Chapter three

Determinants المحددات

2-1 Def:- For every square matrix there exist a function between the matrix and the value of scalar number , this function is called the ***Determinant*** of matrix ,and denoted by (**det(A)** or $|\mathbf{A}|$)

2-2 Method to found Determinant طرق ايجاد المحدد

1) IF $A_{1*1} = a \Longrightarrow |A| = a$

2) If $A_{2*2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a_{11} . a_{22} - a_{12} .a_{21}$

Ex:-

$$A= \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} |A| &= (-8)(0) - (5)(7) \\ &= 0 - 35 = -35 \end{aligned}$$

3) If A_{3*3} **then**

ملاحظة :-

ان ايجاد المحدد في هذه الحالة يتم بالطريقة التالية (Diagonal expansion formula)

١- نضيف العمود الاول والثاني الى المصفوفة الاصلية

$$A= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

٢- تصبح المصفوفة بالشكل التالي

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

٣- نصل بخطوط وهمية على اقطار المصفوفة الجديدة وكما يلي

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a11 & a12 & a13 & a11 & a12 \\ a21 & a22 & a23 & a21 & a22 \\ a31 & a32 & a33 & a31 & a32 \end{array} \right|$$

٤- نحدد الخطوط الثلاثة الاولى باشارة موجبة والثلاثة الاخيرة باشارة سالبة

٥- يتم ايجاد المحدد لهذه المصفوفة بالشكل التالي

(حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي + حاصل ضرب عناصر القطر الاول الموازي له + حاصل ضرب عناصر القطر الثاني الموازي له - حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي - حاصل ضرب عناصر القطر الاول الموازي له – حاصل ضرب عناصر القطر الثاني الموازي له) اي ان

$$A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

Ex:-(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{find } |A|$$

Sol :-

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \quad - \end{array}$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & --4 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right|$$

$|A| = (1)(2)(0) + (0)(-1)(0) + (3)(1)(-4) – (3)(2)0) – (1)(-1)(-4) – (0)(1)(0)$

$= 0 + 0 -12 - 0 – 4 – 0$

$|A| = -16$

Ex:- (2)

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/-6 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{find } |A|$$

Sol :-

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \quad - \end{array}$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1/4 & 1/-6 & 1/2 & 1/4 & 1/-6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & -2 & 8 \end{array}\right|$$

$|A| = (1/4)(0)(0) + (1/-6)(-2)(-2) + (1/2)(0)(8) – (1/2)(0)(-2) – (1/4)(-2)(8) – (1/-6)(0)(0)$

$= 0+2/3-0– 0+ 4 -0$

$= 2/3 +12/3$

$|A| = 14/3$

2-3 Properties Of Determinants خواص المحددات

TH(1):- **If all elements of one row (or column) of A are zero ,then $|A| = 0$**

Ex : - (1)

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A|=0$$

TH(2):- **If there exist two rows (or columns) are equal then $|A| = 0$**

Ex : - (2)

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 7 & -4 \\ 1/7 & 0 & 1/7 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| =0$$

TH(3):- **If two rows and (or columns) of A are interchanges then the determinant of the resulting matrix B is($-|A|$) , i.e $|B| = - |A|$.**

Ex : - (3)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |A| = (3)(-1)(2) + 0 + 0 - 0 + 2 = -6 + 2 = -4$$

But

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |B| = 0 + 0 - 2 + 6 - 0 = 4$$

TH (4) :- **If two rows (columns) of matrix A are proportional ,then A= 0**

Ex(4)

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| =0$$

TH (5) :- If a matrix C results from a matrix A by multiplying all elements in one row (or column) of A by K then $|C| = K|A|$, i.e ($|A| = 1/K|C|$)

Ex : - (5)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}, \quad K = 2 \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -14 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 0 = -6$$

but

$$|A| = -3 + 0 = -3 \Rightarrow K|A| = 2(-3) = -6$$

Then $K|A| = |C|$

TH (6):- If a multiple of any row (or column) of a determinant is added to any other row (or column) ,then value of the determinant is not changed

TH(7):- The determinant of the product of two matrices is the product of their determinants i.e ($|AB| = |A|\ |B|$)

In general

$$|A_1 . A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots A_n| = |A_1| \, . \, |A_2| \ldots\ldots\ldots |A_n|$$

Ex : - (7)

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 9 \\ 1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 9 \\ 5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Find $|A|$, $|B|$, $|AB|$, $|BA|$

TH(8):- If A triangular matrix then the determinant of A is equal the product of the elements of main diagonal i.e($|A| = a_{11}.a_{22}.a_{33}\ldots\ldots\ldots a_{nn}$

Ex : - (8-1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$$

Ex : - (8-2)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (4)(5)(-1) = -20$$

Ex : - (8-3)

