الهندسة الهذولية
Hyperbolic Geometry

لقد تمكن العالمان جون بوليا ولوباجفسكي من بناء الهندسة الهذولية وذلك بأخذ نقيض البديهية الخامسة لاقليدس في شكل ما.
بما ان بديهية بليفر هي احدى مكافئات البديهية الخامسة فأن النقيض يكون بالشكل التالي

من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم اكثر من موازي واحد لا يقطع المستقيم المعلوم .

بديهية التوازي الهذولية Hpp

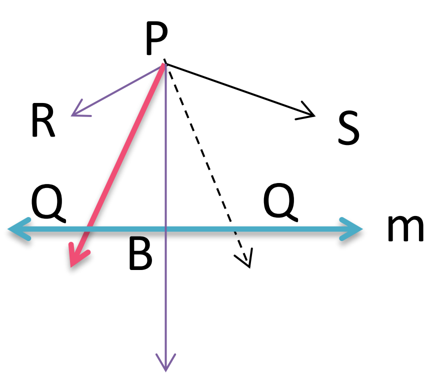
اذا كانت P نقطة لا تقع على مستقيم معلوم m فانه يوجد شعاعان فقط وليكن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ بحيث ان :

1. $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ شعاعين غير متعاكسين .
2. $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ لا يقطعان m .
3. اي شعاع $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m اذا وفقط اذا $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$.
4. كل من الشعاعين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ المذكورين في Hpp يدعى موازي الى m من p .

مبرهنة (67) :

في الهندسة الهذلولية اذا كان الشعاع يقع بين شعاع موازي لمستقيم معلوم وشعاع يقطع المستقيم المعلوم فأنه يقطع المستقيم المعلوم .

البرهان :



ليكن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ شعاعين يوازيان خط m من نقطة P . وان B اي نقطة على m و $\overrightarrow{PQ}$ اي شعاع يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$ يجب ان نبرهن ان $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m.

بما ان $\overrightarrow{PB}$ قطع m فإن من Hpp ، $\overrightarrow{PB}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$
وبما ان $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$ اذن $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$
ومن Hpp، $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m وبالمثل اذا كان $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PS}$ و $\overrightarrow{PB}$.

<u>مبرهنة (68) :</u>

في الهندسة الهذلولية اذا كان $\overrightarrow{PQ}$ لا يقطع مستقيم m واي شعاع يقع بين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PB}$ يقطع m حيث ان نقطة B نقطة على m فإن $\overrightarrow{PQ}$ يوازي المستقيم m.

<u>المعطيات :</u>

1. $\overrightarrow{PQ}$ لا يقطع مستقيم m
2. اي شعاع يقع بين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PB}$ يقطع m
3. B نقطة على m

<u>المطلوب اثباته :</u> $\overrightarrow{PQ}$ يوازي المستقيم m.

<u>البرهان:</u>

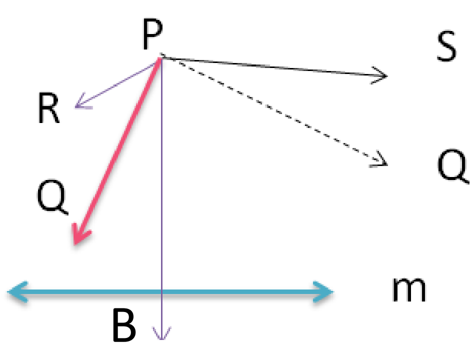
ليكن m مستقيماً، P نقطة لا تقع على m و $\overrightarrow{PQ}$شعاع لا يقطع m.

من Hpp $\longleftarrow$ يوجد شعاعان $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ يوازيان m من P.

(من المعطيات (1) Q لا تقع على m) و لا تقع على$\overrightarrow{PB}$

(اذا Q تقع على $\overrightarrow{PB}$ فان $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m وهاذا تناقض لان من معطيات 1 $\overrightarrow{PQ}$ لا يقطع)

Q تقع في احدى جهتي $\overrightarrow{PB}$ اما جهة R او S



(نفرض ان Q تقع في جهة R)

اما

1. $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$ او
2. $\overrightarrow{PR}$ يقع بين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PB}$ او
3. $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ}$

(1) اذا كان $\overrightarrow{PQ}$ يقع بين $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PB}$

من مبرهنة (67) $\overrightarrow{PQ}$ يقطع m وهذا مخالف الفرض (1) كون $\overrightarrow{PQ}$ لا يقطع مستقيم m .

