الفصل الخامس – التطابق و المقارنة

بديهية(1 *) (بديهية إ نشاء قطعة)

لتكن $A-B$ قطعة، C نقطة على الخط m فإنه كل شعاع على m نقطة بدايته C توجد نقطة واحدة فقط D بحيث أن $A-B=C-D$

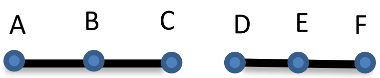
بديهية (2 *) (تطابق القطع هو علاقة تكافؤ)

نستنتج من هذه البديهية أن كل قطعة تطابق نفسها . وإذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية فإن الثانية تطابق الأولى. وإذا كانت القطعة الاولى تطابق قطعة ثانية والقطعة الثانية تطابق قطعة ثالثة فإنه الأولى تطابق الثالثة.

بديهية (3 *) (جمع القطع):

إذا كان $A–B–C$ و $D–E–F$ و $A–B \cong D–E$ و $B–C \cong E–F$

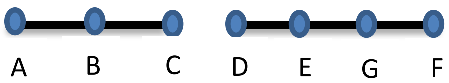
فإن $A–C \cong D–F$



مبرهنة (43) (طرح القطع):

إذا كان $A-B-C$ و $D-E-F$ و $A-B \cong D-E$ و $A-C \cong D-F$ فإن $B-C \cong E-F$.

المعطيات :



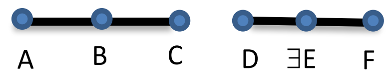
المطلوب اثباته :

البرهان: نفرض أن $B-C$ لا تطابق $E-F$ فإنه من بديهية (1 *) توجد نقطة G بحيث أن $D-E-G$ و $B-C \cong E-G$

كذلك بما أن $B-C$ لا تطابق $E-F$ فإنه من بديهية (2 *) نستنتج أن $E-F$ لا تطابق $E-G$ ومن هذا $F \neq G$ لكن بما أن $A-B \cong D-E$ ، $B-C \cong E-$ G فإنه من بديهية (3 *) $A-C \cong D-G$ ولكن من الفرض ان $A-C \cong D-$ F فيكون من بديهية (2 *) $D-F \cong D-G$ ومن البديهيتين (1 *) و(2 *)

نستنتج ان $G = F$ وهذا يقودنا إلى تناقض، لذلك فإن فرضيتنا خاطئة وبذلك نستنتج أن $B - C \cong E - F$.

مبرهنة (44) إذا كان $A - C \cong D - F$, B نقطة بحيث أن $A - B - C$ فإنه توجد نقطة E بحيث أن $D - E - F$, $A - B \cong D - E$.



مقارنة القطع

تعريف (20): $A - B$ تكون أصغر من $C - D$ إذا وجدت نقطة E بحيث أن $C - E - D$ و $A - B \cong C - E$ (يرمز للعبارة $A - B$ أصغر من $C - D$ بالرمز $A - B < C - D$) .

مبرهنة: (45):

إذا كانت $A - B$ و $C - D$ أي قطعتين فإن تتحقق واحدة فقط مما يأتي :

$C - D < A - B$ او $A - B \cong C - D$ او $A - B < C - D$

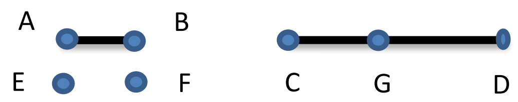
مبرهنة (46).

إذا كان $A - B < C - D$ و $A - B \cong E - F$ فإن $E - F < C - D$.

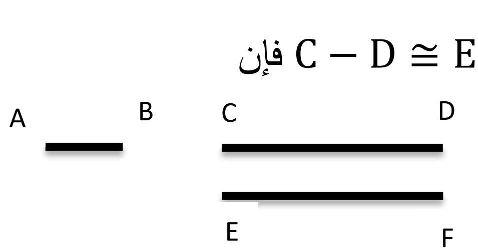
المعطيات :

المطلوب اثباته :

البرهان: بما أن $A - B < C - D$ فإنه توجد G بحيث أن $C - G - D$ و $A - B \cong C - G$ بما أنه من الفرض $A - B \cong E - F$ فإنه من بديهية $(*2)$ $C - G \cong E - F$ لذلك من تعريف (20) يكون $E - F < C - D$.



