**مثال 1 ( Example 1 ) :** برهن على إن نظام يونك الفرضي نظاما مستقلا .

**البرهان :**

علينا برهنة إستقلالية كل فرضية من فرضيات نظام يونك والفرضيات هي :

**فرضية 1 ( Axiom 1 ) :** اذا كانت $p_1$ و $p_2$ نقطتين مختلفتين في نظام يونك فهنالك بالضبط خط واحد يحتويهما .

**فرضية 2 ( Axiom 2 ) :** في نظام يونك هنالك بالضبط ثلاث نقاط مختلفة على كل خط .

**فرضية 3 ( Axiom 3 ) :** هنالك على الاقل خط واحد في نظام يونك .

**فرضية 4 ( Axiom 4 ) :** ليست كل النقاط واقعة على خط واحد في نظام يونك .

**فرضية 5 ( Axiom 5 ) :** في نظام يونك أي نقطة $p$ لا تقع على خط ما $\ell$ يمر منها خط واحد فقط $m$ يوازي الخط $\ell$ .

وهذه الفرضيات يحققها النموذج التالي :

**نموذج لنظام يونك :**

اذا مثلنا الخطوط ( lines ) بالحروف a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i ، j ، k ، l والنقاط (points) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 فان الجدول التالي سيكون نموذج ( model ) لنظام يونك الفرضي :

| a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 5 | 8 | 4 | 5 | 6 | 5 | 6 | 4 | 6 | 4 | 5 |
| 3 | 6 | 9 | 7 | 8 | 9 | 9 | 7 | 8 | 8 | 9 | 7 |

١) برهنة إستقلال فرضية 1 :

لبرهنة إستقلالية فرضية 1 علينا نفيها كالاتي :

**نفي فرضية 1 :** يوجد نقطتين مختلفتين $p_1$ و $p_2$ لا يحتويهما أي خط .

**نموذج للفرضيات 2 و 3 و 4 و 5 لنظام يونك ونفي فرضية 1 :**

اذا مثلنا الخطوط ( lines ) بالحروف a ، b والنقاط ( points ) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 فان الجدول التالي سيكون نموذج للفرضيات 2 و 3 و 4 و 5 لنظام يونك ونفي فرضية 1 :

| a | b |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 5 |
| 3 | 6 |

نفي فرضية 1 متحقق لان النقطتين 1 و 4 لا يوجد أي خط يحتويهما .

فرضية 2 متحققة لان كل من الخطين a و b يحتوي على ثلاث نقاط بالضبط .

فرضية 3 متحققة لانه يوجد لدينا الخطين a و b .

فرضية 4 متحققة لانه الخط a لا يحتوي جميع النقاط لان النقطة 6 غير واقعة عليه والخط b لا يحوي جميع النقاط لان النقطة 3 غير واقعة عليه .

فرضية 5 متحققة لان الخط a لا تقع عليه النقاط 4 و 5 و 6 وجميعها يمر منها الخط الوحيد b الذي يوازي a وأن الخط b لا تقع عليه النقاط 1 و 2 و 3 وجميعها يمر منها الخط الوحيد a الذي يوازي b .

٢) برهنة إستقلال فرضية 2 :

لبرهنة إستقلالية فرضية 2 علينا نفيها كالاتي :

**نفي فرضية 2 :** يوجد خط لا يحتوي على ثلاث نقاط .

**نموذج للفرضيات 1 و 3 و 4 و 5 لنظام يونك ونفي فرضية 2 :**

اذا مثلنا الخطوط ( lines ) بالحروف a ، b ، c ، d ، e ، f والنقاط ( points ) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 فان الجدول التالي سيكون نموذج للفرضيات 1 و 3 و 4 و 5 لنظام يونك ونفي فرضية 2 :

| a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 |

فرضية 1 متحققة لان

النقطتين 1 و 2 يحتويهما خط واحد هو a

والنقطتين 1 و 3 يحتويهما خط واحد هو b

والنقطتين 1 و 4 يحتويهما خط واحد هو c

والنقطتين 2 و 3 يحتويهما خط واحد هو d

والنقطتين 2 و 4 يحتويهما خط واحد هو e

والنقطتين 3 و 4 يحتويهما خط واحد هو f

نفي فرضية 2 متحقق لان جميع الخطوط a و b و c و d و e و f تحتوي على نقطتين فقط .

فرضية 3 متحققة لانه يوجد لدينا 6 خطوط في النموذج .

فرضية 4 متحققة لانه كل خط في النموذج يحتوي على نقطتين فقط ولدينا في النموذج 4 نقاط وليس هنالك خط يحتوي جميع النقاط الاربعة .

