Chapter Two

S_1 Linear Equations المعادلات الخطية

(1)Linear Equation المعادلة الخطية

Definition :- any equation that can be written in the form $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots\dots\dots + a_n x_n = 0$, where $a_1, a_2, \dots\dots\dots, a_n$ are real constants and $x_1, x_2, \dots, x_n$ are variables , is called ***linear equation (first – degree equation)***

Ex :-

(1) $-7x + 5z = 6$

(2) $x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -13$

(3) $-m - h = 1/5$

(4) $z_1 + z_2 + z_3 - z_4 = 20$

(2)Solution of equation حل المعادلة

Def :- solve an equation is to find the elements of the variables that makes the equation true

(3) Solution set مجموعة الحل

Def :- the set of element of the variables that makes the equation true .

Remark ملاحظة

المعادلات التاليه ليست خطيه

(1) $xz + 3y = 3$

(2) $8x^5 - 2w = 1$

(3) $4x - \cos(y) = -2$

(4) $x_1 - 3x_2 - \mathrm{Ln}(x_3) = -36$

(4)System of linear equation منظومة المعادلة الخطية

Def ;- is set of (M) of linear equations which has (N) of variables which can be written in the form :-

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mn} x_n = b_m$$

حيث ان a_{ij} , $I = 1 , \ldots , m ; j = 1 , \ldots , n$ ثوابت(constants) تنتمي الى حقل الاعداد الحقيقية (R)

Remark :-

(1) The system of linear equation which has solution is called (***consistent system***)

(2) The system of linear equation which has no solution is called (***inconsistent system***)

(3) Any system of linear equations may have (no solution , exactly one solution , or an infinite number of solutions)

(5)System of Homogeneous Linear Equations منظومة المعادلات المتجانسة

Def :- A system of linear equations of the form

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mn} x_n = 0$$

in which the constant terms are all zero is called ***system of homogeneous linear equations***

Ex (1)

$2x + 4y + 3w = 0 \longrightarrow L_1$

$x + 2y - 5w = 0 \longrightarrow L_2$

$2x - y + 2w = 0 \longrightarrow L_3$

Remark

(1)if $n = m$ then the system has the only zero solution

(2) if $m < n$ the system has infinite number of solution

Elementary Operations on Matrices العمليات الاولية على المصفوفات

(a) the interchange of two rows
(b) the multiplication of a row by an arbitrary non zero constant
(c) the addition of an arbitrary multiple of one row to another row in the matrix

Def :- if the system of linear equations of m equations in n variables is

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\ \ \vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn} x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

then the matrix of the **coefficients** and the **constant** terms is called ***augmented*** matrix and can be written in matrix form

$$
\left(\begin{array}{cccc:c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

Ex:-

$$
\begin{aligned}
3X + 2Y - Z &= 2 \\
-4X + 4Y + 12Z &= -4 \\
5X - 3Y + 4Z &= 0
\end{aligned}
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc:c}
3 & 2 & -1 & 2 \\
-4 & 4 & 12 & -4 \\
5 & -3 & 4 & 0
\end{array}\right)
$$

another way

let

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 12 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

ملاحظة :- تكون المصفوفة A بالصيغة الصفية المدرجة اذا حققت الشروط التالية

١- الصفوف التي تتكون بكاملها من اصفار تكون اسفل المصفوفة .
٢- الصف الذي لايتكون بكامله من اصفار فان اول عنصر غير صفري هو واحد ويسمى الدليل واحد

٣- اي صفين غير متكونين بكاملهما من اصفار مثل الصف i ، i+1 فان الدليل واحد في الصف i+1 يقع على يمين الدليل واحد في الصف i

سؤال :-اي المصفوفات التالية تكون بالصيغة المدرجة صفيا ؟ ولماذا ؟ **Ex : -**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A: مدرجة ، B: غير مدرجة , C: غيرمدرجة ،D: مدرجة , E: غير مدرجة :,

S_2- Solution Of Linear Equations

1--By Gaussian Elimination

حل المعادلات الخطية بطريقة الحذف كاوس

Ex :- solve the following system of linear equations by Gaussian elimination

$3X + 6Y + 9Z = 27$

$2X - Y + Z = 8$

$3X - Z = 3$

Sol :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & : & 27 \\ 2 & -1 & 1 & : & 8 \\ 3 & 0 & -1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

$1/3\, R_1 \longrightarrow R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 9 \\ 2 & -1 & 1 & : & 8 \\ 3 & 0 & -1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