مبرهنة: (47): إذا كان $A - B < C - D$ و $C - D \cong E - F$ فإن $A - B < E - F$.



المعطيات :

المطلوب اثباته :

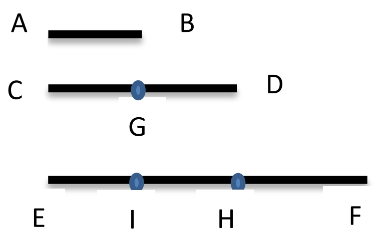
البرهان: من تعريف (20) توجد نقطة G بحيث أن $C-G-D$ و$A-B \cong C-G$ من مبرهنة (44) توجد نقطة H بحيث ان $E-H-F$ و $E-H \cong C-G$ بما ان $A-B \cong C-G$ فإنه من بديهية (*2) $A-B \cong E-H$ لذلك فإن $A-B < E-F$.

مبرهنة: (48): إذا كان $A-B < C-D$ و $C-D < E-F$ فإن $A-B < E-F$.

المعطيات :

المطلوب اثباته :

البرهان: بما أن $A-B < C-D$ فإنه توجد نقطة G بحيث إن $C-G-D$ و $A-B \cong C-G$ بما أن $C-D < E-F$ فإنه توجد نقطة H بحيث أن $E-H-F$ و $E-H \cong C-D$ ومن مبرهنة (47) نستنتج ان $A-B < E-H$ لذلك توجد نقطة I بحيث أن $E-I-H$ و$E-I \cong A-B$
بما أن $E-H-F$, $E-I-H$ فإنه من مبرهنة (4 الفصل الرابع) $E-I-H-F$ لذلك $E-I-F$ وبذلك يكون $A-B < E-F$.



تطابق الزوايا والمثلثات

بديهية(4*): (بديهية إنشاء زاوية):

لتكن ABC زاوية وليكن DF شعاعاً على الخط m فإنه في كل جهة من m يوجد شعاع واحد فقط $\overrightarrow{DE}$ بحيث $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$.

بديهية (5*): تطابق الزوايا هو علاقة تكافؤ.

بديهية (6*): في المثلثين ABC و DEF إذا كان $A-B \cong D-E$

و $A-C \cong D-F$ و $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ فإن $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ و $\measuredangle C \cong \measuredangle F$.

تعريف (21): ليكن ABC و XYZ مثلثين إذا وجد تناظر بحيث أن

$$A-B \cong X-Y \qquad \measuredangle A \cong \measuredangle X$$
$$B-C \cong Y-Z \qquad \measuredangle B \cong \measuredangle Y$$
$$A-C \cong X-Z \qquad \measuredangle C \cong \measuredangle Z$$

فإن هذا التناظر يدعى تناظر متطابق ويقال عن المثلثين متطابقان.

مبرهنة (49) (SAS):

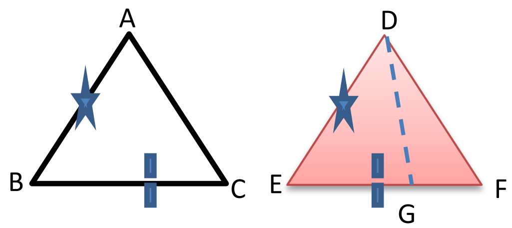
إذا كان ضلعان والزاوية المحددة بهما في مثلث تطابق ضلعين والزاوية المحددة بهما من مثلث آخر فإن المثلثين يتطابقان .

بعبارة أخرة إذا كان في مثلثين $ABC . DEF$

$A-B \cong D-E , A-C \cong D-F , \measuredangle A \cong \measuredangle D$ فإن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

المعطيات :

المطلوب اثباته :



البرهان: من بديهية $(6^*) \leftarrow \measuredangle B \cong \measuredangle E$

و $\measuredangle C \cong \measuredangle F$ كل ما نحتاجه من تعريف (21)

أن نبرهن إن $B-C \cong E-F$ نفرض ان العبارة

خطأ. من مبرهنة (45) أما $B-C < E-F$ أو $E-F < B-C$

نفرض أن $B-C < E-F$

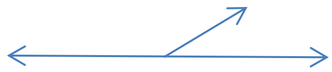
من تعريف (20) توجد نقطة G بحيث إن $B-C \cong E-G$

في المثلثين ABC و DEF من بديهية (6^*) نستنتج ان $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDG$ ولكن من الفرض $\measuredangle BAC \cong \measuredangle EDF$ لذلك من بديهية (2^*) نستنتج ان $DG = DF$ أي إن $F = G$ وهذا تناقض لان $F \neq G$

لذلك فإن الفرض بأن $B-C < E-F$ يؤدي إلى تناقض وبنفس الطريقة في الحالة الثانية

لذلك فإن $B-C \cong E-F$ وإن $\Delta BAC \cong \Delta EDF$

تعريف (22): زاويتان لهما ضلع مشترك وضلعيهما الآخرين يكونان شعاعين متعاكسين يقال عنهما تكونان زوجاً خطياً.