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 15 & 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (-7)(8)(-2) = 112$$

TH(9):-

$$|A| = |A^T|$$

Ex : - (9)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 33$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^T| = 33$$

TH(10):-

$$|\bar{A}| = \overline{|A|}$$

Ex : - (10)

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ i & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ -i & +i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (1+i)(-i) - (2-i)\,i \\ &= -i + 1 - 2i - 1 \\ &= -3i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |\bar{A}| &= (1-i)(i) - (2+i)(-i) \\ &= i + 1 + 2i - 1 \\ &= +3i \end{aligned}$$

$$\overline{|A|} = 3i$$

TH (11) :-

$$|A^{-1}| = 1 / |A|$$

Ex : - (11)

Let $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Find $|A|$ **and** $|A^{-1}|$

Sol :-

$$|A| = (3)(3) - (4)(3) = 9 - 12 = -3$$

$$|A^{-1}| = (-1)(-1) - (4/3)(1) = 1 - 4/3 = -1/3$$

$$|A^{-1}| = 1 / |A|$$

Def :- **The Cofactor of square matrix A is (cof(A) = Aij = $(-1)^{i+j}$ M ij**

ملاحظة :-

لتكن (aij) =A مصفوفة ذات سعة n*n ولتكن Mij مصفوفة جزئية من المصفوفة A ذات السعة (n – 1) * (n – 1) والتي حصلنا عليها بعد حذف الصف i والعمود j
يقال لمحدد Mij بانه مصفر العنصر aij من المصفوفة A

Ex : - (1)

Let $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, **Find cof (A)**

Sol:

ملاحظة :-

عند ايجاد العامل المرافق للمصفوفة A يجب ان نجد العامل المرافق لكل عنصر عناصر من المصفوفة وكما يلي

$Cof (0) = A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = (-1)^{2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1 (-16 – 3) = -19$

$Cof (1) = A_{12} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (- 1) (-12 – 2) = 14$

$Cof (2) = A_{13} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (+ 1) (-9 +8) = -1$

$Cof (3) = A_{21} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (- 1) (0 + 2) = -2$

$Cof (4) = A_{22} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (+ 1) (0 + 4) = 4$

$Cof (- 1) = A_{23} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (- 1) (0 + 2) = -2$

$Cof (-2) = A_{31} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (+ 1) (-1 - 8) = -9$

$Cof (- 3) = A_{32} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (- 1) (0 - 6) = 6$

$$Cof(-4) = A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (+1)(0-3) = -3$$

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 14 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Exc : -(1)

Let $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1/2 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}$, **Find cof (A)**

Exc : -(2)

Let $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **Find cof (A)**

ايجاد المحدد بطريقة العامل المرافق

Theorem:- If $A = (a_{ij})_{n*n}$, Then

(1) $|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots\dots\dots\dots a_{in} A_{in} \qquad 1 < i < n$

OR

(2) $|A| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots\dots\dots\dots a_{nj} A_{nj} \qquad 1 < j < n$

ملاحظة : -

(١) ان افضل طريقة للنشر تتم بدلالة العمود او الصف الذي يحتوي على اكبر عدد من الاصفار

(٢) في النظرية اعلاه يتم ايجاد المحدد من خلال

(الحالة الاولى) بتثبيت الصف i وايجاد العامل المرافق لعناصر هذا الصف (Ai1, Ai2 ,... , Ain)

(الحالة الثانية) بتثبيت العمود j وايجاد العامل المرافق لعناصر هذا العمود (A1j, A2j , …, Anj)

(٣) هذه الطريقة تستخدم عندما تكون (n > 3)

Ex : -

Let $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

Sol:- **الحل :-** نستخدم الحالة الاولى (سوف ناخذ الصف الاول ونطبق عليه النظرية)

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} \longrightarrow (i = 1)$$

$$= (0) A_{11} + (-1) A_{12} + (2) A_{13}$$

الان يجب ان نجد العوامل المرافقة لعناصر الصف الاول اي A_{11} , A_{12} , A_{13} كما مر سابقا .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(-6-0) = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(3-0) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (1)(2-0) = 2$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 0(-6) + (-1)(-3) + (2)(2) \\ &= 0 + 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

نفس المثال السابق لكن سوف ناخذ العمود الثالث ونطبق عليه النظرية

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

$$|A| = (2)A_{13} + (0)A_{23} + (3)A_{33}$$

الان نجد العوامل المرافقة لعناصر العمود الثالث اي A_{13} , A_{23} , A_{33} وكما يلي :

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2-0) = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(0) = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (1)(0+1) = 1$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= (2)(2) + (0)(0) + (3)(1) \\ &= 7 \end{aligned}$$

وهكذا نستطيع ان نجد المحدد باستخدام اي صف او اي عمود مع مرافقاته .

