بعض التعاريف التي ذكرت في الكتاب الاول من كتب العناصر لاقليدس :

١) **النقطة (Point)** هي التي ليس لها أجزاء .

٢) **الخط (Line)** هو طول بدون عرض .

٣) **نهايات الخط (Extremities of a Line)** هي نقاط .

٤) **الخط المستقيم (Straight Line)** هو الخط الذي تقع نقاطه عليه بصورة منتظمة .

٥) **الدائرة (Circle)** هي شكل مستوي محاط بخط واحد بحيث توجد نقطة واحدة واقعة داخل الشكل تكون جميع قطع المستقيمات التي تصل بينها وبين النقاط الواقعة على الخط متساوية فيما بينها .

٦) **الاشكال المضلعة (Rectilineal Figures)** هي الاشكال الذي تكون محاطة بخطوط مستقيمة . **المثلث (Trilateral Figure)** هو الشكل الذي يكون محاط بثلاثة خطوط مستقيمة . **الشكل الرباعي (Quadrilateral Figure)** هو الشكل الذي يكون محاط بأربعة خطوط مستقيمة . **المضلع المتعدد الاضلاع (Multilateral Figure)** هو الشكل الذي يكون محاط بأكثر من أربعة خطوط مستقيمة .

بديهيات إقليدس الهندسية (The Postulates) :

١) ممكن رسم خط مستقيم من أي نقطة الى أي نقطة أخرى .

٢) ممكن مد أي خط مستقيم على إستقامته .

٣) ممكن إنشاء دائرة لاي مركز وعلى أي بعد من ذلك المركز .

٤) جميع الزوايا القائمة متساوية فيما بينها .

٥) إذا قطع مستقيمين بقاطع وأحدث القاطع زاويتين داخليتين واقعتين على نفس الجهة من القاطع مجموعهما أقل من زاويتين قائمتين فان المستقيمين إذا إمتدا سيتقاطعان على نفس الجهة التي فيها مجموع الزاويتين الداخليتين أقل من زاويتين قائمتين .

البديهيات العامة (The Common Notions) :

١) الاشياء المساوية لشئ واحد متساوية فيما بينها .

٢) إذا أضيفت كميات متساوية الى أخرى متساوية فالمجاميع تكون متساوية .

٣) إذا طرحت كميات متساوية من أخرى متساوية فالبواقي تكون متساوية .

٤) الاشياء المتطابقة تكون متساوية فيما بينها .

٥) الكل أكبر من الجزء .

<u>بعض المبرهنات التي ذكرت في الكتاب الاول من كتب العناصر لاقليدس :</u>

<u>مبرهنة 1 في كتب إقليدس :</u> يمكن إنشاء مثلث متساوي الاضلاع على أي قطعة مستقيم معطاة .

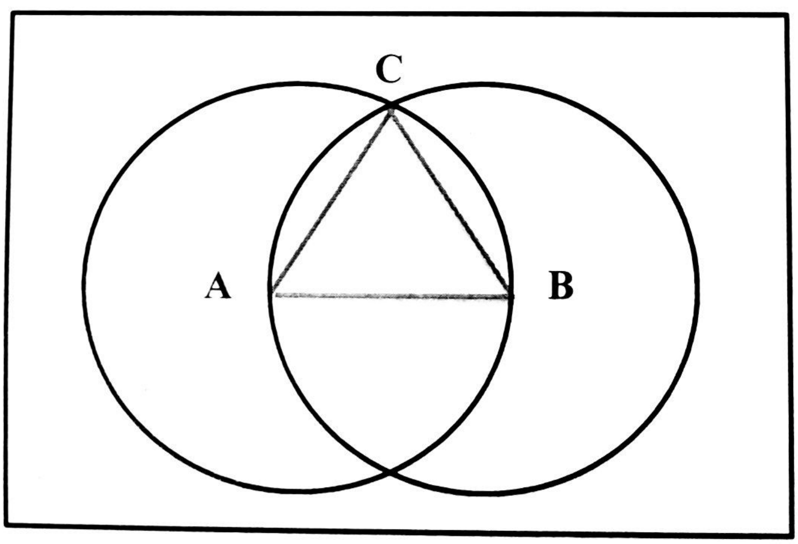
<u>المعطيات :</u> توجد قطعة مستقيم AB .

