الفصل الاول

أنظمة الفرضيات (او أنظمة البديهيات) Axiomatic Systems

نظام الفرضيات أو نظام البديهيات (axiomatic system) :

يتكون نظام الفرضيات مما يلي :

1 - مجموعة من المصطلحات الغير معرفة A set of undefined terms .

2 - مجموعة من الفرضيات (او البديهيات) A set of axioms .

3 - مجموعة من المبرهنات A set of theorems .

4 - مجموعة من التعاريف (ممكن ان تكون المجموعة خالية) A set of definitions .

5 - قوانين المنطق Laws of logic .

المصطلحات الغير معرفة Undefined terms :

المصطلحات الغير معرفة (undefined terms) هي مصطلحات ليس لها معنى معين وليست اسما لشئ معين بل لها صفات تحددها الفرضيات . مثال على ذلك في الهندسة الحديثة النقطة والخط هما مصطلحان غير معرفان فالنقطة ممكن ان نمثلها بمدينة وممكن ان نمثلها بشخص وممكن ان نمثلها بخرزة وممكن ان نمثلها بفريق لكرة القدم ... . والخط يمكن ان نمثله بشارع يوصل بين المدن ويمكن ان نمثله بلجنة في دائرة ما تتكون من عدة اشخاص وممكن ان نمثله بخيط او سلك وممكن ان نمثله بمباراة لفريقين لكرة القدم ... .

المعنى القديم للفرضية The classical meaning of an axiom :

الفرضية بمعناها القديم هي البديهية (axiom) وهي جملة تثبت نفسها بنفسها او حقيقة متعارف عليها عالميا تقبل بدون برهان .

مثال ١ : جميع الزوايا القائمة متساوية فيما بينها .

مثال ٢ : ممكن رسم مستقيم من أي نقطة الى أي نقطة أخرى .

مثال ٣ : اذا ساوت كميات كمية واحدة فان الكميات ستتساوى فيما بينها .

الهندسة الحديثة لا تقبل ما ئكر اعلاه كتعريف للفرضية (axiom) وتعرف الفرضية بالصيغة التالية .

المعنى الحديث للفرضية The modern meaning of an axiom :

الفرضية هي تلك الجملة الاولية التي توضح خاصية للمصطلحات الغير معرفة (undefined terms) والتي تقبل بدون برهان .

مثال ١ : اذا كانت p هي نقطة غير واقعة على الخط ℓ فهنالك على الاقل خطين يمران من النقطة p موازيان للخط ℓ .

مثال ٢ : كل خط يحتوي بالضبط ١٠ نقاط .

مثال ٣ : كل نقطة يمر منها بالضبط ٩ خطوط .

معنى المبرهنة The meaning of theorem :

هي تلك الخاصية للمصطلحات الغير معرفة (undefined terms) التي يمكن ان نستنتجها من الفرضيات باستخدام قوانين المنطق (laws of logic) .

مثال ١ : عدد النقاط الكلي في النظام يساوي ٣١ .

مثال ٢ : الزاويتين المقابلتين للضلعين المتساويين في المثلث المتساوي الساقين تكون متساوية .

التعاريف Definitions :

إن أي تعريف جيد لاي كلمة في الرياضيات يجب ان يتصف بالصفات التالية:

١ – ان يعبر عنه ببساطة

٢ – ان يكون غير دوري

٣ – ان يصف بطريقة وحيدة الكلمة المراد تعريفها

البساطة تعني ان نعبر عن الكلمة المراد تعريفها بكلمات ابسط منها اي بكلمات معروفة. لقد عرف اقليدس النقطة بانها ليست لها ابعاد وعرف الخط بان له طول فقط وليس له عرض او سمك أي ان اقليدس عرف الخط بالطول والعرض أو السمك والكلمات الطول والعرض والسمك هي اصعب من الكلمة المراد تعريفها لذلك لا يمكن قبول مثل هذه التعاريف . علما ان اقليدس بالواقع قد استخدم النقطة والخط ككلمات غير معرفة .

ويقصد **بالدورية** هي عندما نعطي سلسلة من التعاريف ونعرف من خلالها الكلمة A باستخدام الكلمة B ثم فيما بعد نعرف الكلمة B باستخدام الكلمة A . فمثلا اذا عرفنا الخط بانه مجموعة من النقاط ونعرف النقطة بانها تقاطع خطين فان هذه العملية تسمى بالدورية.

ويقصد **بالوصف الوحيد** ان التعريف الدقيق لكلمة ما يجب ان يصف هذه الكلمة بطريقة ما بحيث لا ينطبق هذا الوصف على اي كلمة اخرى فمثلا اذا عرفنا قلم الرصاص بانه اداة تستعمل للكتابة فان هذا التعريف يصف ايضا قلم الحبر وقلم الجاف وكلاهما ليسا قلم رصاص لذلك لا يمكن قبول هذا التعريف لقلم الرصاص . يمكن تعريف قلم الرصاص بانه اداة تستعمل للكتابة تتكون من مادة الكرافيت (مصنوعة من الكربون والطين) محاطة بالخشب وهذا التعريف لا يصف الا قلم الرصاص .

قوانين المنطق Laws of logic :

قوانين المنطق تتكون مما يلي :

١- **قوانين ربط الجمل** وهي تستخدم لمعرفة صحة الجمل المربوطة من عدمها مثل اداة الربط (**أو** (**or**)) واداة الربط (**و** (**and**)) واداة الربط (**اذا كان** ... **فان** ... (... **then** ... **if**)) واداة الربط (**اذا وفقط اذا** (**if and only if**)) .

٢- **أدوات الشمولية والخصوصية** مثل اداة (**لكل** (**for all**)) واداة (**لاي** (**for any**)) واداة (**بعض** (**some**)) واداة (**يوجد** (**there exists**)) ...

نظام الفرضيات المجرد Abstract Axiomatic System :

اذا كانت العناصر التي نتعامل معها في نظام فرضيات ما عبارة عن مصطلحات غير معرفة مثل النقاط والخطوط فان نظام الفرضيات سوف يدعى **نظام فرضيات مجرد (Abstract Axiomatic System) .**

النموذج A model :

اي مجموعة من الاشياء تحقق الفرضيات لنظام فرضيات مجرد سوف تدعى بنموذج لنظام الفرضيات المجرد **(A model of the Abstract Axiomatic System) .**

أمثلة عن أنظمة الفرضيات

1) الهندسة الاسقاطية المستوية The Plane Projective Geometry

المستوي الاسقاطي π (Projective Plane π) هو عبارة عن مجموعة من النقاط موزعة على مجموعة من الخطوط وفقا للفرضيات التالية :

فرضية 1 (Axiom 1) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في المستوي **π** فهنالك على الاقل خط واحد في المستوي **π** يحتويهما .

فرضية 2 (Axiom 2) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في المستوي **π** فهنالك على الاكثر خط واحد في المستوي **π** يحتويهما .

فرضية 3 (Axiom 3) : اذا كان ℓ_1 و ℓ_2 خطين مختلفين في المستوي **π** فهنالك على الاقل نقطة واحدة في المستوي **π** واقعة عليهما .

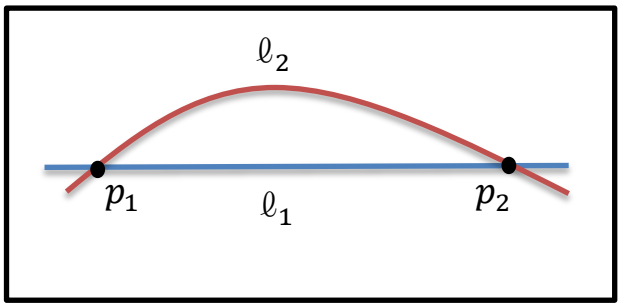
فرضية 4 (Axiom 4) : هنالك على الاقل خط واحد في المستوي **π** .

فرضية 5 (Axiom 5) : هنالك على الاقل ثلاثة نقاط مختلفة على كل خط في المستوي **π** .

فرضية 6 (Axiom 6) : ليست كل نقاط المستوي **π** واقعة على خط واحد في المستوي **π** .

مبرهنة 1 (Theorem 1) : اذا كان ℓ_1 و ℓ_2 خطين مختلفين في المستوي **π** فهنالك على الاكثر نقطة واحدة في المستوي **π** واقعة عليهما .

البرهان :



π

حسب فرضية 3 هنالك نقطة ولتكن p_1 في المستوي **π** تقع على كلا الخطين ℓ_1 و ℓ_2.

نفرض ان هنالك نقطة أخرى p_2 في المستوي **π** تختلف عن النقطة p_1 بحيث ان p_2 تقع هي الاخرى على كلا الخطين ℓ_1 و ℓ_2 . لذا فان النقطتين المختلفتين p_1 و p_2 أصبح هنالك خطين مختلفين يحتويهما هما ℓ_1 و ℓ_2 وهذا يناقض فرضية 2.

∴ هنالك على الاكثر نقطة واحدة في المستوي **π** تقع على الخطين ℓ_1 و ℓ_2 .

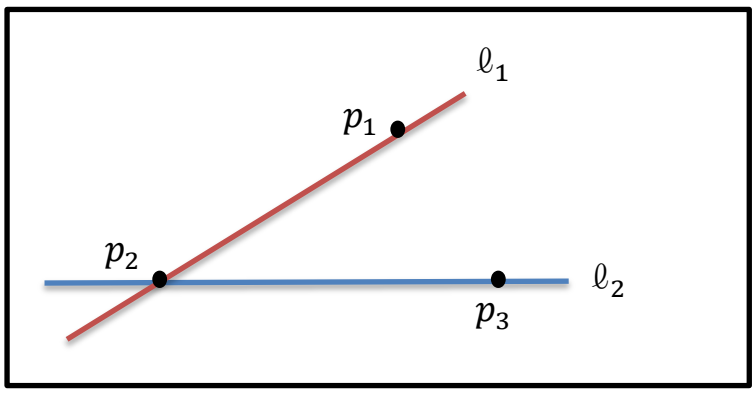
ملاحظة :

١) من فرضية 1 وفرضية 2 نستنتج ان كل نقطتين مختلفتين في المستوي الاسقاطي **π** يحتويهما خط واحد فقط .