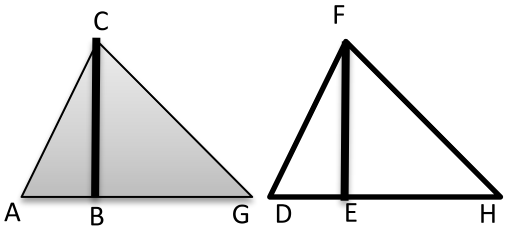
تعريف(23): زاويتان تطابقان على التوالي زاويتين لزوج خطي يقال عنهما متكاملتين أحدهما مكملة للأخرى.

من هذا التعريف ومن بديهة (5*) نستنتج المبرهنة التالية:

مبرهنة(50):إذا كانت زاويتان تكونان زوجاً خطياً فإنهما متكاملتان.

مبرهنة (51): إذا كانت زاويتان متطابقتين فإنه تتطابق كذلك الزاويتان اللتان تكونان معهما على التوالي زوجين خطيين. (تتطابق الزاويتان المكملتان)

البرهان: لتكن $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle ABC$ من بديهية (9) توجد نقطة G بحيث ان $A-B-G$ وتوجد نقطة H بحيث أن $D-E-H$ لذا يكون الشعاعان BG, BA متعاكسين وكذلك الشعاعان $\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{ED}$ وتكونان الزاويتان FEH, GBC نختار النقاط F, H, D بطريقة لا تؤثر على التعميم بحيث ان $D-E \cong A-B$ و $E-F \cong B-C$ و $E-H \cong B-G$ يجب ان نبرهن ان $\sphericalangle CBG \cong \sphericalangle FEH$.



في المثلثين DEF, ABC

$$A-B \cong D-E$$

و $\sphericalangle DEF \cong \sphericalangle ABC$ و $B-C \cong E-F$

لذلك من مبرهنة SAS

$\sphericalangle EDF \cong \sphericalangle BAC$ و $A-G \cong D-H$

من بديهية (3*) $A-G \cong D-H$ لذلك مرة ثانية نطبق مبرهنة SAS على ΔCAG و ΔFDH فيكون $\Delta FDH \cong \Delta CAG$ وهذا يؤدي إلى أن

$\sphericalangle AGC \cong \sphericalangle DHF$ وإن $C-G \cong F-H$

في المثلثين CBG و FEH:

$$G-C \cong F-H \quad , \quad B-G \cong E-H \quad , \quad \sphericalangle BGC \cong \sphericalangle EHF$$

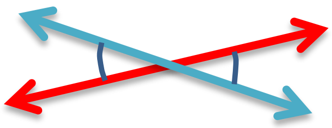
لذلك من بديهية (6*) نستنتج ان $\sphericalangle CBG \cong \sphericalangle FEH$.

نتيجة (1)

مكملات الزوايا المتطابقات تكون متطابقة.

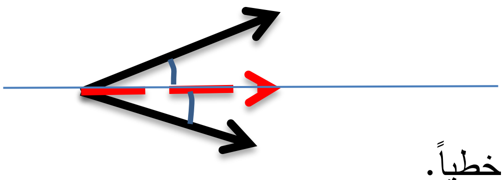
البرهان: نستنتج هذا من التعريف (23)، وبديهية(5*) ومبرهنة (51).

تعريف (24): يقال عن زاويتين لهما رأس مشترك بأنهما زاويتان رأسيتان إذا كان شعاعي زاوية واحدة هما الشعاعين المعاكسين لشعاعي الزاوية الأخرى.



نتيجة (2): تكون الزاويتان الرأسيتان متطابقتين.

تعريف (25): زاويتان لهما رأس مشترك و ضلع مشترك وضلعيهما الآخرين في الجهتين المتعاكستين لخط الضلع المشترك تدعيان زاويتين متجاورتين.