<u>المطلوب إثباته :</u> على قطعة المستقيم AB المعطاة يمكن إنشاء مثلث متساوي الاضلاع تكون قطعة المستقيم AB أحد أضلاعه.

<u>البرهان :</u> لتكن AB قطعة مستقيم .

حسب بديهية 3 (ممكن إنشاء دائرة لاي مركز وعلى أي بعد من ذلك المركز) توجد دائرة مركزها A ونصف قطرها AB وكذلك توجد دائرة مركزها B ونصف قطرها BA .

لتكن C نقطة تقاطع للدائرتين . من البديهية 1 (ممكن رسم خط مستقيم من أي نقطة الى أي نقطة أخرى) نرسم قطعتا المستقيمان AC و BC .



ومن تعريف الدائرة (الدائرة هي شكل مستوي محاط بخط واحد بحيث توجد نقطة واحدة واقعة داخل الشكل تكون جميع قطع المستقيمات التي تصل بينها وبين النقاط الواقعة على الخط متساوية فيما بينها) يكون لدينا $AB = BC$ و $AB = AC$. حسب البديهية العامة 1 (الاشياء المساوية لشئ واحد متساوية فيما بينها)

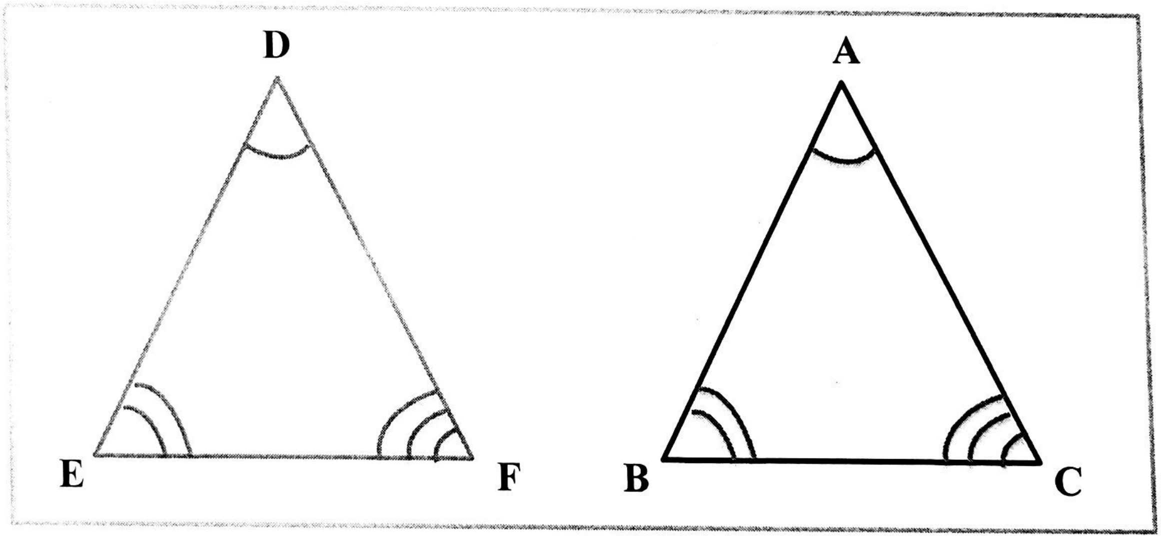
يكون $AC = BC$ لذلك يكون $AB = AC = BC$ أي أن المثلث المنشأ ABC متساوي الاضلاع .

(و. هـ. م.)