ملاحظة : - بطريقة اكثر سهولة واسرع وقت (بخطوة واحدة) نستطيع ان نطبق النظرية على اي صف او عمود وكما يلي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & -3 & 6 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=+(1)\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (6)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-8-0) - (-3)(2-0) + (6)(8-0)$$

$$= -8+6+48 = 46$$

Exc : -Evaluate the determinant of the following matrices by using cofactor

(1)

Let $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1/4 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

(2)

Let $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & -1/4 & 2 \\ 1 & 7 & -0 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

Exc:-Evaluate the determinant of the following matrices by using properties of determinant

(1) Let $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ -7 & -1 & -7 & -2 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

(2) Let $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 3 \\ 3/2 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

(3) Let $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **Find** $|A|$

(4) Let $A= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

2- 5 Adjoint Of Matrix العامل المصاحب للمصفوفة

Def :- If A square matrix then the transpose of the matrix of cofactor of A is called the Adjoint of A , i.e **(adj(A) = (cof(A))^T =(Aij)^T**

$$\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{cof}(A))^T = \begin{pmatrix} A11 & A21 & \dots\dots\dots & An1 \\ A12 & A22 & \dots\dots & An2 \\ : & : & & : \\ A1n & A2n & \dots\dots\dots & Ann \end{pmatrix}$$

Ex : -

Let $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, Find adj (A)

Sol :- **الحل :-** (١) نجد العامل المرافق (cof (A)

(٢) ثم نجد المنقول له لكي نحصل على العامل المصاحب (adj (A)) وكما يلي :

$$\operatorname{Cof}(a_{11}) = A_{11} = (-1)^{1+1} \quad M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3-2) = -5$$

$$\operatorname{Cof}(a_{12}) = A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(6-1) = -5$$

$$\operatorname{Cof}(a_{13}) = A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (+1)(4+1) = 5$$

$$\operatorname{Cof}(a_{21}) = A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-3-0) = 3$$

$$\operatorname{Cof}(a_{22}) = A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (+1)(9-0) = 9$$

$$\operatorname{Cof}(a_{23}) = A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(6+1) = -7$$

$$\operatorname{Cof}(a_{31}) = A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (+1)(-1-0) = -1$$

$$\operatorname{Cof}(a_{32}) = A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(3-0) = -3$$

$$\text{Cof}(a_{33}) = A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (+1)\ (-3+2) = -1$$

$$\Rightarrow \text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

Exc : - (1)

Let $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1/4 & 5 \\ 1 & 0 & 2/4 \end{pmatrix}$, **Find adj (A)**

Exc : - (2)

Let $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 5/2 \\ -1/6 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, **Find adj (A)**

Exc : -(3)

Let $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, **Find adj (A)**

<u>**Theorem :-**</u> If An*n square matrix then

$$A\ (\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))\ A = |A| \cdot I_n$$

Ex : - Evaluate the determinant of the following matrices by using adjoint of matrix

Let $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Sol :-

الحل :- لكي نطبق النظرية

(١) يجب ان نجد adj (A)

(٢) نجد حاصل ضرب A في adj (A) من اليمين واليسار

(٣) يجب ان يكون الناتج محدد مضروب في مصفوفة الوحدة

(٤) نجد محدد A لكي نتحقق من الحل

$$(1)\quad adj(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad A.(adj(A)) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & -3 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 +5 +0 & 9 -9 +0 & -3 +3 +0 \\ -10 +5 +5 & 6 -9 -7 & -2 +3 -1 \\ -15 -10 +5 & 3 +18 -21 & -1 -6 -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad A.(adj(A)) = -10\ I_{33}$$

(4)

$$|A| = \begin{array}{|ccc|} + & - & + \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$= (3) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3 -2) + (1)(6 - 1) + 0$$

$$= -15 + 5$$

$$= -10 \Longrightarrow |A| = -10$$

اذن تطبيق النظرية من جهة اليسار صحيح ونفس الحالة من جهة اليمين

Theorem :- If A square matrix and $|A| \neq 0$,then

$$A^{-1} = 1 / |A| .\ adj(A)$$

ملاحظة : -

ان تطبيق هذه النظرية يعتبر طريقة جديدة لايجاد المعكوس للمصفوفة A

Ex : -

Let $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, Find A^{-1} by determinant of A

Sol :- **الحل :-** لايجاد المعكوس باستخدام النظرية اعلاه نتبع الاسلوب التالي

(١) نجد محدد A اذا كان لايساوي صفر نستمر بالحل اما اذا كان المحدد يساوي صفر فان المعكوس غير موجود ونتوقف عن الحل

(٢) نجد adj (A)

(٣) نطبق العلاقة $A^{-1} = 1 / |A| (adj (A))$ ونجد الحل .