٢) من مبرهنة 1 وفرضية 3 نستنتج ان كل خطين مختلفين في المستوي الاسقاطي **π** يتقاطعان في نقطة واحدة فقط .

مبرهنة 2 (Theorem 2) : ليست كل خطوط المستوي **π** تمر من نفس النقطة في المستوي **π** .

البرهان :



π

لتكن p_1 أي نقطة في المستوي π وليكن ℓ_1 أي خط في المستوي π .

اذا كانت p_1 لا تقع على ℓ_1 يكون البرهان مكتمل .

أما اذا كانت p_1 تقع على ℓ_1 فحسب فرضية 5 هنالك نقطة أخرى p_2 تقع على ℓ_1 مختلفة عن النقطة p_1 وحسب فرضية 6 هنالك نقطة p_3 في المستوي π لا تقع على ℓ_1 ، لذا فان $p_3 \neq p_2$ وحسب فرضية 1 هنالك خط ℓ_2 في المستوي π يحتوي p_2 و p_3 .

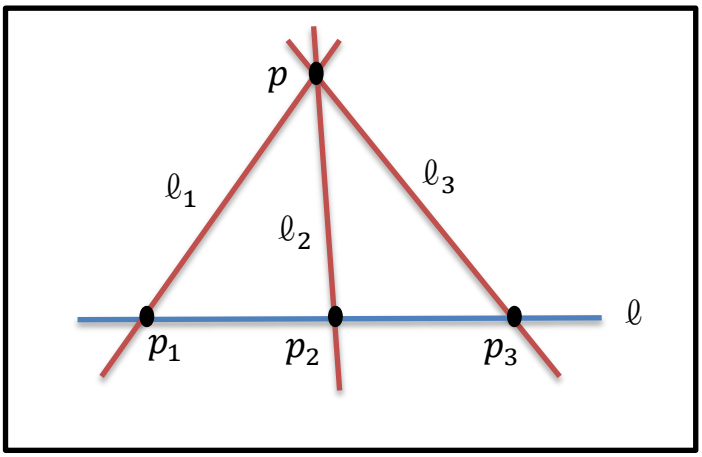
$\ell_2 \neq \ell_1$ لان ℓ_2 يحتوي p_3 بينما ℓ_1 لا يحتوي p_3 .

اذا كان ℓ_2 يمر من p_1 فان ℓ_1 و ℓ_2 هما خطان مختلفان وكلاهما يمران من p_1 و p_2 وهذا يناقض فرضية 2 .

∴ ℓ_2 لا يمر من النقطة p_1 وهذا يعني ليست جميع الخطوط تمر من p_1 .

مبرهنة 3 (Theorem 3) : هنالك على الاقل ثلاثة خطوط مختلفة تمر من أي نقطة p في المستوي π.

البرهان :



لتكن p أي نقطة في المستوي π فان هنالك خط ℓ في المستوي π لا يمر من النقطة p حسب مبرهنة 2 .

حسب فرضية 5 لتكن p_1 و p_2 و p_3 هي أي ثلاثة نقاط مختلفة تقع على الخط ℓ .

بما ان النقطة p لا تقع على الخط ℓ والنقاط p_1 و p_2 و p_3 تقع على الخط ℓ ، لذا فان p تختلف عن p_1 وعن p_2 وعن p_3 .

∴ هنالك ثلاثة خطوط في المستوي π هي ℓ_1 يمر من p و p_1 و ℓ_2 يمر من p و p_2 و ℓ_3 يمر من p و p_3 وجميعها تمر من النقطة p .

بما ان p_1 تقع على ℓ و ℓ_1 و p_2 تقع على ℓ و ℓ_2 وأن p_1 تختلف عن p_2 فان p_2 لا تقع على ℓ_1 و p_1 لا تقع على ℓ_2 لان عكس ذلك سيؤدي الى ان هنالك خطين مختلفين يمران من p_1 **و** p_2 .

$\therefore \ell_2 \neq \ell_1$.

بنفس الطريقة اعلاه نحصل على $\ell_3 \neq \ell_1$ و $\ell_3 \neq \ell_2$.

∴ هنالك على الاقل ثلاثة خطوط مختلفة تمر من النقطة p .

النموذج 1 (model 1) :

مجموعة المستقيمات التي تمر من نقطة الاصل للفضاء الاقليدي (Euclidean xyz-space) ومجموعة كل المستويات التي تمر من نقطة الاصل للفضاء الاقليدي (Euclidean xyz-space) تكون نموذج اقليدي للمستوي الاسقاطي (Euclidean model of the projective plane) حيث أن المستقيمات التي تمر من نقطة الاصل تمثل النقاط والمستويات التي تمر من نقطة الاصل تمثل الخطوط وان المستقيم الذي يمر من نقطة الاصل يقع في المستوي الذي يمر من نقطة الاصل يعني النقطة تقع على الخط وكما موضح في الجدول التالي:

الفضاء الاقليدي (Euclidean xyz-space)	المستوي الاسقاطي (the projective plane)
مستقيم يمر من نقطة الاصل	نقطة
مستوي يمر من نقطة الاصل	خط
مستقيم يمر من نقطة الاصل يقع في المستوي الذي يمر من نقطة الاصل	نقطة تقع على الخط

الهندسة الاسقاطية المستوية المنتهية The Finite Plane Projective Geometry

المستوي الاسقاطي المنتهي π (The Finite Projective Plane π) هو عبارة عن مجموعة من النقاط موزعة على مجموعة من الخطوط وفقا للفرضيات التالية :

فرضية 1 (Axiom 1) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في المستوي **π** فهنالك على الاقل خط واحد في المستوي **π** يحتويهما .

فرضية 2 (Axiom 2) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في المستوي **π** فهنالك على الاكثر خط واحد في المستوي **π** يحتويهما .

فرضية 3 (Axiom 3) : اذا كان ℓ_1 و ℓ_2 خطين مختلفين في المستوي **π** فهنالك على الاقل نقطة واحدة في المستوي **π** واقعة عليهما .

فرضية 4 (Axiom 4) : هنالك على الاقل خط واحد في المستوي **π** .

فرضية 5 (Axiom 5) : هنالك على الاقل ثلاثة نقاط مختلفة على كل خط في المستوي **π** .

فرضية 6 (Axiom 6) : ليست كل نقاط المستوي **π** واقعة على خط واحد في المستوي **π** .

ملاحظة : المستوي الاسقاطي المنتهي π (The Finite Projective Plane π) هو نفسه المستوي الاسقاطي π (Projective Plane π) ولكن المستوي الاسقاطي المنتهي يتكون من مجموعة منتهية من النقاط ومجموعة منتهية من الخطوط .

مبرهنة 1 (Theorem 1) : اذا كان ℓ_1 و ℓ_2 خطين مختلفين في المستوي **π** فهنالك على الاكثر نقطة واحدة في المستوي **π** واقعة عليهما .

البرهان : (نفس برهان مبرهنة 1 في الهندسة الاسقاطية المستوية)

ملاحظة :

١) من فرضية 1 وفرضية 2 نستنتج ان كل نقطتين مختلفتين في المستوي الاسقاطي **π** يحتويهما خط واحد فقط .

٢) من مبرهنة 1 وفرضية 3 نستنتج ان كل خطين مختلفين في المستوي الاسقاطي **π** يتقاطعان في نقطة واحدة فقط .

مبرهنة 2 (Theorem 2) : ليست كل خطوط المستوي **π** تمر من نفس النقطة في المستوي **π** .

البرهان : (نفس برهان مبرهنة 2 في الهندسة الاسقاطية المستوية)

مبرهنة 3 (Theorem 3) : هنالك على الاقل ثلاثة خطوط مختلفة تمر من أي نقطة p في المستوي **π** .

البرهان : (نفس برهان مبرهنة 3 في الهندسة الاسقاطية المستوية)

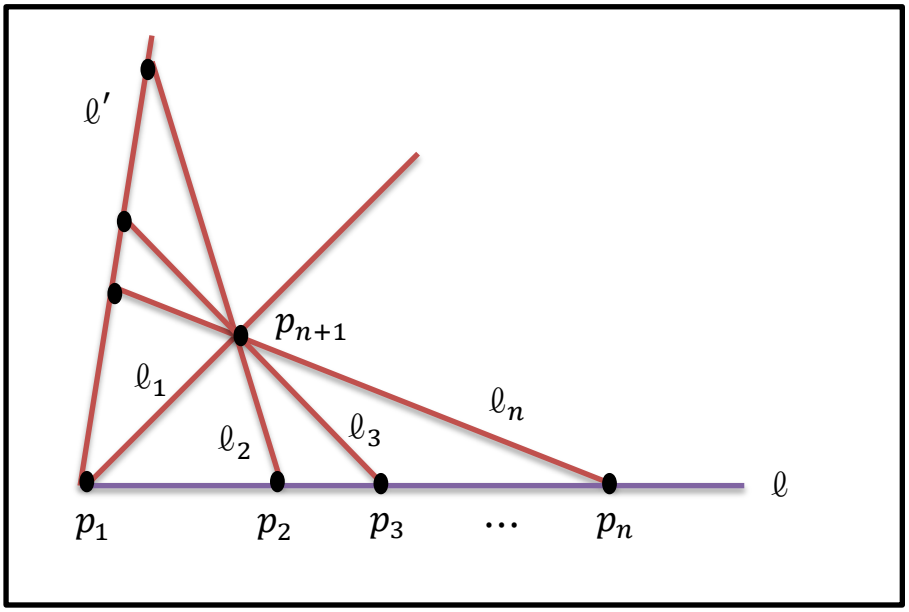
مبرهنة 4 (Theorem 4) : اذا كان هنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على أحد الخطوط في المستوي π ، فهنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على كل خط في المستوي π .