(2) اذا كان $\overrightarrow{PR}$ يقع بين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PB}$

$\Leftarrow$ من المعطيات (2) اي شعاع يقع بين $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PB}$ يقطع m

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{PR}$ يقطع m وهاذا تناقض (كون $\overrightarrow{PR}$ موازي لل m)

(3) اذا كان $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ}$ اذن $\overrightarrow{PQ}$ يوازي m .

وبنفس الطريقة اذا كانت Q في جهة $\overrightarrow{PB}$ التي تحتوي على S.

<u>مبرهنة (69) :</u> في الهندسة الهذلولية اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة P على مستقيم معلوم m و $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ الموازيان من P الى m فإن $<SPQ\cong <RPQ$

<u>مبرهنة (70) :</u> في الهندسة الهذلولية اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة P على مستقيم معلوم m و $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ هما الشعاعان الموازيان للمستقيم m من P فإن $<RPQ$ و $<SPQ$ زاويتان حادتان .

<u>البرهان:</u>

من مبرهنة (69) في الهندسة الهذلولية

اذا كانت نقطة Q هي اثر العمود النازل من نقطة P على مستقيم معلوم m و $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ الموازيان من P الى m فإن ($<SPQ\cong <RPQ$)

(حالة 1)

نفرض انهما زاويتان قائمتان (فإن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PS}$ شعاعان متعاكسان وهذا يناقض Hpp).

(حالة 2)

اذا كانتا زاويتين منفرجتين فإنه يوجد شعاع $\overrightarrow{PE}$ في داخل $<SPQ$ او $<RPQ$ يصنع زاوية قائمة

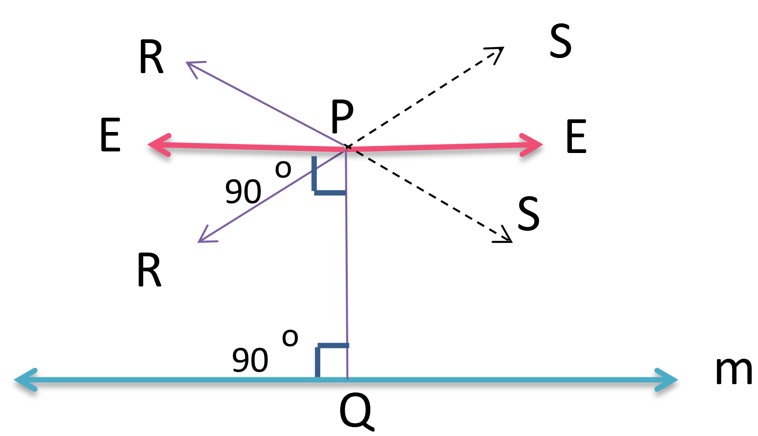
من مبرهنة (67) في الهندسة الهذلولية اذا كان الشعاع يقع بين شعاع موازي لمستقيم معلوم وشعاع يقطع المستقيم المعلوم فأنه يقطع المستقيم المعلوم .

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{PE}$ يقطع m

ومن مبرهنة (اذا قطع مستقيمين m و $\overrightarrow{PE}$ بقاطع $\overrightarrow{PQ}$ وكانت الزاويتان الداخليتان في نفس الجهة من القاطع متكاملتين {مجموعهما 180 درجة} فإن المستقيمين $\overrightarrow{PE}$ و m لا يتقاطعان).

$\longleftarrow$ $\overrightarrow{PE}$ لا يقطع m وهاذا تناقض .

(حالة 3) لذلك فإن الزاويتين يجب ان تكونا حادتين.



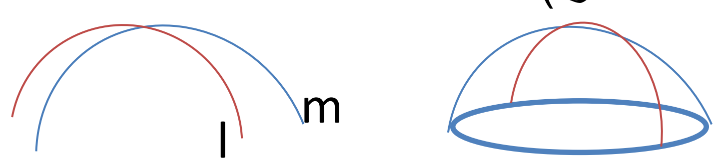
الهندسة الاهليليجية
Elliptic Geometry

البديهيات المميزة للهندسة
1- الاقليدية : من نقطة معلومة يمكن رسم موازي واحد فقط لمستقيم معلوم.
2- المستوية الهذلولية : يوجود اكثر من موازي واحد للمستقيم من نقطة معلومة
3- الاهليجية : لايمكن رسم خط من نقطة معلومة ويوازي خطا معلوما .