$-2R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$

$-3R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$$

$-1/5\, R_2 \longrightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$$

$6R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

$-1/4\, R_3 \longrightarrow R_3$ (ألأن أصبحت المصفوفة بالصيغة المدرجة الصفية)

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

ألأن نحول المصفوفة الى نظام المعادلات الخطية

$$X + 2Y + 3Z = 9$$
$$+ Y + Z = 2$$
$$Z = 3$$

$\Rightarrow Z = 3$

by (2)

$Y + Z = 2 \Rightarrow Y = 2 - 3 \Rightarrow Y = -1$

By (3)

$X + 2Y + 3Z = 9 \Longrightarrow X-2+9=9 \Longrightarrow X = 2$

Solution set $= \{ 2 , -1 , 3 \}$

<u>Ex 1:-</u> solve the following system of linear equations by Gaussian elimination

$4X + 4Y + 8Z = -4$

$3X - 6Y + 3Z = -15$

$3X + Y + Z = 3$

EX : 2

$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 - 10X_4 = 6$

$2X_1 + 5X_2 - X_3 - 9X_4 = -3$

$2X_1 + X_2 - X_3 + 3X_4 = -11$

$X_1 - 3X_2 + 2X_3 + 7X_4 = -5$

ملاحظة :-

اذا كانت المصفوفة بالصيغة الصفية المدرجة لكي تكون بالصيغة الصفية المدرجة المختزلة يجب ان تحقق الشرط التالي ((العمود الذي يحتوي على الدليل واحد تكون جميع عناصره الاخرى اصفار)) .

EX:-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>2- By Gaussian-Jordan Elimination</u>

<u>حل المعادلات بطريقة الحذف كاوس – جوردان</u>

تعتمد هذه الطريقة على تحويل نظام المعادلات الخطية الى المصفوفة الممتدة للنظام ومن ثم تحويل هذه المصفوفة الى المصفوفة المدرجة الصفية المختزلة .

<u>Ex 1:-</u> solve the following equations by **Gaussian-Jordan** elimination

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 - X_4 &= 0 \\ 2X_2 + X_3 - 2X_4 &= 3 \\ 2X_1 + X_2 - X_4 &= 0 \\ X_1 + X_2 - 3X_3 &= 1 \end{aligned} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

SOL :-

$-2R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$
$-R_1 + R_4 \longrightarrow R_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & : & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & : & \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{2} R_2 \longrightarrow R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & : & 3/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & : & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & : & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & : & 3/2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \quad 2R_3 \longrightarrow R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & : & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & : & 1 \end{pmatrix}$$

$3R_3 + R_4 \longrightarrow R_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & : & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 10 \end{pmatrix}$$

المصفوفة الان بالصيغة الصفية المدرجة يجب ان نحولها الى الصيغة الصفية المختزلة ويتم ذلك بطريقة الحذف تصاعديا :-

$R_4 + R_1 \longrightarrow R_1$
$R_4 + R_2 \longrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & : & 10 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & : & 23/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 10 \end{pmatrix}$$

$-1/2\, R_3 + R_2 \longrightarrow R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & : & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 10 \end{pmatrix}$$

$-R_2 + R_1 \longrightarrow R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 10 \end{pmatrix}$$

$X_1 = 0$
$X_2 = 10$
$X_3 = 3$
$X_4 = 10$

H . W

EXC :- solve By Gauss –Jordan

NO (1) :-

$2X_1 + 2X_2 - 2X_4 = 4$
$4X_2 + 2X_3 - 4X_4 = 6$
$-X_2 + X_4 = -4$
$-3X_3 + X_4 = -1$

NO (2) :-

$2X_1 + 2X_2 - X_3 + X_5 = 0$
$-X_1 - X_2 + 2X_3 - 3X_4 + X_5 = 0$
$X_1 + X_2 - 2X_3 \qquad - X_5 = 0$
$\qquad 2X_3 + 2X_4 + 2X_5 = 0$

NO (3) :