<u>مبرهنة 4 في كتب إقليدس :</u> إذا تساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث اخر يتساوى المثلثان وتتساوى الزوايا الباقية المتناظرة فيما بينها ويتساوى الضلع الباقي من أحدهما مع نظيره من المثلث الاخر .

<u>المعطيات :</u> ABC و DEF مثلثان فيهما $DE = AB$ و $DF = AC$ و $< A = < D$.

<u>المطلوب إثباته :</u> المثلث ABC يساوي المثلث DEF و $< B = < E$ و $< C = < F$ و $BC = EF$.



<u>البرهان :</u> ننقل المثلث ABC ونضعه على المثلث DEF بحيث أن الرأس A يقع على الرأس D والضلع AB يقع على الضلع DE .

وبما أن $DE = AB$ (حسب الفرض) فان الرأس B يقع على الرأس E ……… (*)

وبما أن $< A = < D$ (حسب الفرض) فان الضلع AC يقع على الضلع DF

وبما أن $DF = AC$ (حسب الفرض) فان الرأس C يقع على الرأس F ……… (**)

لذلك فان المثلثين ABC و DEF يتطابقان .

ومن التطابق نستنتج أن المثلث ABC يساوي المثلث DEF و $< B = < E$ و $< C = < F$ و $BC = EF$ حسب البديهية العامة 4 (الاشياء المتطابقة تكون متساوية فيما بينها) .

(و. هـ. م.)

نقد طريقة إقليدس في برهان مبرهنة 4 :

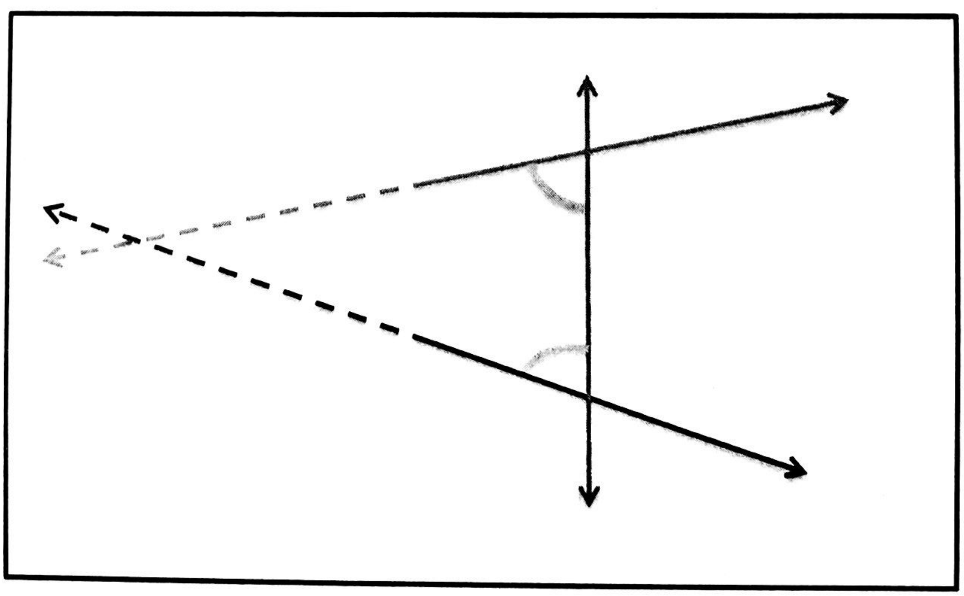
إستعمل إقليدس في برهان هذه المبرهنة طريقة نقل الاشكال كطريقة للبرهان . قد يكون هذا صحيحاً في بعض الحالات ولكن في حالات أخرى يكون تحريك المثلث فيزيائياً ممكن أن يؤثر على أبعاده وعلى شكله لان ظروف موقعه الاول فيزيائياً ممكن أن تكون تختلف عن ظروف موقعه الثاني فيزيائياً .