البرهان : (البرهان للاطلاع فقط وغير مطلوب)

ليكن ℓ هو الخط الذي تقع عليه بالضبط n من النقاط المختلفة p_1 ، p_2 ، ⋯ ، p_n .

ليكن ℓ' هو أي خط اخر في المستوي **π** فحسب فرضية 3 ومبرهنة 1 هنالك نقطة تقع على كلا الخطين ℓ و ℓ' ولتكن p_1 .

حسب مبرهنة 3 هنالك خط اخر ℓ_1 يمر من p_1 بحيث أن $\ell_1 \neq \ell'$ و $\ell_1 \neq \ell$.



π

حسب فرضية 5 هنالك نقطة أخرى p_{n+1} على ℓ_1 .

لتكن الخطوط ℓ_1 ، ℓ_2 ، ⋯ ، ℓ_n هي التي تمر من النقطة p_{n+1} ومن النقاط p_1 ، p_2 ، ⋯ ، p_n على التوالي . كما في برهان مبرهنة 3 فان الخطوط ℓ_1 ، ℓ_2 ، ⋯ ، ℓ_n تكون مختلفة وكل واحد منها يكون مختلف عن ℓ وعن ℓ' .

لذا ℓ' يجب أن يحوي نقطة واحدة مشتركة بينه وبين كل خط من هذه الخطوط ℓ_1 ، ℓ_2 ، ... ، ℓ_n وهذه النقاط التي عددها n هي مختلفة واحداها هي النقطة p_1 .

∴ هنالك على الاقل n من النقاط على ℓ' .

لنفرض أن هنالك $n+1$ من النقاط تقع على ℓ' فحسب طريقة البرهان أعلاه سيكون هنالك $n+1$ من النقاط تقع على ℓ وهذا يناقض الفرض .

∴ هنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على ℓ' .

مبرهنة 5 (Theorem 5) : اذا كان لدينا بالضبط n من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي π ، فان كل نقطة في المستوي π يمر منها بالضبط n من خطوط المستوي π .

مبرهنة 6 (Theorem 6) : اذا كان لدينا بالضبط n من الخطوط المختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي π ، فان كل خط في المستوي π يقع عليه بالضبط n من النقاط المختلفة في المستوي π .

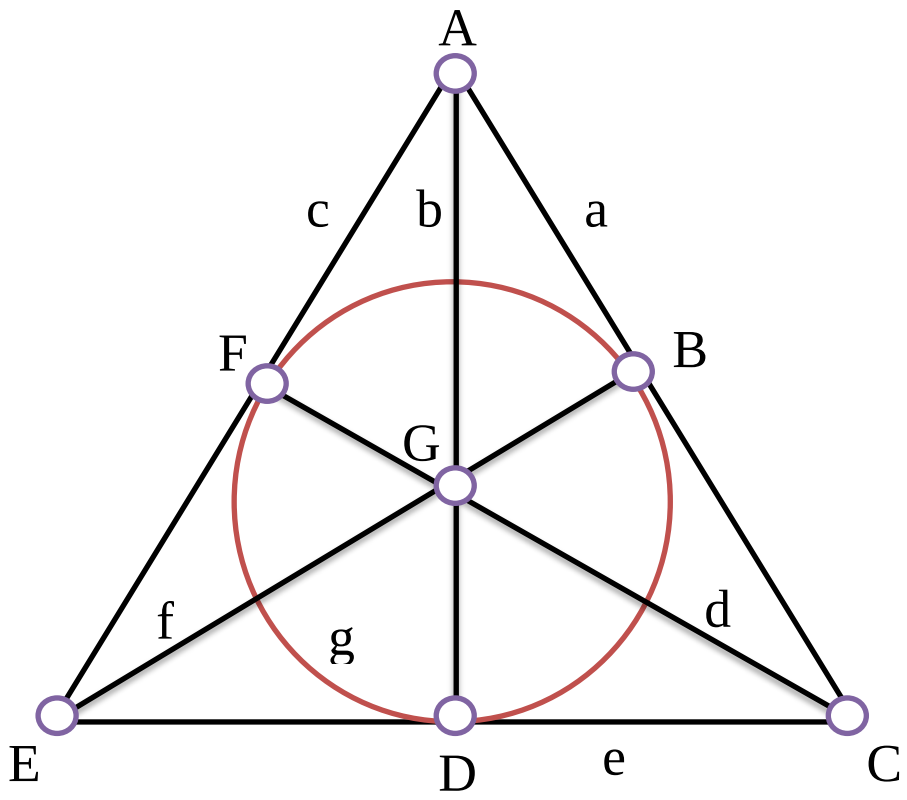
مبرهنة 7 (Theorem 7) : اذا كان لدينا بالضبط n من الخطوط المختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي π ، فان كل نقطة في المستوي π يمر منها بالضبط n من الخطوط المختلفة في المستوي π .

مبرهنة 8 (Theorem 8) : اذا كان لدينا بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي π ، فأن هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2-n+1}$ من النقاط المختلفة في المستوي π .

مبرهنة 9 (Theorem 9) : اذا كان لدينا بالضبط n من الخطوط المختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي π ، فأن هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2-n+1}$ من الخطوط المختلفة في المستوي π .

تعريف (Definition) : رتبة (order) المستوي الاسقاطي المنتهي π تكون $\boldsymbol{n}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من النقاط المختلفة على أي خط في المستوي الاسقاطي π .

النموذج 1 (model 1) : اذا مثلنا الخطوط (lines) بالخطوط المستقيمة a ، b ، c ، d ، e ، f والدائرة g ومثلنا النقاط (points) بالدوائر الصغيرة A ، B ، C ، D ، E ، F ، G فالشكل المرسوم ادناه سيكون نموذج (model) للمستوي الاسقاطي المنتهي من الرتبة 2 :



النموذج 2 (model 2) :

اذا مثلنا الخطوط (lines) بالحروف a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i ، j ، k ، l ، m والنقاط (points) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 ، 13 فان الجدول التالي سيكون نموذج (model) للمستوي الاسقاطي المنتهي من الرتبة 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3
10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9

أسئلة محلولة :

س1) اذا كان أحد الخطوط في المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط 4 نقاط مختلفة ، فكم نقطة يحتوي هذا المستوي ؟

الجواب :

نستنتج من مبرهنة 8 (اذا كان لدينا بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي π ، فأن هنالك بالضبط $n^2 - n + 1$ من النقاط المختلفة في المستوي π) انه يوجد $n^2 - n + 1$ من النقاط في المستوي الاسقاطي المنتهي حيث أن $n = 4$

$\Rightarrow \quad n^2 - n + 1 = (4)^2 - 4 + 1 = 16 - 4 + 1 = 13$.

اذن المستوي الاسقاطي المنتهي هذا يحتوي بالضبط على 13 نقطة .

س 2) اذا كان المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط على 7 نقاط مختلفة ، فكم عدد النقاط على كل خط في هذا المستوي ؟

الجواب :

نفرض أن هنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي الاسقاطي المنتهي π .

حسب مبرهنة 8 (اذا كان لدينا بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي π ، فأن هنالك بالضبط $n^2 - n + 1$ من النقاط المختلفة في المستوي π) يكون لدينا عدد النقاط في المستوي الاسقاطي المنتهي $n^2 - n + 1 = 7$

$\Rightarrow \quad n^2 - n + 1 = 7$

$\Rightarrow \quad n^2 - n + 1 - 7 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 - n - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad (n - 3)(n + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad (n - 3) = 0 \quad \text{or} \quad (n + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad n = 3 \quad \text{or} \quad n = -2$ (يهمل لان عدد النقاط يجب ان يكون موجب)

اذن هنالك بالضبط 3 نقاط مختلفة على الخط ℓ في المستوي الاسقاطي المنتهي π .

حسب مبرهنة 4 (اذا كان هنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على أحد الخطوط في المستوي π ، فهنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على كل خط في المستوي π) يكون عدد النقاط المختلفة الواقعة على كل خط 3 .

س 3) اذا كان أحد الخطوط ℓ_1 في المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط 10 نقاط مختلفة ، وكان m خط اخر في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم نقطة يحتوي الخط m ؟

الجواب :

نستنتج من مبرهنة 4 (اذا كان هنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على أحد الخطوط في المستوي π ، فهنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على كل خط في المستوي π) ان هنالك بالضبط 10 نقاط مختلفة تقع على الخط m .

س 4) اذا كان أحد الخطوط ℓ في المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط 12 نقطة مختلفة ، وكانت p هي أي نقطة في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم خط يمر من النقطة p ؟

الجواب :

نستنتج من مبرهنة 5 (اذا كان لدينا بالضبط n من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي π ، فان كل نقطة في المستوي π يمر منها بالضبط n من خطوط المستوي π) ان هنالك بالضبط 12 من الخطوط المختلفة التي تمر من النقطة p .

س 5) اذا كان لدينا بالضبط 7 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي الاسقاطي المنتهي π وكان ℓ هو أحد الخطوط في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم عدد النقاط التي تقع على الخط ℓ ؟

الجواب :

نستنتج من مبرهنة 6 (اذا كان لدينا بالضبط n من الخطوط المختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي π ، فان كل خط في المستوي π يقع عليه بالضبط n من النقاط المختلفة في المستوي π) ان هنالك بالضبط 7 نقاط مختلفة تقع على الخط ℓ .