نتيجة(3): إذا كانت زاويتان متكاملتين ومتجاورتين فإنهما تكونان زوجاً خطياً.

مقارنة الزوايا

تعريف (26): تكون زاوية ABC أصغر من زاوية DEF إذا وفقط يوجد شعاع $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\measuredangle DEF$ بحيث $\measuredangle HEF \cong \measuredangle ABC$ ويرمز لهذا بالرمز:

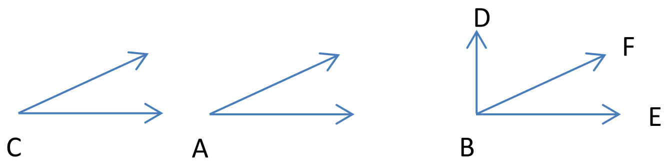
$$\measuredangle ABC < \measuredangle DEF$$

مبرهنة (52): لأي زوج من الزوايا وليكن $\measuredangle A, \measuredangle B$ فإنه تتحقق واحدة فقط مما يلي

$$\measuredangle A < \measuredangle B \ , \ \measuredangle A \cong \measuredangle B \ , \ \measuredangle B < \measuredangle A \ .$$

مبرهنة (53): إذا كان $\measuredangle A < \measuredangle B$ و $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ فإنه $\measuredangle C < \measuredangle B$.

المعطيات : **المطلوب اثباته :**



البرهان: لتكن $\measuredangle B = \measuredangle DBE$ بما ان $\measuredangle A < \measuredangle B$ ومن تعريف (26) يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\measuredangle B$ بحيث ان $\measuredangle A \cong \measuredangle FBE$

ومن الفرض $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ فإنه من بديهية $(*5)$ $\measuredangle C \cong \measuredangle FBE$ ومن تعريف (26)
$\measuredangle B < \measuredangle C$.

مبرهنة (54) إذا كان $\measuredangle B < \measuredangle A$ و $\measuredangle B \cong \measuredangle C$ فإن $\measuredangle C < \measuredangle A$

البرهان: لتكن $\measuredangle C = \measuredangle GCH, \measuredangle B = \measuredangle DBE$

بما أن $\measuredangle B < \measuredangle A$ فأنه من تعريف (26) يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\measuredangle B$ بحيث $\measuredangle A \cong \measuredangle FBE$.

$\measuredangle B \cong \measuredangle C$, $\overrightarrow{BF}$ في داخل $\measuredangle B$ فإنه من مبرهنة (55) { إذا كان $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ وإن BG شعاع في داخل $\measuredangle ABC$ فإنه يوجد شعاع EH في داخل $\measuredangle DEF$ بحيث أن $\measuredangle ABG \cong \measuredangle DEH$ و $\measuredangle GBC \cong \measuredangle HEF$ }

يوجد شعاع $\overrightarrow{CI}$ في داخل $\measuredangle C$ بحيث $\measuredangle FBE \cong \measuredangle ICH$ وبما أن $\measuredangle A \cong \measuredangle FBE$ فإنه من بديهية $(*5)$ $\measuredangle A \cong \measuredangle ICH$, ومن تعريف (26) $\measuredangle A < \measuredangle C$.

جمع وطرح الزوايا

مبرهنة (55): إذا كان $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$ وإن $\overrightarrow{BG}$ شعاع في داخل $\measuredangle ABC$ فإنه يوجد شعاع EH في داخل $\measuredangle \overrightarrow{DEF}$ بحيث أن $\measuredangle ABG \cong \measuredangle DEH$ و $\measuredangle GBC \cong \measuredangle HEF$.

(مبرهنة جمع الزوايا – 56):