$$(1)\ |A| = \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (+2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(2-6) - (3)(-1-0) + 1(-2-0)$$

$$= -8 + 3 - 2 = -7$$

$$|A| \neq 0 \Longrightarrow A^{-1} \quad \text{exists}$$

$$(2)\ cof(A) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow adj(A) = (cof(A))^T = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(3)\ A^{-1} = 1 / |A| (adj(A)) = 1/-7 \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/7 & 1/7 & -1 \\ -1/7 & -2/7 & +1 \\ -2/7 & 4/7 & -1 \end{pmatrix}$$

Exc:- Find A^{-1} by using the determinant of A

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1/4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-6 Cramer 's Rule حل المعادلات الخطية بواسطة (قاعدة كرامر)

Theorem:- If AX =B be system of linear equations which have (n) variables and (n) equations such that $|A| \neq 0$,then the system has one solution is

$$X_1 = |A_1| / |A| , \quad X_2 = |A_2| / |A| , \ldots , \quad X_n = |A_n| / |A|$$

حيث ان A_j المصفوفة الناتجة من تبديل عناصر المصفوفة B محل العمود j في المصفوفة A

Ex:- Solve the following equations by using Cramer 's rule

$$X + 2Y + 3Z = 2$$
$$2X + 5Y + 3Z = 3$$
$$X + 8Z = 4$$

Sol :- **الحل :-** عند الحل باستخدام قاعدة كرامر نتبع الاسلوب التالي

(١) نحول النظام الى نظام المصفوفات

(٢) نجد المحدد للمصفوفة الممتدة

(٣) نجد المحدد للمصفوفات $|A1|$, $|A2|$, $|A3|$

(٤) ثم نطبق القاعدة

(1)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

(2) $|A| = 1(40) - 26 - 15 = -1 \neq 0$

(3)

$$A1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |A1| = 2(40) - 2(12) + 3(-20)$$
$$= 80 - 24 - 60$$
$$= -4$$

$$A2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |A2| = 1(12) - 2(13) + 3(5)$$
$$= 12 - 26 + 15$$
$$= 1$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |A3| = 1(20) - 2(5) + 2(-5)$$
$$= 20 - 10 - 10$$
$$= 0$$

(4)

$$X = |A1| / |A| = -4 / -1 = 4$$

$$Y = |A2| / |A| = 1 / -1 = -1$$

$$Z = |A3| / |A| = 0 / -1 = 0$$

$$\text{Solution Set} = \{ 4, -1, 0 \}$$

ملاحظة :-

(١) ان قاعدة كرامر قابلة للتطبيق في حالة كون عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل

(٢) يجب ان يكون محدد A (مصفوفة المعاملات) لايساوي صفر

(٣) تصبح قاعدة كرامر غير كفوؤة من الناحية الحسابية عندما تكون $n > 4$ (حيث n يمثل عدد المعاملات وهو يساوي عدد المجاهيل) ومن الاحسن عندئذ استعمال طريقة كاوس جوردن .

Exc:- باستخدام قاعدة كرامر حل نظام المعادلات التالية

(1) $X1 + 2\,X3 = 6$

$-3\,X1 + 4\,X2 + 6\,X3 = 30$

$-X1 - 2\,X2 + 3\,X3 = 8$

(2) $X1 + 2\,X2 + 3\,X3 = 6$

$2\,X1 - 2\,X2 + 5\,X3 = 5$

$4\,X1 - X2 - 3X3 = 0$

(3) $X1 + X2 = 3$

$X2 + 2\,X3 = 2$

$X3 + 3\,X4 = 1$

$4\,X1 + X4 = 0$

2-7 The Rank Of The Matrix رتبة المصفوفة

تعريف :-

لتكن A مصفوفة ذات سعة m*n فان رتبة المصفوفة A هي السعة لاكبر مصفوفة جزئية من A المحدد لها لا يساوي صفر .

Ex:- **مثال:- جد رتبة المصفوفة**

$$A= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

لا يوجد محدد لهذة المصفوفة لأنها ليست مربعة لذلك نستخرج منها مصفوفة جزئية 2*2

المصفوفة B محددها لا يساوي صفر

إذن رتبة A تساوي 2

$$B= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{2*2}$$

Ex:- **مثال:-**

جد رتبة المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3*4}$$

الحل :- **Sol :-**

نستخرج مصفوفات جزئية ثم نجد المحدد لها فأذا كان المحدد لا يساوي صفر فأن رتبة A تساوي سعة تلك المصفوفة ...... أما أذا كان المحدد يساوي صفر نستخرج مصفوفات جزئية بسعة أصغر ثم نجد المحدد لها ومن خلالة نحدد رتبة المصفوفة

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3*3} \Longrightarrow |B| = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}_{2*2}$$

$|B| = -63$

Then rank A = 2