س 6) اذا كان لدينا بالضبط 9 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p_1 في المستوي الاسقاطي المنتهي π وكانت p_2 نقطة أخرى في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم خط يمر من النقطة p_2 ؟

الجواب :

نستنتج من مبرهنة 7 (اذا كان لدينا بالضبط n من الخطوط المختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي π ، فان كل نقطة في المستوي π يمر منها بالضبط n من الخطوط المختلفة في المستوي π) ان هنالك بالضبط 9 خطوط مختلفة تمر من النقطة p_2 .

س 7) اذا كان لدينا بالضبط 8 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم عدد الخطوط في المستوي الاسقاطي المنتهي π ؟

الجواب :

نستنتج من مبرهنة 9 (اذا كان لدينا بالضبط n من الخطوط المختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي π ، فأن هنالك بالضبط $n^2 - n + 1$ من الخطوط المختلفة في المستوي π) ان هنالك $n^2 - n + 1$ من الخطوط في المستوي الاسقاطي المنتهي π حيث أن $n = 8$

$$\Rightarrow \quad n^2 - n + 1 = (8)^2 - 8 + 1 = 64 - 8 + 1 = 57 .$$

اذن المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط على 57 من الخطوط المختلفة .

س 8) اذا كان لدينا بالضبط 11 نقطة مختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم عدد النقاط في المستوي الاسقاطي المنتهي π ؟

الجواب :

نستنتج من مبرهنة 8 (اذا كان لدينا بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي π ، فأن هنالك بالضبط $n^2 - n + 1$ من النقاط المختلفة في المستوي π) انه يوجد $n^2 - n + 1$ من النقاط في المستوي الاسقاطي المنتهي π حيث أن $n = 11$

$$\Rightarrow \quad n^2 - n + 1 = (11)^2 - 11 + 1 = 121 - 11 + 1 = 111 .$$

اذن المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط على 111 نقطة .

س 9) اذا كان لدينا بالضبط 43 نقطة مختلفة في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فما هي رتبة المستوي الاسقاطي المنتهي π ؟

الجواب :

نفرض أن هنالك بالضبط n_1 من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي الاسقاطي المنتهي π .

حسب مبرهنة 8 (اذا كان لدينا بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي π ، فأن هنالك بالضبط $n^2 - n + 1$ من النقاط المختلفة في المستوي π) يكون لدينا عدد النقاط في المستوي الاسقاطي المنتهي $n_1{}^2 - n_1 + 1 = 43$

$\Rightarrow \quad n_1{}^2 - n_1 + 1 = 43$

$\Rightarrow \quad n_1{}^2 - n_1 + 1 - 43 = 0$

$\Rightarrow \quad n_1{}^2 - n_1 - 42 = 0$

$\Rightarrow \quad (n_1 - 7)\,(n_1 + 6) = 0$

$\Rightarrow \quad (n_1 - 7) = 0 \quad \text{or} \quad (n_1 + 6) = 0$

$\Rightarrow \quad n_1 = 7 \quad \text{or} \quad n_1 = -6$ (يهمل لان عدد النقاط يجب ان يكون موجب)

اذن هنالك بالضبط 7 نقاط مختلفة على الخط ℓ في المستوي الاسقاطي المنتهي π .

حسب التعريف (رتبة (order) المستوي الاسقاطي المنتهي π تكون n اذا كان هنالك بالضبط $n + 1$ من النقاط المختلفة على أي خط في المستوي الاسقاطي π) يكون لدينا $n + 1 = 7 \Leftarrow n = 6$.

لذا فان رتبة المستوي الاسقاطي المنتهي π تكون 6 .

<u>تمارين (Exercises) :</u>

س1) اذا كان أحد الخطوط في المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط 9 نقاط مختلفة ، فكم نقطة يحتوي هذا المستوي ؟

س 2) اذا كان المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط على 13 نقاط مختلفة ، فكم عدد النقاط على كل خط في هذا المستوي ؟

س 3) اذا كان أحد الخطوط ℓ_1 في المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط 12 نقاط مختلفة ، وكان m خط اخر في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم نقطة يحتوي الخط m ؟

س 4) اذا كان أحد الخطوط ℓ في المستوي الاسقاطي المنتهي π يحتوي بالضبط 6 نقطة مختلفة ، وكانت p هي أي نقطة في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم خط يمر من النقطة p ؟

س 5) اذا كان لدينا بالضبط 5 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي الاسقاطي المنتهي π وكان ℓ هو أحد الخطوط في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم عدد النقاط التي تقع على الخط ℓ ؟

س 6) اذا كان لدينا بالضبط 11 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p_1 في المستوي الاسقاطي المنتهي π وكانت p_2 نقطة أخرى في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم خط يمر من النقطة p_2 ؟

س 7) اذا كان لدينا بالضبط 10 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فكم عدد الخطوط في المستوي الاسقاطي المنتهي π ؟

س 8) اذا كان لدينا بالضبط 57 نقطة مختلفة في المستوي الاسقاطي المنتهي π ، فما هي رتبة المستوي الاسقاطي المنتهي π ؟

2) الهندسة التألفية المستوية The Plane Affine Geometry

المستوي التألفي α (Affine Plane α) يتكون من مجموعة من النقاط موزعة على مجموعة من الخطوط (النقاط والخطوط هي مصطلحات غير معرفة) وفقا للفرضيات التالية :

فرضية 1 (Axiom 1) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في المستوي **α** فهنالك بالضبط خط واحد في المستوي **α** يحتويهما .

فرضية 2 (Axiom 2) : هنالك على الاقل نقطتين مختلفتين على كل خط في المستوي **α** .

فرضية 3 (Axiom 3) : هنالك على الاقل خط واحد في المستوي α .

فرضية 4 (Axiom 4) : ليست كل نقاط المستوي α واقعة على خط واحد في المستوي α .

فرضية 5 (Axiom 5) : أي نقطة p لا تقع على خط ما ℓ في المستوي α يمر منها خط واحد فقط m بحيث ان الخطين ℓ و m لا يشتركان باي نقطة .

تعريف (Definition) : أي خطين مختلفين يقال عنهما أنهما متوازيان اذا لم يشتركان بأي نقطة.

ملاحظة (Remark) : يمكن إعادة نص فرضية 5 بالشكل التالي :
أي نقطة p لا تقع على خط ما ℓ في المستوي α يمر منها خط واحد فقط m يوازي الخط ℓ .

مبرهنة 1 (Theorem 1) : أي خطين مختلفين في المستوي التألفي α يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر .

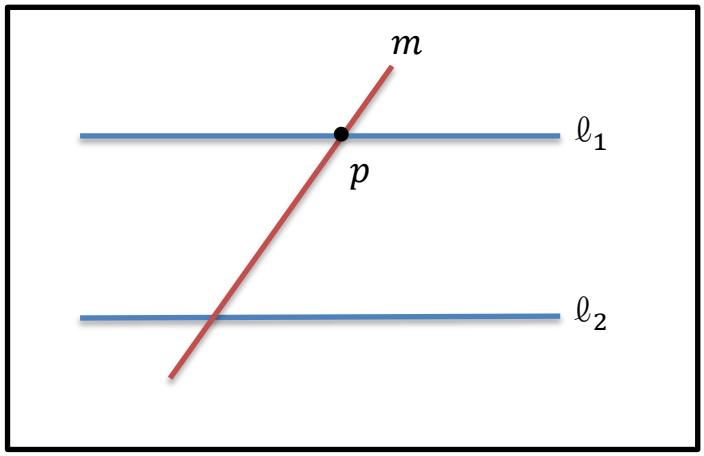
البرهان :

ليكن ℓ و m أي خطين مختلفين في المستوي التألفي α .
نفرض أن ℓ و m يشتركان في نقطتين p_1 و p_2 .
أصبح لدينا النقطتين p_1 و p_2 يحتويهما خطين مختلفين هما ℓ و m وهذا يناقض فرضية 1 (اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في المستوي α فهنالك بالضبط خط واحد في المستوي α يحتويهما) .
∴ أي خطين مختلفين في المستوي α يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر (وهذا يعني أن أي خطين أما أن يكونان متوازيين أو يتقاطعان في نقطة واحدة فقط) .

مبرهنة 2 (Theorem 2) : في المستوي التألفي α اذا قطع خط أحد خطين متوازيين فانه يجب أن يقطع الاخر .

البرهان :

ليكن ℓ_1 و ℓ_2 أي خطين متوازيين في المستوي التألفي α وأن m خط اخر يقطع ℓ_1 في النقطة p .



نفرض أن m يوازي ℓ_2 فسيكون لدينا خطين مختلفين m و ℓ_1 يمران من النقطة p ويوازيان ℓ_2 وهذا يخالف فرضية 5 (أي نقطة p لا تقع على خط ما ℓ في المستوي **α** يمر منها خط واحد فقط m يوازي الخط ℓ) .

∴ m يجب أن يقطع ℓ_2 .

مبرهنة 3 (Theorem 3) : في المستوي التألفي **α** الخطان الموازيان لخط واحد يكونان متوازيين .

البرهان :

ليكن ℓ_1 و ℓ_2 و ℓ_3 ثلاثة خطوط مختلفة في المستوي التألفي **α** بحيث أن ℓ_1 يوازي ℓ_3 و ℓ_2 يوازي ℓ_3 .

نفرض أن ℓ_1 لا يوازي ℓ_2 وهذا يعني أن ℓ_1 يقطع ℓ_2 .

اذن ℓ_1 يقطع ℓ_3 حسب مبرهنة 2 (في المستوي التألفي **α** اذا قطع خط أحد خطين متوازيين فانه يجب أن يقطع الاخر) وهذا يناقض الفرض بأن ℓ_1 يوازي ℓ_3 .

