Numerical Differentiation :-

ان قواعد الاشتقاق العادية لا يمكن تطبيقها عندما تكون صيغة الدالة f غير معرفة بشكل رياضي صريح انما تكون قيمها معلومة عند عدد محدد من نقاط مجالها لذا يكون من الضروري وجود بعض الطرق التي تمكننا من ايجاد قيمة تقريبية لمشتقة الدالة f' .

لايجاد قيمة المشتقة f' عند نقطة معينة فاننا نقوم بايجاد صيغة الدالة f بالاعتماد على معطيات المسألة وبعد ذلك نشتق صيغة الدالة وبعدها نجد القيمة العددية للمشتقة عند النقطة المطلوبة .

1) Forward Difference Formula :-

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+(2K-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2}+(3K^2-6K+2)\frac{\Delta^3 y_0}{6}+(4K^3-18K^2+22K-6)\frac{\Delta^4 y_0}{24}+\cdots\right]$$

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(K-1)\Delta^3 y_0+\left(\frac{1}{2}K^2-\frac{3}{2}K+\frac{11}{12}\right)\Delta^4 y_0+\cdots\right]$$

2) Backward Difference Formula :-

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left[\nabla y_n+(2K+1)\frac{\nabla^2 y_n}{2}+(3K^2+6K+2)\frac{\nabla^3 y_n}{6}+(4K^3+18K^2+22K+6)\frac{\nabla^4 y_n}{24}+\cdots\right]$$

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n+(K+1)\nabla^3 y_n+\left(\frac{1}{2}K^2+\frac{3}{2}K+\frac{11}{12}\right)\nabla^4 y_n+\cdots\right]$$

Example:-

Find the derivatives $f'(2.2)$, $f''(2.2)$, $f'(9.3)$, $f''(9.3)$ by using the following data

x_i	2	4	6	8	10
y_i	2	1	3	8	20

Solution:-

In the beginning we find the derivatives $f'(2.2)$, $f''(2.2)$

$h = 2$, $x = 2.2$, $x_0 = 2$, $K = \frac{2.2-2}{2} = 0.1$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
2	2	-1	3	0	4
4	1	2	3	4	
6	3	5	7		
8	8	12			
10	20				

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + (2K-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2} + (3K^2-6K+2)\frac{\Delta^3 y_0}{6} + (4K^3-18K^2+22K-6)\frac{\Delta^4 y_0}{24}\right]$$

$$f'(2.2) = \frac{1}{2}\left[(-1) + (2*0.1-1)\frac{3}{2} + (3(0.1)^2 - 6(0.1)+2)\frac{0}{6} + (4(0.1)^3 - 18(0.1)^2 + 22(0.1)-6)\frac{4}{24}\right] = -1.431$$

$\therefore f'(2.2) = -1.431$

③

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (k-1)\Delta^3 y_0 + \left(\frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{11}{12}\right)\Delta^4 y_0\right]$$

$$f''(2.2) = \frac{1}{4}\left[3 + (0.1-1)(0) + \left(\frac{1}{2}(0.1)^2 - \frac{3}{2}(0.1) + \frac{11}{12}\right) * 4\right]$$

$$= 1.522$$

$$\therefore f''(2.2) = 1.522.$$

Now we find the derivatives $f'(9.3)$, $f''(9.3)$

$h = 2,\ x = 9.3,\ x_n = 10,\ k = \frac{9.3 - 10}{2} = \boxed{-0.35}$

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
2	2				
		-1			
4	1		3		
		2		0	
6	3		3		4
		5		4	
8	8		7		
		12			
10	20				

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + (2k+1)\frac{\nabla^2 y_n}{2} + (3k^2+6k+2)\frac{\nabla^3 y_n}{6} + (4k^3+18k^2+22k+6)\frac{\nabla^4 y_n}{24}\right]$$

$$f'(9.3) = \frac{1}{2}\left[12 + (2(-0.35)+1)\frac{7}{2} + (3(-0.35)^2 + 6(-0.35) + 2)\frac{4}{6} + (4(-0.35)^3 + 18(-0.35)^2 + 22(-0.35) + 6)\frac{4}{24}\right] = 6.642$$

$$\therefore f'(9.3) = 6.642$$

(4)

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + (K+1)\nabla^3 y_n + \left(\frac{1}{2}K^2 + \frac{3}{2}K + \frac{11}{12}\right)\nabla^4 y_n\right]$$

$f''(9.3) = ??$ (H.W.)

Exercise:-

Find the derivatives $f'(3.7), f''(3.7), f'(13), f''(13)$ by using the following data

x	3	6	9	12	15
y	2	1	5	7	10