فرضية 5 متحققة لان

النقطتين 3 و 4 لا تقعان على الخط a وكلاهما يحتويهما الخط الوحيد f الذي يوازي الخط a

والنقطتين 2 و 4 لا تقعان على الخط b وكلاهما يحتويهما الخط الوحيد e الذي يوازي الخط b

والنقطتين 2 و 3 لا تقعان على الخط c وكلاهما يحتويهما الخط الوحيد d الذي يوازي الخط c

والنقطتين 1 و 4 لا تقعان على الخط d وكلاهما يحتويهما الخط الوحيد c الذي يوازي الخط d

والنقطتين 1 و 3 لا تقعان على الخط e وكلاهما يحتويهما الخط الوحيد b الذي يوازي الخط e

والنقطتين 1 و 2 لا تقعان على الخط f وكلاهما يحتويهما الخط الوحيد a الذي يوازي الخط f .

٣) برهنة إستقلال فرضية 3 :

لبرهنة إستقلالية فرضية 3 علينا نفيها كالاتي :

**نفي فرضية 3 :** لا يوجد خط في النظام .

**نموذج للفرضيات 1 و 2 و 4 و 5 لنظام يونك ونفي فرضية 3 :** اذا مثلنا الخطوط ( lines ) بالخطوط المستقيمة ومثلنا النقاط ( points ) بالدوائر الصغيرة فالشكل المرسوم ادناه المتكون من الدائرة الصغيرة A التي تمثل نقطة والذي لا يحتوي أي مستقيم يمثل أي خط سيكون نموذج للفرضيات 1 و 2 و 4 و 5 لنظام يونك ونفي فرضية 3 :

فرضية 1 متحققة لانه ليس هنالك نقطتان مختلفتان في النموذج .

فرضية 2 متحققة لانه لا يوجد أي خط في هذا النموذج .

نفي فرضية 3 متحقق لانه لا يوجد أي خط في هذا النموذج .

فرضية 4 متحققة لانه لا يوجد أي خط في هذا النموذج .

فرضية 5 متحققة لا يوجد أي خط في هذا النموذج .

٤) برهنة إستقلال فرضية 4 :

لبرهنة إستقلالية فرضية 4 علينا نفيها كالاتي :

**نفي فرضية 4 :** هنالك خط يحوي جميع النقاط التي في النظام .

**نموذج للفرضيات 1 و 2 و 3 و 5 لنظام يونك ونفي فرضية 4 :**

اذا مثلنا الخط ( line ) بالحرف a والنقاط ( points ) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 فان الجدول التالي المتكون من عمود واحد فقط سيكون نموذج للفرضيات 1 و 2 و 3 و 5 لنظام يونك ونفي فرضية 4 :

| a |
|---|
| 1 |
| 2 |
| 3 |

فرضية 1 متحققة لان

النقطتين 1 و 2 يحتويهما خط واحد هو a

والنقطتين 1 و 3 يحتويهما خط واحد هو a

والنقطتين **2** و **3** يحتويهما خط واحد هو **a**

فرضية **2** متحققة لان هنالك خط واحد في النموذج هو **a** والذي يحتوي بالضبط على ثلاثة نقاط هي **1** و **2** و **3** .

فرضية **3** متحققة لان هنالك خط واحد هو **a** موجود في النموذج .

نفي فرضية **4** متحققة لانه هنالك خط واحد في النموذج هو **a** والذي يحتوي جميع النقاط التي هي **1** و **2** و **3** .

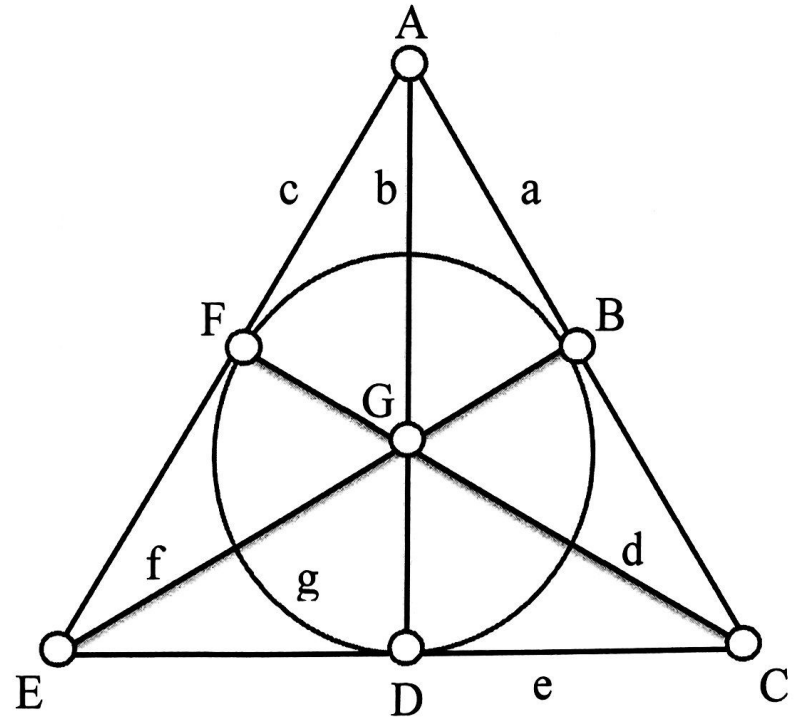
فرضية 5 متحققة لانه لا توجد أي نقطة لا تقع على الخط الوحيد **a** .