∴ يجب ان يكون ℓ_1 يوازي ℓ_2 .

النموذج 1 (model 1) :

مجموعة المستقيمات التي تمر من نقطة الاصل للفضاء الاقليدي (Euclidean xyz-space) عدا الواقعة في المستوي xy (xy-plane) ومجموعة كل المستويات التي تمر من نقطة الاصل للفضاء الاقليدي (Euclidean xyz-space) عدا المستوي xy (xy-plane) تكون نموذج اقليدي للمستوي التألفي (Euclidean model of the affine plane) حيث أن المستقيمات التي تمر من نقطة الاصل عدا الواقعة في المستوي xy تمثل النقاط والمستويات التي تمر من نقطة الاصل عدا المستوي xy تمثل الخطوط وان المستقيم الذي يمر من نقطة الاصل يقع في المستوي الذي يمر من نقطة الاصل يعني النقطة تقع على الخط وكما موضح في الجدول التالي:

الفضاء الاقليدي (Euclidean xyz-space)	المستوي التألفي (the affine plane)
مستقيم يمر من نقطة الاصل وليس واقعا في المستوي xy	نقطة
مستوي يمر من نقطة الاصل عدا المستوي xy	خط
مستقيم يمر من نقطة الاصل يقع في المستوي الذي يمر من نقطة الاصل	نقطة تقع على الخط

الهندسة التألفية المستوية المنتهية The Finite Plane Affine Geometry

المستوي التألفي المنتهي α (The Finite Affine Plane α) هو عبارة عن مجموعة من النقاط موزعة على مجموعة من الخطوط وفقا للفرضيات التالية :

فرضية 1 (Axiom 1) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في المستوي **α** فهنالك بالضبط خط واحد في المستوي **α** يحتويهما .

فرضية 2 (Axiom 2) : هنالك على الاقل نقطتين مختلفتين على كل خط في المستوي **α** .

فرضية 3 (Axiom 3) : هنالك على الاقل خط واحد في المستوي **α** .

فرضية 4 (Axiom 4) : ليست كل نقاط المستوي **α** واقعة على خط واحد في المستوي **α** .

فرضية 5 (Axiom 5) : أي نقطة p لا تقع على خط ما ℓ في المستوي **α** يمر منها خط واحد فقط m يوازي الخط ℓ .

ملاحظة : المستوي التألفي المنتهي α (The Finite Affine Plane α) هو نفسه المستوي التألفي α (Affine Plane α) ولكن المستوي التألفي المنتهي يتكون من مجموعة منتهية من النقاط ومجموعة منتهية من الخطوط .

مبرهنة 1 (Theorem 1) : أي خطين مختلفين في المستوي التألفي المنتهي **α** يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر .

البرهان : (نفس برهان مبرهنة 1 في الهندسة التألفية المستوية) .

مبرهنة 2 (Theorem 2) : في المستوي التألفي المنتهي **α** اذا قطع خط أحد خطين متوازيين فانه يجب أن يقطع الاخر .

البرهان : (نفس برهان مبرهنة 2 في الهندسة التألفية المستوية) .

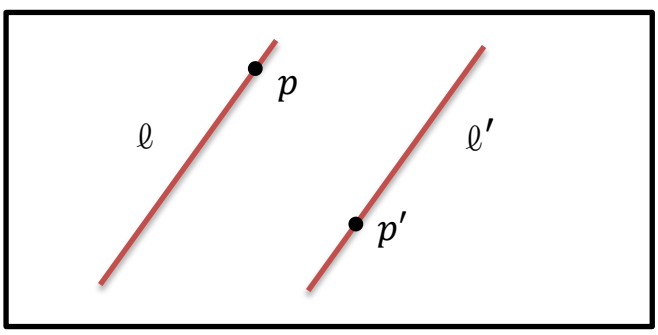
مبرهنة 3 (Theorem 3) : في المستوي التألفي المنتهي **α** الخطان الموازيان لخط واحد يكونان متوازيين .

البرهان : (نفس برهان مبرهنة 3 في الهندسة التألفية المستوية) .

مبرهنة 4 (Theorem 4) : في المستوي التألفي المنتهي **α** ليست جميع الخطوط تمر من نقطة واحدة .

البرهان :

لتكن p أي نقطة في المستوي التألفي المنتهي **α** وليكن ℓ أي خط يمر من p .



α

حسب فرضية 4 (ليست كل نقاط المستوي $\boldsymbol{\alpha}$ واقعة على خط واحد في المستوي $\boldsymbol{\alpha}$) هنالك نقطة p' غير واقعة على ℓ .

حسب فرضية 5 (أي نقطة p لا تقع على خط ما ℓ في المستوي $\boldsymbol{\alpha}$ يمر منها خط واحد فقط m يوازي الخط ℓ) هنالك خط ℓ' يمر من p' يوازي الخط ℓ ، وهذا يعني أن ℓ' لا يمر من p (لان p تقع على ℓ و ℓ' يوازي ℓ) .

اذن ليست جميع الخطوط تمر من النقطة p .

مبرهنة 5 (Theorem 5) : في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ هنالك على الاقل ثلاثة خطوط مختلفة تمر من أي نقطة .

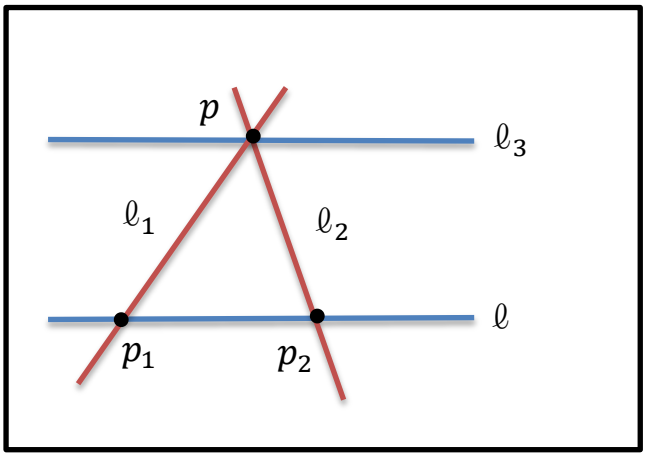
البرهان :

لتكن p أي نقطة ولتكن p_1 أي نقطة أخرى تختلف عن النقطة p في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$.

حسب فرضية 1 (اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في المستوي $\boldsymbol{\alpha}$ فهنالك بالضبط خط واحد في المستوي $\boldsymbol{\alpha}$ يحتويهما) هنالك بالضبط خط واحد ℓ_1 يمر من p و p_1 .

حسب فرضية 4 (ليست كل نقاط المستوي $\boldsymbol{\alpha}$ واقعة على خط واحد في المستوي $\boldsymbol{\alpha}$) هنالك نقطة p_2 لا تقع على ℓ_1 .

اذن $p_2 \neq p$ وكذلك $p_2 \neq p_1$ لان p و p_1 كلاهما يقعان على ℓ_1 بينما p_2 لا تقع على ℓ_1 .



$\boldsymbol{\alpha}$

حسب فرضية 1 (اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في المستوي $\boldsymbol{\alpha}$ فهنالك بالضبط خط واحد في المستوي $\boldsymbol{\alpha}$ يحتويهما) هنالك بالضبط خط واحد ℓ يمر من p_1 و p_2 وكذلك هنالك بالضبط خط واحد ℓ_2 يمر من p و p_2 .

لان p لا تقع على الخط ℓ حسب مبرهنة 1 (أي خطين مختلفين في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر) فحسب فرضية 5 (أي نقطة p لا تقع على خط ما ℓ في المستوي $\boldsymbol{\alpha}$ يمر منها خط واحد فقط m يوازي الخط ℓ) هنالك بالضبط خط واحد ℓ_3 يمر من p يوازي الخط ℓ .

$\ell_1 \neq \ell_2$ لان p_2 تقع على ℓ_2 لكنها لا تقع على ℓ_1 .

$\ell_3 \neq \ell_1$ لان ℓ_3 يوازي ℓ و ℓ_1 يقطع ℓ .

$\ell_3 \neq \ell_2$ لان ℓ_3 يوازي ℓ و ℓ_2 يقطع ℓ .

اذن هنالك على الاقل ثلاثة خطوط مختلفة ℓ_1 و ℓ_2 و ℓ_3 تمر من النقطة p .

مبرهنة 6 (Theorem 6) : في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على أحد الخطوط ℓ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على كل خط .

مبرهنة 7 (Theorem 7) : في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على احد الخطوط ℓ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمر من أي نقطة .

مبرهنة 8 (Theorem 8) : في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن احدى النقاط p فان كل خط تقع عليه بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة .