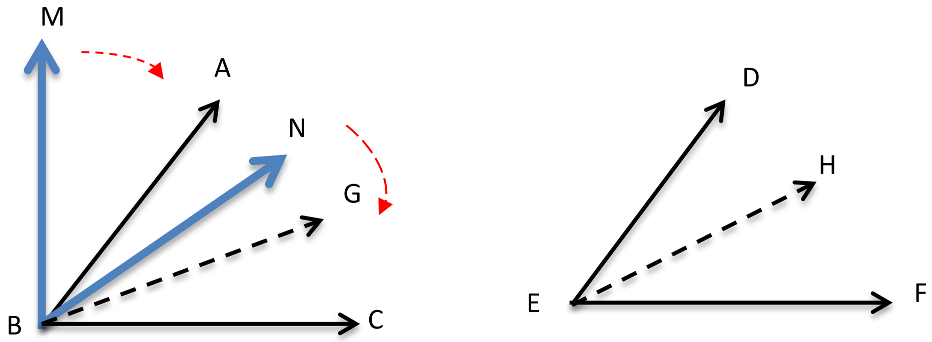
لتكن $\measuredangle ABC, \measuredangle DEF$ زاويتان لهما على التوالي الشعاعين $\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{BG}$ يقعان داخليهما $\measuredangle ABG \cong \measuredangle DEH, \measuredangle GBC \cong \measuredangle HEF$ فإن $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$

البرهان:

من بديهية $(*4)$ يوجد شعاع $\overrightarrow{BM}$ في جهة الخط BC التي تحتوي على A بحيث ان $\measuredangle MBC \cong \measuredangle DEF$ بما أن $\overrightarrow{EH}$ في داخل $\measuredangle DEF$ فإنه من مبرهنة (55) يوجد شعاع $\overrightarrow{BN}$ في داخل $\measuredangle MBC$ بحيث إن $\measuredangle NBC \cong \measuredangle HEF$ ،
$< MBN \cong < DEH$
ولكن من الفرض $\measuredangle GBC \cong \measuredangle HEF$ لذلك من بديهية $(*5)$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BG}$ (*4) ومن بديهية $\measuredangle GBC \cong \measuredangle NBC$

لذلك $\measuredangle MBG = \measuredangle MBN \cong \measuredangle DEH \cong \measuredangle ABG$



ومن هذا $\measuredangle MBG \cong \measuredangle ABG$ ومن بديهية (*4) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ لذلك

$\measuredangle ABC = \measuredangle MBC \cong \measuredangle DEF$ أي ان $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$

(مبرهنة طرح الزوايا – 57):

إذا كان $\measuredangle CBD \cong \measuredangle GFH$ و $\measuredangle DBA \cong \measuredangle HFE$ وإن الشعاعين $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{BA}$ يقعان في داخل $\measuredangle GFH, \measuredangle CBD$ على التوالي فإن $\measuredangle ABC \cong \measuredangle EFG$

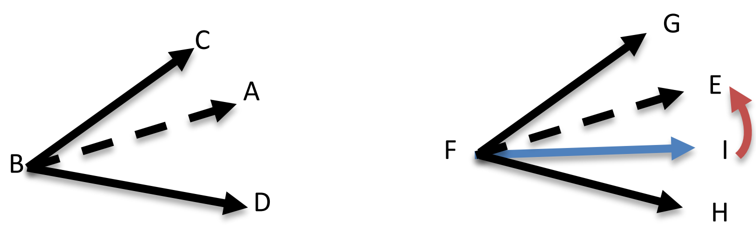
البرهان: بما أن $\measuredangle CBD \cong \measuredangle GFH$ وإن $\overrightarrow{BA}$ شعاع في داخل $\measuredangle DBC$ فإنه من مبرهنة (55) يوجد شعاع $\overrightarrow{FI}$ في داخل $\measuredangle GFH$ بحيث ان $\measuredangle ABC \cong \measuredangle IFG$

$\measuredangle DBA \cong \measuredangle HFI$

لكن من الفرص $\measuredangle DBA \cong \measuredangle HFE$

فإنه من بديهية (*5) $\measuredangle HFE \cong \measuredangle HFI$ ومن بديهية (*4) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FI} \leftarrow$

$\leftarrow E = I$ بما ان $\measuredangle ABC \cong \measuredangle IFG \leftarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle EFG$



القياس Measure

تعريف (27): قياس (Measure) قطعة مستقيم $A - B$ هو مجموعة كل قطع المستقيمات التي تطابق $A - B$ ويرمز لها بالرمز $m(A - B)$.

من التعريف نستنتج ان $A - B \cong C - D \Leftrightarrow m(A - B) - m(C - D)$ قياس قطعة المستقيم هو علاقة التكافؤ.