$-2X_1 + X_2 + X_3 = 8$
$3X_1 - 2X_2 - X_3 = 1$
$4X_1 - 7X_2 + 3X_3 = 0$

NO (4) :-

$2X_1 + X_2 + 3X_3 = 0$
$X_1 + 2X_2 \qquad = 0$
$\qquad 2X_2 + 2X_3 = 0$

EXC :- solve By Gauss

NO (1) :-

$4X_1 + 8X_2 + 2X_3 = 16$

$3X_1 - 5X_2 - X_3 = 2$

$4X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 1$

NO (2) :-

$2X_1 + 2X_2 - 4X_3 + 2X_4 + 6X_5 = 2$

$3X_1 + 2X_2 - 4X_3 - 3X_4 - 9X_5 = 3$

$2X_1 - X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 6X_5 = 2$

$6X_1 + 2X_2 - 4X_3 = 6$

$2X_2 - 4X_3 - 6X_4 - 18X_5 = 0$

NO (3) :-

$X_1 + 3X_2 - 2X_3 + 2X_5 = 5$

$2X_1 + 6X_2 - 5X_3 - 2X_4 + 4X_5 - 3X_6 = 1$

$5X_3 + 10X_4 + 15X_6 = 5$

$2X_1 + 6X_2 + 2X_4 + 18X_6 = 6$

NO (4) :-

$X_1 - 5X_2 - 8X_3 + X_4 = 3$

$3X_1 + X_2 - 3X_3 - 5X_4 = 1$

$X_1 - 7X_3 + 2X_4 = 5$

$11X_2 + 20X_3 - 9X_4 = 2$

S_3- Inverse of matrix معكوس المصفوفة

Def :-If A square matrix and ,if there exists a square matrix A^{-1} such that $\mathbf{A.A^{-1} = A.A^{-1} = I}$,then we say that A^{-1} is an ***inverse*** of A .

EX:-

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \, . \, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \, . \, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

خواص المعكوس

Theorem(1):- **(1)** $\mathbf{(A^{-1})^{-1} = A}$

(2) $\mathbf{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

(3) $\mathbf{(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}}$

Theorem(2):-

The inverse is unique if it exists .

Proof :-

Let A has two inverse
B and C
Then A.B= B . A = In
And A .C = C. A = In
Now
B = B . (In)
= B (AC)
= (BA) C
= In C
= C
Then
B = C

طريقة ايجاد معكوس المصفوفة

اذا كانت المصفوفة ذات سعة $n*n$ فان حساب معكوس المصفوفة A يكون بالشكل التالي :-

١- تكون المصفوفة ذات سعة $n* 2n$ بالشكل التالي $[A : In]$

٢- نحول المصفوفة الناتجة من الخطوة واحد الى المصفوفة المدرجة الصفية المختزلة ونحصل على الصيغة التالية $[C : D]$

٣- أ- اذا كانت $C= In$ فان $D = A^{-1}$

ب- اذا كانت C لا تساوي In فان C تحتوي على صف بكامله اصفار في هذه الحالة فان المصفوفة A غير قابلة للانعكاس فان A^{-1} غير موجودة

ملاحظة :- بصورة عامة

$$[A \backslash I] \longrightarrow [I \backslash A^{-1}]$$

EX:- Find A^{-1} of A

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol:-

$$[A \backslash I] \longrightarrow [I \backslash A^{-1}]$$

$$[A \backslash I]=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نستبدل R_2 بدل R_1

$$=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$-2R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad -2R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \qquad 1/11R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & : & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2/11 & 4/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

$4R_3 + R_2 \longrightarrow R_2$, $-2R_3 + R_1 \longrightarrow R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 4/11 & 3/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 0 & : & 3/11 & -6/11 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2/11 & 4/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/11 & 3/11 & -2/11 \\ 3/11 & -6/11 & 4/11 \\ -2/11 & 4/11 & 1/11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 1/11 \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = I \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} . 1/11 \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1/11 \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

EX :- Find A^{-1} of A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[\,A\backslash I\,] \longrightarrow [\,I\backslash A^{-1}] \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-R1 + R3 \longrightarrow R3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لا يمكن اختزال A الى المصفوفة المختزلة لذلك لا يوجد معكوس

EXc : -Find A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>EXC:-</u> Solve the following system of linear equations

NO (1) :-

$3X + 3Y + 6Z = 3$
$4X + 2Y = 0$
$X + 2Y + 2Z = -1$

NO (2) :-

$2X_1 + X_2 + 5X_3 + X4 = 8$
$X_1 - 3X_2 - 6X_4 = 9$
$2X_2 - X_3 + 2X_4 = -5$
$X_1 + 4X_2 - 7X_3 + 6X_4 = 0$

$X_1 = 3$, $X_2 = -4$, $X_3 = -1$, $X_4 = 1$ الناتج

NO (3) :-

$-2X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 5$
$2X_1 + X_2 - 6X_3 = 10$
$-X_1 - 2X_2 = -5$

$X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = -1$ الناتج :

NO (4) :-

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 1$
$2X_1 - X_2 + 5X_3 + 3X4 = -11$
$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 7X_4 = 10$
$4X_1 + 3X_2 + 7X_3 + 12X_4 = 0$