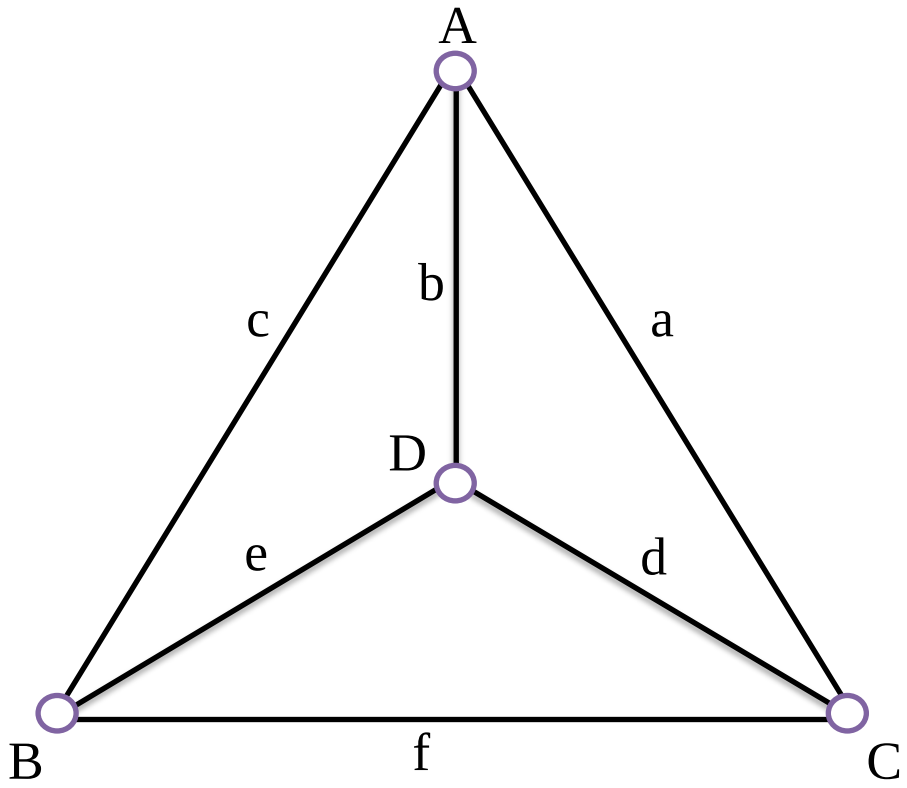
مبرهنة 9 (Theorem 9) : اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على احد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2}$ من النقاط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$.

مبرهنة 10 (Theorem 10) : في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن احدى النقاط p فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن كل نقطة .

مبرهنة 11 (Theorem 11) : اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن احدى النقاط p في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2+n}$ من الخطوط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$.

تعريف (Definition) : رتبة (order) المستوي التألفي المنتهي α تكون n اذا كان هنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على أي خط في المستوي التألفي المنتهي α .

النموذج 1 (model 1) : اذا مثلنا الخطوط (lines) بالخطوط المستقيمة a ، b ، c ، d ، e ، f ومثلنا النقاط (points) بالدوائر الصغيرة A ، B ، C ، D فالشكل المرسوم ادناه سيكون نموذج (model) للمستوي التألفي المنتهي من الرتبة 2 :



النموذج 2 (model 2) : اذا مثلنا الخطوط (lines) بالحروف a ، b ، c ، d ، e ، f والنقاط (points) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 فان الجدول التالي سيكون نموذج (model) للمستوي التألفي المنتهي من الرتبة 2 :

a	b	c	d	e	f
1	1	1	2	2	3
2	3	4	3	4	4

النموذج 3 (model 3) : اذا مثلنا الخطوط (lines) بالحروف a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i ، j ، k ، l والنقاط (points) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 فان الجدول التالي سيكون نموذج (model) للمستوي التألفي المنتهي من الرتبة 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1	4	7	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	5	8	4	5	6	5	6	4	6	4	5
3	6	9	7	8	9	9	7	8	8	9	7

أسئلة محلولة :

س1) اذا كان أحد الخطوط في المستوي التألفي المنتهي α يحتوي بالضبط 5 نقاط مختلفة ، فكم نقطة يحتوي هذا المستوي ؟

الجواب :

نستنتج من مبرهنة 9 (اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على احد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2}$ من النقاط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$) انه يوجد n^2 من النقاط في المستوي التألفي المنتهي حيث أن $\boldsymbol{n = 5}$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n^2 = (5)^2 = 25 .}$$

اذن المستوي التألفي المنتهي هذا يحتوي بالضبط على 25 نقطة .

س2) اذا كان أحد الخطوط في المستوي التألفي المنتهي α يحتوي بالضبط 5 نقاط مختلفة ، فكم خط يحتوي هذا المستوي ؟

الجواب :

لتكن p أي نقطة في المستوي التألفي المنتهي α فحسب مبرهنة 7 (في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على احد الخطوط ℓ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمر من أي نقطة) هنالك بالضبط 6 خطوط تمر من النقطة p لان $n = 5$.

اذن حسب مبرهنة 11 (اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن احدى النقاط p في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2 + n}$ من الخطوط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي

$\boldsymbol{\alpha}$) يكون لدينا n^2+n من الخطوط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي حيث أن $\boldsymbol{n=5}$.

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n^2+n=(5)^2+5=25+5=30}\ .$$

اذن المستوي التألفي المنتهي هذا يحتوي بالضبط على 30 خط .

س3) اذا كانت أحدى النقاط في المستوي التألفي المنتهي α يمر منها بالضبط 7 خطوط مختلفة ، فكم خط يحتوي هذا المستوي ؟

الجواب :

$$\boldsymbol{n+1=7} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n=6}$$

نستنتج من مبرهنة 11 (اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن احدى النقاط p في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2+n}$ من الخطوط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$) انه يوجد n^2+n من الخطوط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي حيث أن $n=6$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n^2+n=(6)^2+6=36+6=42}\ .$$

اذن المستوي التألفي المنتهي هذا يحتوي بالضبط على 42 خط .

س4) اذا كان المستوي التألفي المنتهي α يحتوي على 49 نقطة مختلفة ، فكم عدد النقاط على كل خط في هذا المستوي ؟

الجواب :

نفرض أن هنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي α .

حسب مبرهنة 9 (اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على احد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2}$ من النقاط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$) يكون لدينا عدد النقاط في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{n^2=49}$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n^2-49=0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{(n-7)\,(n+7)=0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n-7=0} \quad \textbf{or} \quad \boldsymbol{n+7=0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n=7} \quad \textbf{or} \quad \boldsymbol{n=-7} \quad \text{(يهمل لان عدد النقاط يجب ان يكون موجب)}$$

اذن هنالك بالضبط 7 نقاط مختلفة على الخط ℓ في المستوي التألفي المنتهي α .

حسب مبرهنة 6 (اذا كان هنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على أحد الخطوط في المستوي α ، فهنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على كل خط في المستوي α) يكون عدد النقاط المختلفة الواقعة على كل خط في المستوي α يساوي 7 .

س5) اذا كان المستوي التألفي المنتهي α يحتوي على 49 نقطة مختلفة ، فكم عدد الخطوط التي تمر من أي نقطة في هذا المستوي ؟

الجواب :

نفرض أن هنالك بالضبط n من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي α .

حسب مبرهنة 9 (اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على احد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2}$ من النقاط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$) يكون لدينا عدد النقاط في المستوي التألفي المنتهي $n^2 = 49$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n^2 - 49 = 0}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{(n-7)\,(n+7) = 0}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n-7 = 0} \quad \textbf{or} \quad \boldsymbol{n+7 = 0}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{n = 7} \quad \textbf{or} \quad \boldsymbol{n = -7}$ (يهمل لان عدد النقاط يجب ان يكون موجب)

اذن هنالك بالضبط 7 نقاط مختلفة على الخط ℓ في المستوي التألفي المنتهي α .

حسب مبرهنة 7 (في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على احد الخطوط ℓ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمر من أي نقطة) يكون لدينا بالضبط $\boldsymbol{n+1 = 8}$ من الخطوط التي تمر من أي نقطة في المستوي α .

س 6) اذا كان أحد الخطوط ℓ_1 في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ يحتوي بالضبط 15 نقطة مختلفة ، وكان ℓ_2 خط اخر في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ، فكم نقطة يحتوي الخط ℓ_2 ؟

الجواب :

بما ان ℓ_1 يحتوي بالضبط 15 نقطة مختلفة فحسب مبرهنة 6 (في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على أحد الخطوط ℓ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على كل خط) يكون هنالك بالضبط 15 نقطة مختلفة على الخط ℓ_2 .

س 7) اذا كان أحد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي α يحتوي بالضبط 12 نقطة مختلفة ، وكانت p هي أي نقطة في المستوي التألفي المنتهي α ، فكم خط يمر من النقطة p ؟

الجواب :

بما أن ℓ يحتوي بالضبط 12 نقطة مختلفة فحسب مبرهنة 7 (في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على أحد الخطوط ℓ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمر من أي نقطة) يكون هنالك بالضبط $\boldsymbol{12+1=13}$ خط مختلف يمر من النقطة p .

س 8) اذا كان لدينا بالضبط 6 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي التألفي المنتهي α وكان ℓ هو أحد الخطوط في المستوي التألفي المنتهي α ، فكم عدد النقاط التي تقع على الخط ℓ ؟

الجواب :

بما أن p يمر منها بالضبط 6 خطوط مختلفة فان $\boldsymbol{n+1=6} \Leftarrow \boldsymbol{n=5}$.

اذن حسب مبرهنة 8 (في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن احدى النقاط p فان كل خط تقع عليه بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة) يكون هنالك بالضبط 5 نقاط مختلفة تقع على الخط ℓ .

س 9) اذا كان لدينا بالضبط 8 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p_1 في المستوي التألفي المنتهي α وكانت p_2 نقطة أخرى في المستوي التألفي المنتهي α ، فكم خط يمر من النقطة p_2 ؟

الجواب :

بما ان p_1 يمر منها بالضبط 8 خطوط مختلفة فحسب مبرهنة 10 (في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن احدى النقاط p فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن كل نقطة) يكون هنالك بالضبط 8 خطوط مختلفة تمر من النقطة p_2 .

س 10) اذا كان لدينا بالضبط 7 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي التألفي المنتهي α ، فكم عدد الخطوط في المستوي التألفي المنتهي α ؟

الجواب :

بما ان p يمر منها بالضبط 7 خطوط مختلفة فان $\boldsymbol{n+1=7} \Leftarrow \boldsymbol{n=6}$.
اذن حسب مبرهنة 11 (اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n+1}$ من الخطوط المختلفة تمرمن احدى النقاط p في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2+n}$ من الخطوط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$) يكون هنالك $\boldsymbol{n^2+n=6^2+6=36+6=42}$ من الخطوط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$.

