فرضية 1 متحققة لانه لا توجد نقطتين في النموذج لا يحتويهما خط .

فرضية 2 متحققة لانه كل خط في النموذج يحتوي على ثلاثة نقاط فقط .

فرضية 3 متحققة لانه يوجد لدينا 7 خطوط في هذا النموذج .

فرضية 4 متحققة لانه كل خط في النموذج يحتوي على ثلاثة نقاط فقط بينما عدد النقاط الكلي في النموذج 7 نقاط أي انه لا يوجد خط في النموذج يحتوي نقاط النموذج السبعة .

نقي فرضية 5 متحقق لانه لا يوجد خطوط متوازية في هذا النموذج حيث أن جميع الخطوط متقاطعة .

ملاحظة : الاستقلالية هي خاصية غير أساسية لأنظمة الفرضيات حيث أنه اذا وجدت احدى الفرضيات غير مستقلة في نظام فرضيات ما ، فكل ما علينا عمله هو حذفها من مجموعة الفرضيات واضافتها الى مجموعة المبرهنات وذلك سوف لن يؤثر على النظام الفرضي لأن الفرضيات والمبرهنات كلاهما تعطي خواص المصطلحات الغير معرفة فالخاصية للمصطلحات الغير معرفة تقبل بدون برهان أو تقبل ببرهان لا يؤثر على نظام الفرضيات .

بينما الاتساق خاصية أساسية ومهمة للنظام الفرضي حيث أن النظام الفرضي لا معنى له اذا كان غير متسق لان فيه تناقض .

التمام (Completeness) :

تعريف التمام لنظام الفرضيات : يدعى نظام الفرضيات بالنظام التام اذا كانت أي جملة هي (P) أو نقيضها (P~) ممكن أن نستنتجها من مجموعة فرضيات النظام .

التعريف أعلاه يصعب التحقق منه لانظمة الفرضيات التي تحتوي على عدد غير محدود من المصطلحات الغير معرفة لكن يمكن التحقق منه لنظام الفرضيات الذي تكون فيه مجموعة المصطلحات الغير معرفة عددها محدود .

مثال 1 (Example 1) : نظام يونك الفرضي يكون نظاما تاما لأن جميع نماذج نظام يونك الفرضي متناظرة فيما بينها فالاطلاع على أحدها يكفي لمعرفة أي جملة ان كانت متحققة في النظام أو نفيها هو المتحقق في النظام .

على سبيل المثال الجملة التي نصها (هنالك 10 نقاط موجودة في نظام يونك) هذه جملة غير صحيحة بينما نفيها (ليس هنالك 10 نقاط في نظام يونك) يكون صحيحا .

مثال 2 (Example 2) : نظام فانو الفرضي يكون نظاما تاما لأن جميع نماذج نظام فانو الفرضي متناظرة فيما بينها فالاطلاع على أحدها يكفي لمعرفة أي جملة ان كانت متحققة في النظام أو نفيها هو المتحقق في النظام .

على سبيل المثال الجملة التي نصها (هنالك 10 نقاط موجودة في نظام فانو) هذه جملة غير صحيحة بينما نفيها (ليس هنالك 10 نقاط في نظام فانو) يكون صحيحا .

ملاحظة : التمامية هي خاصية غير أساسية لأنظمة الفرضيات وبصورة عامة هي خاصية غير مفضلة لصعوبة التأكد من تحققها أو عدم تحققها في معظم أنظمة الفرضيات .

الفصل الثالث

الهندسة الاقليدية Euclidean Geometry

إقليدس هو عالم رياضيات يوناني ولد حوالي سنة 325 ق. م. (والبعض يحدد ولادته بسنة 330 ق. م.) وتوفي سنة 265 ق. م. (والبعض يحدد وفاته بسنة 270 ق. م.) عاش في مدينة الاسكندرية في مصر ودرّس الرياضيات فيها . ألّف إقليدس 13 كتابا سماها العناصر (أو الاصول أو المبادئ حسب ترجمه الناس لعنوان الكتب الذي هو باللغة الانكليزية The Elements) .

مع أن حقيقة خلفية محتويات كتب إقليدس المسماة بالعناصر غير واضح لان إقليدس لم ينسب لا الطريقة التي استخدمت في البراهين ولا النتائج الى نفسه . إلا أن هذه الكتب قد كتبت بصورة عبقرية إستطاع إقليدس أن يحوي فيها على 465 نظرية استنتجت بواسطة قوانين المنطق من 10 بديهيات 5 منها هندسية و 5 أخرى عامة .

كتب العناصر The Elements :

كتب العناصر هي الكتب التي كتبت من قبل إقليدس حوالي سنة 300 ق. م. وهي عبارة عن 13 كتاب . حيث كانت الكتب **1 - 6** منها تختص بالهندسة المستوية وكانت تحوي على 72 تعريف (72 Definitions) و 173 مبرهنة (173 Theorems) .

والكتب **7 - 10** منها كانت تختص بالاعداد ونظرية الاعداد وكانت تحوي على 38 تعريف (38 Definitions) و 217 مبرهنة (217 Theorems) .

والكتب **11 - 13** منها كانت تختص بالهندسة المجسمة وكانت تحوي على 62 تعريف (62 Definitions) و 75 مبرهنة (75 Theorems) .

أي أن كتب العناصر الثلاثة عشر إحتوت على 5 بديهيات هندسية و 5 بديهيات عامة و 172 تعريف و 465 مبرهنة .

سنذكر فيما يلي بعض التعاريف وسنذكر البديهيات وبعض المبرهنات التي كتبت من قبل إقليدس في كتبه العناصر :