٥) برهنة إستقلال فرضية 5 :

لبرهنة إستقلالية فرضية 5 علينا نفيها كالاتي :

**نفي فرضية 5 :** هنالك نقطة $p$ لا تقع على خط ما $\ell$ بحيث أنه لا يوجد خط يمر من $p$ ويوازي الخط $\ell$ أو هنالك أكثر من خط يمر من النقطة $p$ ويوازي الخط $\ell$ .

**نموذج للفرضيات 1 و 2 و 3 و 4 لنظام يونك ونفي فرضية 5 :** اذا مثلنا الخطوط ( lines ) بالخطوط المستقيمة a ، b ، c ، d ، e ، f والدائرة g ومثلنا النقاط ( points ) بالدوائر الصغيرة A ، B ، C ، D ، E ، F ، G فالشكل المرسوم ادناه سيكون نموذج للفرضيات 1 و 2 و 3 و 4 لنظام يونك ونفي فرضية 5 :



فرضية 1 متحققة لانه لا توجد نقطتين في النموذج لا يحتويهما خط .

فرضية 2 متحققة لانه كل خط في النموذج يحتوي على ثلاثة نقاط فقط .

فرضية 3 متحققة لانه يوجد لدينا 7 خطوط في هذا النموذج .

فرضية 4 متحققة لانه كل خط في النموذج يحتوي على ثلاثة نقاط فقط بينما عدد النقاط الكلي في النموذج 7 نقاط أي انه لا يوجد خط في النموذج يحتوي نقاط النموذج السبعة .

نقي فرضية 5 متحقق لانه لا يوجد خطوط متوازية في هذا النموذج حيث أن جميع الخطوط متقاطعة .

**ملاحظة :** الاستقلالية هي خاصية غير أساسية لأنظمة الفرضيات حيث أنه اذا وجدت احدى الفرضيات غير مستقلة في نظام فرضيات ما ، فكل ما علينا عمله هو حذفها من مجموعة الفرضيات واضافتها الى مجموعة المبرهنات وذلك سوف لن يؤثر على النظام الفرضي لأن الفرضيات والمبرهنات كلاهما تعطي خواص المصطلحات الغير معرفة فالخاصية للمصطلحات الغير معرفة تقبل بدون برهان أو تقبل ببرهان لا يؤثر على نظام الفرضيات .

بينما الاتساق خاصية أساسية ومهمة للنظام الفرضي حيث أن النظام الفرضي لا معنى له اذا كان غير متسق لان فيه تناقض .

## التمام ( Completeness ) :

**تعريف التمام لنظام الفرضيات :** يدعى نظام الفرضيات بالنظام التام اذا كانت أي جملة هي ( P ) أو نقيضها ( P~) ممكن أن نستنتجها من مجموعة فرضيات النظام .

التعريف أعلاه يصعب التحقق منه لانظمة الفرضيات التي تحتوي على عدد غير محدود من المصطلحات الغير معرفة لكن يمكن التحقق منه لنظام الفرضيات الذي تكون فيه مجموعة المصطلحات الغير معرفة عددها محدود .

**مثال 1 ( Example 1 ) :** نظام يونك الفرضي يكون نظاما تاما لأن جميع نماذج نظام يونك الفرضي متناظرة فيما بينها فالاطلاع على أحدها يكفي لمعرفة أي جملة ان كانت متحققة في النظام أو نفيها هو المتحقق في النظام .

على سبيل المثال الجملة التي نصها ( هنالك 10 نقاط موجودة في نظام يونك ) هذه جملة غير صحيحة بينما نفيها ( ليس هنالك 10 نقاط في نظام يونك ) يكون صحيحا .

**مثال 2 ( Example 2 ) :** نظام فانو الفرضي يكون نظاما تاما لأن جميع نماذج نظام فانو الفرضي متناظرة فيما بينها فالاطلاع على أحدها يكفي لمعرفة أي جملة ان كانت متحققة في النظام أو نفيها هو المتحقق في النظام .

على سبيل المثال الجملة التي نصها ( هنالك 10 نقاط موجودة في نظام فانو ) هذه جملة غير صحيحة بينما نفيها ( ليس هنالك 10 نقاط في نظام فانو ) يكون صحيحا .

**ملاحظة :** التمامية هي خاصية غير أساسية لأنظمة الفرضيات وبصورة عامة هي خاصية غير مفضلة لصعوبة التأكد من تحققها أو عدم تحققها في معظم أنظمة الفرضيات .