س 11) اذا كان لدينا بالضبط 15 نقطة مختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ، فكم عدد النقاط في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ؟

الجواب :

بما ان هنالك 15 نقطة مختلفة على الخط ℓ فحسب مبرهنة 9 (اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على احد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2}$ من النقاط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$) يكون هنالك بالضبط $\boldsymbol{(15)^2=225}$ نقطة مختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$.

س 12) اذا كان لدينا بالضبط 81 نقطة مختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ، فما هي رتبة المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ؟

الجواب :

نفرض أن هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فحسب مبرهنة 9 (اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة تقع على احد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ فان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n^2}$ من النقاط المختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$) يكون لدينا $\boldsymbol{n^2=81}$

$\boldsymbol{n^2=81 \Rightarrow n=9 \quad \text{or} \quad n=-9}$ (يهمل لان عدد النقاط يجب ان يكون موجب)

اذن يكون هنالك بالضبط 9 نقاط مختلفة على الخط ℓ .

حسب التعريف (رتبة (order) المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ تكون $\boldsymbol{n}$ اذا كان هنالك بالضبط $\boldsymbol{n}$ من النقاط المختلفة على أي خط في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$) تكون رتبة المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ هي 9 .

تمارين (Exercises) :

س1) اذا كان أحد الخطوط في المستوي التألفي المنتهي α يحتوي بالضبط 7 نقاط مختلفة ، فكم نقطة يحتوي هذا المستوي ؟

س2) اذا كان أحد الخطوط في المستوي التألفي المنتهي α يحتوي بالضبط 7 نقاط مختلفة ، فكم خط يحتوي هذا المستوي ؟

س3) اذا كانت أحدى النقاط في المستوي التألفي المنتهي α يمر منها بالضبط 9 خطوط مختلفة ، فكم خط يحتوي هذا المستوي ؟

س4) اذا كان المستوي التألفي المنتهي α يحتوي على 36 نقطة مختلفة ، فكم عدد النقاط على كل خط في هذا المستوي ؟

س5) اذا كان المستوي التألفي المنتهي α يحتوي على 36 نقطة مختلفة ، فكم عدد الخطوط التي تمر من أي نقطة في هذا المستوي ؟

س 6) اذا كان أحد الخطوط ℓ_1 في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ يحتوي بالضبط 13 نقطة مختلفة ، وكان ℓ_2 خط اخر في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ، فكم نقطة يحتوي الخط ℓ_2 ؟

س 7) اذا كان أحد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي α يحتوي بالضبط 13 نقطة مختلفة ، وكانت p هي أي نقطة في المستوي التألفي المنتهي α ، فكم خط يمر من النقطة p ؟

س 8) اذا كان لدينا بالضبط 8 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي التألفي المنتهي α وكان ℓ هو أحد الخطوط في المستوي التألفي المنتهي α ، فكم عدد النقاط التي تقع على الخط ℓ ؟

س 9) اذا كان لدينا بالضبط 10 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p_1 في المستوي التألفي المنتهي α وكانت p_2 نقطة أخرى في المستوي التألفي المنتهي α ، فكم خط يمر من النقطة p_2 ؟

س 10) اذا كان لدينا بالضبط 5 خطوط مختلفة تمر من أحدى النقاط p في المستوي التألفي المنتهي α ، فكم عدد الخطوط في المستوي التألفي المنتهي α ؟

س 11) اذا كان لدينا بالضبط 11 نقطة مختلفة على أحد الخطوط ℓ في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ، فكم عدد النقاط في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ؟

س 12) اذا كان لدينا بالضبط 100 نقطة مختلفة في المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ، فما هي رتبة المستوي التألفي المنتهي $\boldsymbol{\alpha}$ ؟

3) هندسة فانو Fano's Geometry

نظام فانو الفرضي (The Fano's Axiomatic System) يتكون من مجموعة من النقاط موزعة على مجموعة من الخطوط وفقا للفرضيات التالية :

فرضية 1 (Axiom 1) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في نظام فانو فهنالك بالضبط خط واحد يحتويهما .

فرضية 2 (Axiom 2) : اذا كان ℓ_1 و ℓ_2 خطين مختلفين في نظام فانو فهنالك على الاقل نقطة واحدة واقعة عليهما .

فرضية 3 (Axiom 3) : هنالك على الاقل خط واحد في نظام فانو .

فرضية 4 (Axiom 4) : هنالك بالضبط ثلاثة نقاط مختلفة على كل خط في نظام فانو .

فرضية 5 (Axiom 5) : في نظام فانو ليست كل النقاط واقعة على خط واحد .

مبرهنة 1 (Theorem 1) : اذا كان ℓ_1 و ℓ_2 خطين مختلفين في نظام فانو فهنالك على الاكثر نقطة واحدة واقعة عليهما .

ملاحظة :

من مبرهنة 1 وفرضية 2 نستنتج ان كل خطين مختلفين في نظام فانو يتقاطعان في نقطة واحدة فقط .

مبرهنة 2 (Theorem 2) : في نظام فانو هنالك بالضبط ثلاثة خطوط مختلفة تمر من أي نقطة p .

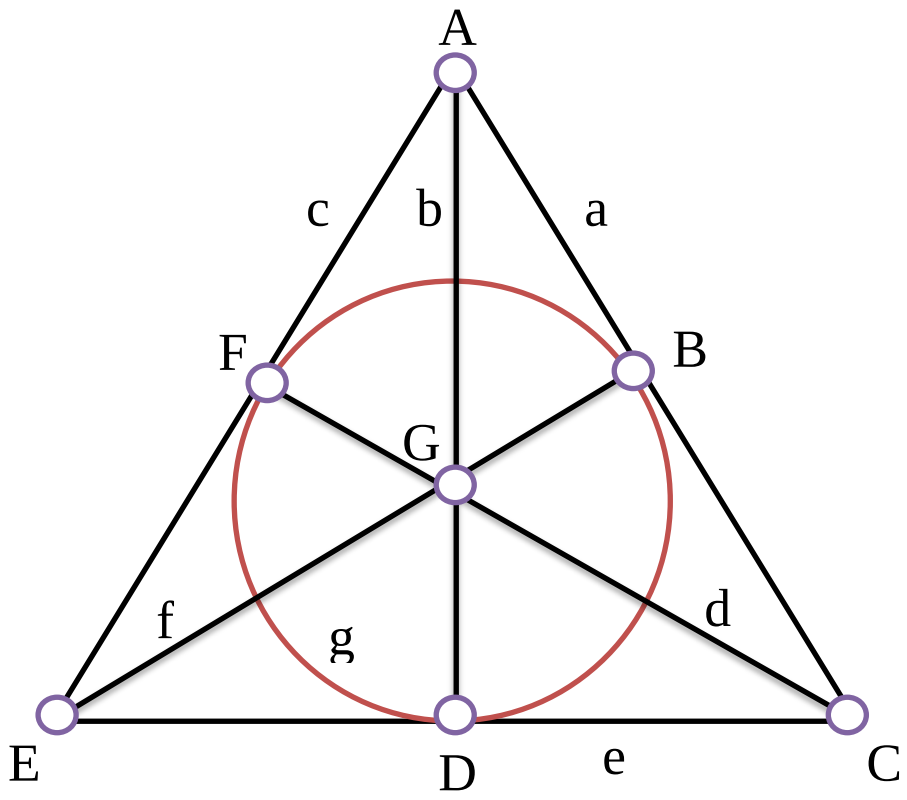
مبرهنة 3 (Theorem 3) : هنالك بالضبط 7 نقاط مختلفة في نظام فانو .

مبرهنة 4 (Theorem 4) : هنالك بالضبط 7 خطوط مختلفة في نظام فانو .

ملاحظة : نظام فانو هو مستوي اسقاطي منتهي من الرتبة 2 .

النموذج 1 (model 1) :

اذا مثلنا الخطوط (lines) بالخطوط المستقيمة a ، b ، c ، d ، e ، f والدائرة g ومثلنا النقاط (points) بالدوائر الصغيرة A ، B ، C ، D ، E ، F ، G فالشكل المرسوم ادناه سيكون نموذج (model) لنظام فانو الفرضي :



النموذج 2 (model 2) :

اذا مثلنا الخطوط (lines) بالحروف a ، b ، c ، d ، e ، f ، g والنقاط (points) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 فان الجدول التالي سيكون نموذج (model) لنظام فانو الفرضي :

a	b	c	d	e	f	g
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

4) هندسة يونك Young's Geometry

نظام يونك الفرضي (The Young's Axiomatic System) يتكون من مجموعة من النقاط موزعة على مجموعة من الخطوط وفقا للفرضيات التالية :

فرضية 1 (Axiom 1) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين في نظام يونك فهنالك بالضبط خط واحد يحتويهما .

فرضية 2 (Axiom 2) : في نظام يونك هنالك بالضبط ثلاث نقاط مختلفة على كل خط .

فرضية 3 (Axiom 3) : هنالك على الاقل خط واحد في نظام يونك .

فرضية 4 (Axiom 4) : ليست كل النقاط واقعة على خط واحد في نظام يونك .

فرضية 5 (Axiom 5) : في نظام يونك أي نقطة p لا تقع على خط ما ℓ يمر منها خط واحد فقط m يوازي الخط ℓ .

تعريف (Definition) : أي خطين مختلفين يقال عنهما أنهما متوازيان اذا لم يشتركان بأي نقطة .

مبرهنة 1 (Theorem 1) : أي خطين مختلفين في نظام يونك يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر .

مبرهنة 2 (Theorem 2) : في نظام يونك اذا قطع خط أحد خطين متوازيين فانه يجب أن يقطع الاخر .

مبرهنة 3 (Theorem 3) : في نظام يونك الخطان الموازيان لخط واحد يكونان متوازيين .