تعريف (28): $m(A - B) + m(C - D)$ يعني $m(X - Z)$ حيث أن $X - Z$ قطعة مستقيم بحيث انه توجد نقطة Y و $X - Y - Z$

وإن $A - B \cong X - Y$ و $C - D \cong Y - Z$

مبرهنة (59) إذا كان $m(C - D) < m(E - F)$ فإن

$$m(A - B) + m(C - D) < m(A - B) + m(E - F)$$

مبرهنة (60):

إذا كان $m(C - D) < m(E - F)$ فإن

$$m(C - D) + m(A - D) < m(E - F) + m(A - B)$$

مبرهنة (61):

إذا كان $m(A - B) < m(C - D)$ و $m(E - F) < (G - H)$

فإن $m(A - B) + m(E - F) < m(C - D) + m(G - H)$

البرهان:

من مبرهنة (60) إذا كان $m(A - B) < m(C - D)$ فإن

$$m(A - B) + m(E - F) < m(C - D) + m(E - F)$$

من مبرهنة (59) إذا كان $m(E - F) < m(G - H)$ نستنتج ان

$$m(C - D) + m(E - F) < m(C - D) + m(G - H)$$

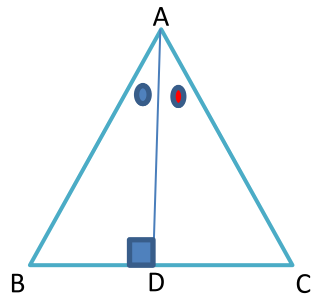
لذلك من التعويض ومن الخاصية المتعدية يكون:

$$m(A - B) + m(E - F) < m(C - D) + m(E - F) < m(C - D) + m(G - H)$$
$$\Rightarrow m(A - B) + m(E - F) < (C - D) + m(G - H)$$

مبرهنة (62): في أي مثلث يكون أي ضلعين معاً أكبر من الضلع الثالث.

البرهان: ليكن ABC مثلثاً يجب ان نبرهن:

$$m(B-C) < m(A-B) + m(A-C)$$
$$m(A-C) < m(A-B) + m(B-C)$$
$$m(A-B) < m(B-C) + m(A-C)$$



سنبرهن الحالة الأولى وبنفس الطريقة نبرهن البقية:

ليكن $\overrightarrow{AD}$ منصف $< BAC$ يقطع $B-C$ في نقطة D أي إن $B-D-C$ لذلك

تكون $< ADB$ زاوية خارجية للمثلث ADC لذا من مبرهنة (أي زاوية داخلية لمثلث

تكون أصغر من أي زاوية خارجية مقابلة لها) $< ADB < DAC$ لكن

$< DAC \cong < BAD$

لذلك من مبرهنة (53) { إذا كان $\measuredangle B < \measuredangle A$ و $\measuredangle C \cong \measuredangle A$ فإنه $\measuredangle B < \measuredangle C$} .

$\measuredangle BAD < \measuredangle ADB$

ومن مبرهنة (إذا كانت زاويتان في مثلث غير متطابقتين فإن الضلعين المتقابلين لهما

غير متطابقين والضلع الأصغر يقابل الزاوية الصغرى) $B-D < A-B \Leftarrow$

وبنفس الطريقة نستطيع ان نبين ان $C-D < A-C$ لذلك من مبرهنة (61)

$$m(B-D) + m(C-D) < m(A-B) + m(A-C)$$

أي ان $m(B-C) < m(A-B) + m(A-C)$

القياس وجمع الزوايا:

تعريف(29): قياس زاوية AOB هو مجموعة كل الزوايا التي تطابق$\measuredangle AOB$ ويرمز لها

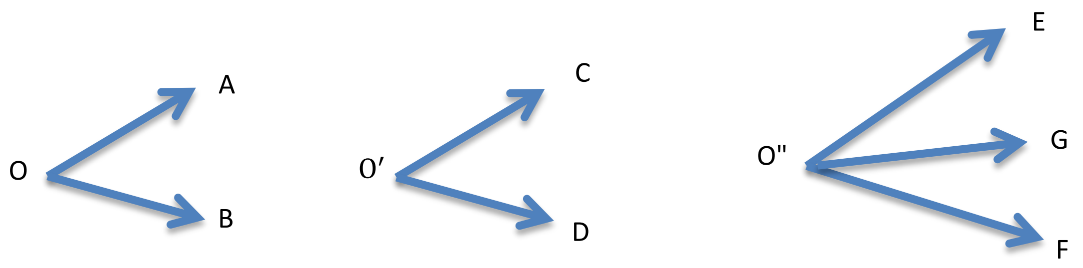
بالرمز $m(\measuredangle AOB)$

وكما في حالة القطع يستنتج إن قياس زاوية هو علاقة تكافؤ.