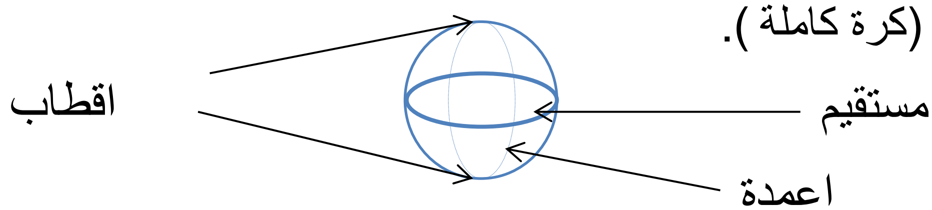
ان اول من اشار الى البديهية 3 التي هي تناقض بديهية التوازي لأقليدس هو العالم الالماني برنهارد ريمان في عام 1853.
تكون الكرة نموذج لهذه الهندسة حيث نقاط الكرة ودوائرها العظمى تمثل نقاط او مستقيمات هذه الهندسة.
وبما ان الدوائر العظمى تتقاطع دائما فأن المستقيمين يتقاطعان دائما ولذلك لا توجد مستقيمات موازية للمستقيم .

أنواع الهندسة الاهليليجة:

1. الهندسة الاهليليجة الأحادية *Single Elliptic Geometry* (نصف الكرة).



2. الهندسة الاهليليجة المزدوجة *Double Elliptic Geometry* (كرة كاملة).



*جاءت التسمية احادي ومزدوجة من الحقيقة بأن اي مستقيمين يتقاطعان بنقطتين في الهندسه الاهليجيه المزدوجة وفي نقطة واحدة فقط في الهندسة الأهليجية الأحادية .

مبرهنة (71) :

في الهندسة الاهليجية العمودان على نفس المستقيم يتقاطعان في نقطة.

البرهان:

نستنتج من هذه المبرهنة من البديهية المميزة لهذه الهندسة حيث ان الخطين في المستوي يتقاطعان دائما.

** من المناسب ان نفكر بأن سطح الارض هو كرة تامة . خطوط الطول هي نماذج للخطوط العمودية على خط الاستواء وبما ان كل هذه الخطوط تتقاطع في القطبين الشمالي والجنوبي توضحها في المبرهنة التالية.

مبرهنة (72) :

في الهندسة الاهليجية مجموع زاوية المثلث هو اكبر من 180°

البرهان:

α

لتكن B,C نقطتين مختلفتين على مستقيم L نرسم

مستقيمين عموديين على L في C و B

$\Leftarrow$ تتكون زاويتين قائمتين في C و B

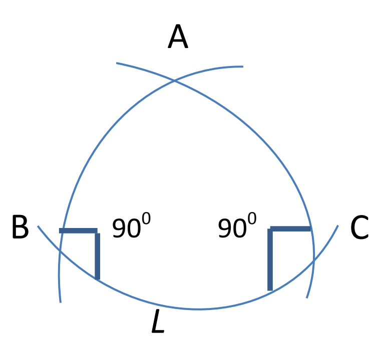
من مبرهنة 71 في الهندسة الاهليجية العمودان

على نفس المستقيم يتقاطعان في نقطة

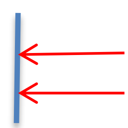
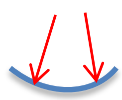
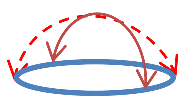
اذن يتقاطع المستقيمان في نقطة A و تتكون زاوية لتكن α .

ولذلك مجموع زوايا المثلث ABC هو اكبر من $180°$

$\alpha + 90+90 = \alpha +180>180$.



جدول لمقارنة الهندسية الاقليدية والهندسية اللاأقليدية

		الاقليدية	الهذولولية	الأهليجية
1	يتقاطع المستقيمان في	نقطة واحدة على الاكثر	نقطة واحدة على الاكثر	نقطة واحدة(الاحادية)نقطتان (المزدوجة)
2	ليكن مستقيم LوP نقطة لا تقع على L فأنه	يوجد موازي واحد وواحد فقط للمستقيم L من P	يوجد اكثر من موازي للمستقيم L منP	لا يوجد موازي الى L من P
3	يفصل المستقيم الى نصفين	بواسطة نقطة	بواسطة نقطة	لا ينفصل
4	اذا قطع مستقيم واحد مستقيمين متوازيين فأنه	يقطع الاخر	قد يقطع أو لا يقطع	لا يوجد توازي اصلا
5	عمودان على نفس المستقيم يكونان	متوازيين 	غير متوازيين 	متقاطعان 
6	مجموع زوايا المثلث	يساوي زاويتان قائمتان	أقل من زاويتان قائمتان	اكثر من زاويتان قائمتان