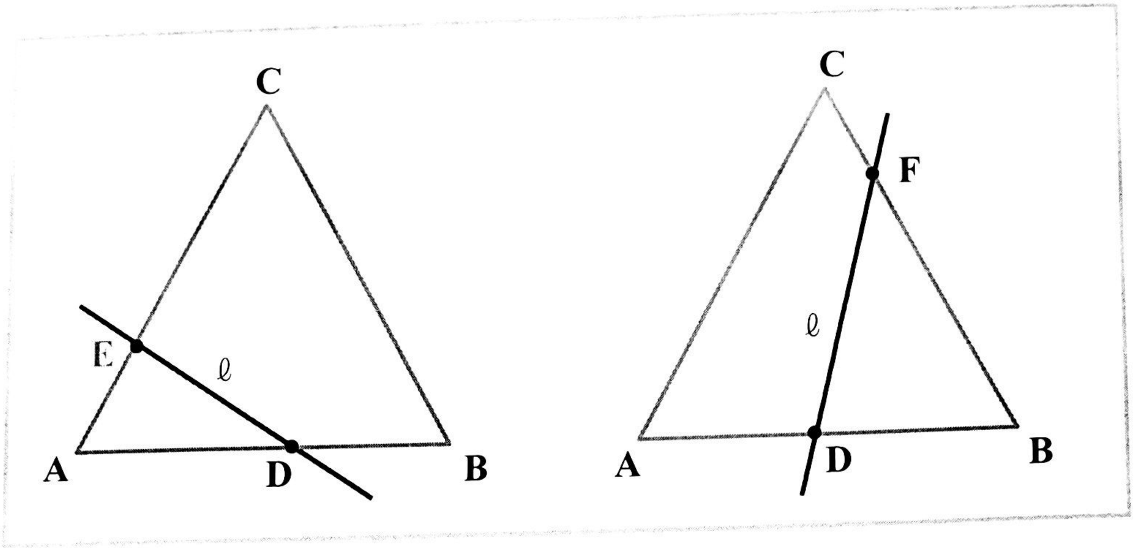
2) النقطة $D(1,7)$ تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $7 - 3(1) - 4 = 0$ ولان $-1 < 1 < 3$ فان النقطة $D(1,7)$ تقع على قطعة المستقيم $A-B$.

3) النقطة $E(4,16)$ تحقق معادلة الخط المستقيم AB لان $16 - 3(4) - 4 = 0$ ولكن 4 لا تقع بين $1-$ و 3 لذا فان النقطة $E(4,16)$ لا تقع على قطعة المستقيم $A-B$.

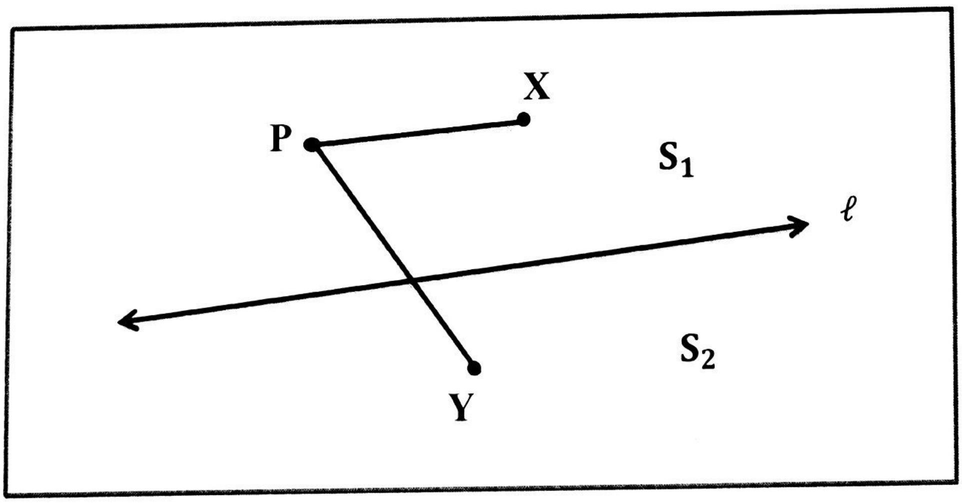
تعريف 4 (Definition 4) : لتكن A و B و C ثلاث نقاط مختلفة لا تقع على خط مستقيم واحد فان إتحاد $\{A, B, C\}$ مع قطع المستقيمات $A-B$ و $A-C$ و $B-C$ يدعى المثلث ABC ، وتدعى النقاط A و B و C رؤوس المثلث ABC وتدعى قطع المستقيمات $A-B$ و $A-C$ و $B-C$ أضلاع المثلث ABC والخطوط التي تحوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع . يرمز للمثلث ABC بـ ΔABC .

ملاحظة 6 (Remark 6) : يمكن إعادة صياغة بديهية باخ بما يلي :

الخط المستقيم ℓ الذي لا يمر من أي رأس من رؤوس المثلث ABC ويقطع أحد أضلاعه يجب أن يقطع أحد الضلعين الاخرين .



تعريف 5 (Definition 5) : ليكن ℓ أي خط مستقيم و P أي نقطة لا تقع على ℓ ولتكن S_1 المجموعة التي تحتوي على P وعلى كل النقاط X التي لا تقع على ℓ بحيث أن $P-X$ لا تحتوي على أي نقطة من ℓ ولتكن S_2 مجموعة كل النقاط Y بحيث أن $P-Y$ تحتوي على نقطة من ℓ . فأن المجموعتين S_1 و S_2 تدعى جهتي المستقيم ℓ وتدعى أيضاً نصفي المستوي بالنسبة للمستقيم ℓ .



ملاحظة 7 (Remark 7) : يمكن كتابة المجموعتان S_1 و S_2 التي ذكرت في التعريف 5 أعلاه بالصيغة التالية :

$$S_1 = \{ X \notin \ell : \; P-X \cap \ell = \emptyset \;\; \text{or} \;\; X = P \}$$

$$S_2 = \{ Y \notin \ell : \; P-Y \cap \ell \neq \emptyset \}$$