مبرهنة 4 (Theorem 4) : في نظام يونك هنالك بالضبط **4** خطوط مختلفة تمر من أي نقطة .

مبرهنة 5 (Theorem 5) : في نظام يونك هنالك بالضبط **9** نقاط مختلفة .

مبرهنة 6 (Theorem 6) : في نظام يونك هنالك بالضبط **12** خط مختلف .

ملاحظة : نظام يونك هو مستوي تألفي منتهي من الرتبة **3** .

النموذج 1 (model 1) :

اذا مثلنا الخطوط (lines) بالحروف a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i ، j ، k ، l والنقاط (points) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 فان الجدول التالي سيكون نموذج (model) لنظام يونك الفرضي :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1	4	7	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	5	8	4	5	6	5	6	4	6	4	5
3	6	9	7	8	9	9	7	8	8	9	7

الفصل الثاني

خواص أنظمة الفرضيات

Properties of the Axiomatic Systems

أي نظام فرضيات هنالك ثلاثة خواص مهمة يتصف بها وهي :

١) الاتساق (Consistency)
٢) الاستقلال (Independence)
٣) التمام (Completeness)

الاتساق (Consistency) :

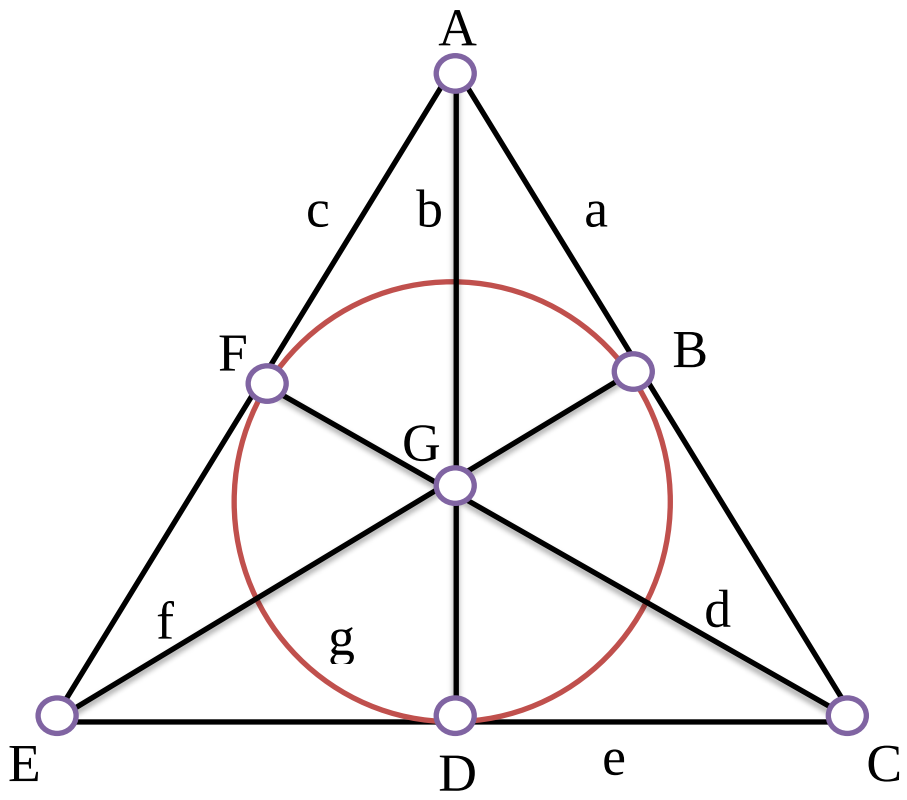
تعريف الاتساق : النظام الفرضي يكون متسقا اذا لم يكن هنالك تناقض في النظام . أي ليس هنالك تناقض بين أي فرضيتين أو أي مبرهنة وأي فرضية أو أي مبرهنتين في النظام الفرضي . بمعنى اخر ليس هنالك جملة (**P**) ونقيضها الجملة (**P**~) في النظام الفرضي .

لذا نستنتج من تعريف الاتساق للنظام الفرضي أن النظام الفرضي يكون متسقا اذا استطعنا ان نجد له نموذج بينما يكون النظام الفرضي غير متسقا عندما لا يمكن ان نجد له نموذج .

مثال 1 (Example 1) : نظام فانو الفرضي (الموجودة في صفحة 30 وصفحة 31) يكون نظاما متسقا لان نظام فانو الفرضي له النموذج التالي :

نموذج لنظام فانو الفرضي :

اذا مثلنا الخطوط (lines) بالخطوط المستقيمة a ، b ، c ، d ، e ، f والدائرة g ومثلنا النقاط (points) بالدوائر الصغيرة A ، B ، C ، D ، E ، F ، G فالشكل المرسوم ادناه سيكون نموذج (model) لنظام فانو الفرضي :



مثال 2 (Example 2) : نظام يونك الفرضي (الموجودة في صفحة 32 وصفحة 33) يكون نظاما متسقا لان نظام يونك الفرضي له النموذج التالي :

نموذج لنظام يونك الفرضي :

اذا مثلنا الخطوط (lines) بالحروف a ، b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i ، j ، k ، l والنقاط (points) بالاعداد الصحيحة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 فان الجدول التالي سيكون نموذج (model) لنظام يونك الفرضي :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
1	4	7	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	5	8	4	5	6	5	6	4	6	4	5
3	6	9	7	8	9	9	7	8	8	9	7

ملاحظة : نظام المستوي الاسقاطي ونظام المستوي التألفي هما نظامين متسقين لان لكل واحد منهما نماذج.

مثال 3 (Example 3) : في النظام الفرضي التالي :

لدينا مجموعة من النقاط موزعة على مجموعة من الخطوط وفقا للفرضيات التالية :

فرضية 1 (Axiom 1) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين فهنالك بالضبط خط يحتويهما .

فرضية 2 (Axiom 2) : هنالك بالضبط ثلاث نقاط مختلفة على كل خط .

فرضية 3 (Axiom 3) : هنالك على الاقل خط واحد في النظام .

فرضية 4 (Axiom 4) : ليست كل نقاط النظام واقعة على خط واحد .

فرضية 5 (Axiom 5) : أي نقطة p لا تقع على خط ما ℓ يمر منها خط واحد فقط m يوازي الخط ℓ.

فرضية 6 (Axiom 6) : هنالك بالضبط ثلاث خطوط مختلفة تمر من كل نقطة .

من الفرضيات 1 و 2 و 3 و 4 و 5 (التي هي فرضيات نظام يونك) نستنتج المبرهنة التالية (التي هي مبرهنة 4 في نظام يونك) :

مبرهنة 1 (Theorem 1) : هنالك بالضبط **4** خطوط مختلفة تمر من أي نقطة .

أصبح لدينا الفرضية 6 ومبرهنة 1 متناقضتين (أي اننا لا يمكن أن نجد نموذج لهذا النظام) لذا يكون هذا النظام غير متسق .

مثال 4 (Example 4) : في النظام الفرضي التالي :

لدينا مجموعة من النقاط موزعة على مجموعة من الخطوط وفقا للفرضيات التالية :

فرضية 1 (Axiom 1) : اذا كانت p_1 و p_2 نقطتين مختلفتين فهنالك بالضبط خط واحد يحتويهما.

فرضية 2 (Axiom 2) : اذا كان ℓ_1 و ℓ_2 خطين مختلفين فهنالك بالضبط نقطة واحدة واقعة عليهما.

فرضية 3 (Axiom 3) : هنالك على الاقل خط واحد في النظام .

فرضية 4 (Axiom 4) : هنالك بالضبط ثلاثة نقاط مختلفة على كل خط .

فرضية 5 (Axiom 5) : ليست كل نقاط النظام واقعة على خط واحد .

فرضية 6 (Axiom 6) : أي نقطة p لا تقع على خط ما ℓ يمر منها خط واحد فقط m يوازي الخط ℓ.

من الفرضيات 3 و 5 و 6 نستنتج المبرهنة التالية :

مبرهنة 1 (Theorem 1) : هنالك خطين ℓ_1 و ℓ_2 لا تقع عليهما أي نقطة .

البرهان :

حسب فرضية 3 نفرض ان ℓ_1 أي خط في النظام .

حسب فرضية 5 هنالك نقطة ولتكن p ليست واقعة على الخط ℓ_1 .

حسب فرضية 6 هنالك خط ℓ_2 يمر من p يوازي ℓ_1 .

اذن هنالك خطين ℓ_1 و ℓ_2 لا تقع عليهما أي نقطة .

أصبح لدينا الفرضية 2 ومبرهنة 1 متناقضتين (أي اننا لا يمكن أن نجد نموذج لهذا النظام) لذا يكون هذا النظام غير متسق .

الاستقلال (Independence) :

تعريف الاستقلال للفرضيات : أي فرضية لا يمكن إستنتاجها من بقية الفرضيات في النظام الفرضي تدعى فرضية مستقلة (Independent Axiom) عن باقي الفرضيات (أي أن الفرضية التي لا يمكن اعتبارها مبرهنة في النظام الفرضي تدعى فرضية مستقلة) .

تعريف الاستقلال للنظام الفرضي : النظام الفرضي يدعى مستقلا (Independent Axiomatic System) إذا كانت كل فرضية من فرضياته مستقلة عن باقي الفرضيات .

طريقة اختبار الاستقلال :

إذا كان نظام الفرضيات متسقا فان هنالك نموذج له . فعندما نبدل أي فرضية (المراد إختبار استقلالها) بنفي منطوقها ووجدنا للنظام الجديد نموذج فان الفرضية المراد إختبارها تكون مستقلة .

لإختبار إستقلالية النظام الفرضي علينا إختبار إستقلالية كل فرضية من فرضياته .