تعريف(30):

$m(\measuredangle AOB) + m(\measuredangle CO'D)$ (إذا وجد) يعني $m(\measuredangle EO''F)$ حيث إن

$\measuredangle EO''F$ هي زاوية بحيث توجد نقطة G في داخل $\measuredangle EO''F$ و
$\measuredangle AOB \cong \measuredangle EO''G$ و $\measuredangle CO'D \cong \measuredangle GO''F$.



تعريف (31): الجمع المعرف في تعريف (30) يقال أنه موجود إذا وجدت زاويتان متجاورتان $\measuredangle GO''F, \measuredangle EO''G$ وتحقق الخاصية التالية:
إذا كان $O''G$ هو الضلع المشترك للزاويتين المتجاورتين فإن $\overrightarrow{O''G}$ و $\overrightarrow{O''F}$ هما في نفس الجهة من المستقيم $O''E$ و $\overrightarrow{O''G}$ و $\overrightarrow{O''E}$ هما في نفس الجهة من المستقيم $O''F$.

تعريف (32): $m(\measuredangle AOB) < m(\measuredangle CO'D)$ يعني إن أي زاوية تطابق $\measuredangle AOB$ تكون أصغر من أي زاوية تطابق $\measuredangle CO'D$.

مبرهنة (63): إذا كان $m(\measuredangle DEF) < m(\measuredangle GHI)$ فإن كان الجمع موجود

$$m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle DEF) < m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle GHI)$$

مبرهنة (64): إذا كان $m(\measuredangle DEF) < m(\measuredangle GHI)$ فإذا كان الجمع موجود

$$m(\measuredangle DEF) + m(\measuredangle ABC) < m(\measuredangle GHI) + m(\measuredangle ABC)$$

مبرهنة (65):

إذا كان $m(\measuredangle ABC) < m(\measuredangle DEF)$,

$$m(\measuredangle GHI) < m(\measuredangle JKL)$$

(إذا كان الجمع موجود) فإن:

$$m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle GHI) < m(\measuredangle DEF) + m(\measuredangle JKL)$$

البرهان واجب:

قاعد لغوية: إذا كان الجمع لزاويتين موجود فإن الزاويتين يقال إنهما تؤخذان معاً أصغر من زاويتين قائمتين.

مبرهنة (66): في أي مثلث أي زاويتين تؤخذان معاً تكونان أصغر من زاويتين قائمتين.

البرهان: ليكن ABC مثلثاً وفيه $\mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D}$ فإن $\sphericalangle \mathrm{ACD}$ هي زاوية خارجية للمثلث وبذلك يكون $\sphericalangle \mathrm{ACD} > \sphericalangle \mathrm{ABC}$ (يجب أن نبرهن $\sphericalangle \mathrm{BCA}, \sphericalangle \mathrm{ABC}$ تؤخذان معاً تكونان اصغر من زاويتين قائمتين) بما أن $\sphericalangle \mathrm{ACD} > \sphericalangle \mathrm{ABC}$ يؤدي إلى وجود نقطة G في داخل $\sphericalangle \mathrm{ACD}$ بحيث إن $\sphericalangle \mathrm{ACG} \cong \sphericalangle \mathrm{ABC}$ في هذه الحالة إن

$\sphericalangle \mathrm{ACG}, \sphericalangle \mathrm{BCA}$ تحقق الشروط في تعريف (32) إذا كانت زاوية أصغر من زاوية فإن التي تطابقها تكون أيضاً اصغر. وباستخدام التعريفين (31) و (32) والقاعدة اللغوية التي تتبعهما نحصل على النتيجة ونفس الطريقة تتبع لاي زاويتين .

توضيح الحل بطريقه ثانية

بما أن $\sphericalangle 3 > \sphericalangle 1$ اذن توجد نقطة G في داخل $\sphericalangle 3$ بحيث إن

$\sphericalangle 1 * \cong \sphericalangle 1$

في هذه الحالة إن $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1 * + \sphericalangle 4 = 180$

$\text{so } \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1 * < 180 \text{ but } \sphericalangle 1 = \sphericalangle 1 * \text{ so } \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1 * < 180$

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 < 180$$