البديهية الخامسة لإقليدس ومكافئاتها وإستقلاليتها

إن البديهية الخامسة لاقليدس كانت هدفاً لنقد علماء الرياضيات فقد برهن إقليدس مبرهناته ال (28) الاولى بدون أن يستخدم البديهية الخامسة وقد إستند اليها لاول مرة في برهان مبرهنته ال (29) مما أثار إنتباه العلماء حيث اعتقد البعض منهم بأنها مبرهنة .

لقد حاول بعض العلماء برهنة البديهية الخامسة لإقليدس لكن هذه المحاولات تبين فيما بعد انها كانت فاشلة لان البراهين كانت تعتمد على عبارات تكافئ البديهية الخامسة لاقليدس .

البديهية الخامسة لإقليدس : إذا قطع مستقيمين بقاطع وأحدث القاطع زاويتين داخليتين واقعتين على نفس الجهة من القاطع مجموعهما أقل من زاويتين قائمتين فان المستقيمين إذا إمتدا سيتقاطعان على نفس الجهة التي فيها مجموع الزاويتين الداخليتين أقل من زاويتين قائمتين .



مكافئات البديهية الخامسة لإقليدس : هنالك عدة بديهيات مكافئة للبديهية الخامسة لإقليدس فيما يلي إثنتين من هذه المكافئات :

١) **بديهية بلايفير (Playfair's Axiom) :** من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم واحد فقط موازي للمستقيم المعلوم.

٢) **مكافئة ساكيري (Saccheri's Equivalent) :** مجموع زوايا المثلث تساوي دائماً زاويتين قائمتين .

محاولات لبرهنة البديهية الخامسة لإقليدس أو إحدى مكافئاتها :

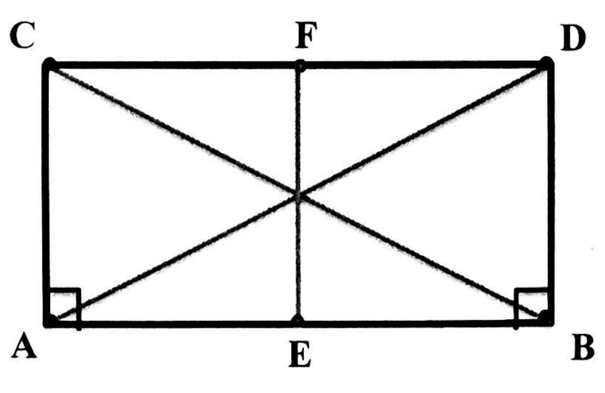
لقد حاول بعض العلماء برهنة البديهية الخامسة لإقليدس وفيما يلي إثنين من هذه المحاولات :

١) **محاولة بطليموس :**

أن أول محاولة لبرهان بديهية التوازي (البديهية الخامسة) لإقليدس كانت من قبل العالم اليوناني بطليموس الذي عاش في القرن الثاني الميلادي في مدينة الاسكندرية في مصر حيث حاول بطليموس برهنة النظرية 29 لإقليدس بدون إستخدام بديهية التوازي (باستخدام مكافئة للبديهية الخامسة) ومن ثم برهن بديهية التوازي باستخدام نظرية 29 لإقليدس .

٢) **محاولة عمر الخيام :**

ولد العالم عمر الخيام في سنة 1048 م في نيسابور في ايران وتوفي سنة 1131 م .



رباعي الخيام

برهان عمر الخيام :

١) برهن عمر الخيام أن الزاويتين العلويتين في شكل رباعي الخيام متساويتين .

٢) برهن عمر الخيام أن المستقيم الواصل بين منتصف القاعدة والضلع العلوي في رباعي الخيام يكون عمودي على القاعدة والضلع المقابل للقاعدة .

لقد إعتمد عمر الخيام على مكافئات لبديهية التوازي (البديهية الخامسة) لإقليدس لبرهنة هذه البديهية وهذه المكافئات هي :

١) إذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاث زوايا قوائم فإن الزاوية الرابعة يجب أن تكون قائمة .

٢) المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين تكون ثابتة .