الفصل الـــرابـــــع (المحاضرة 1و2)

(أسس الهندســـة)

قدم عالم الرياضيات الالماني دافيد هلبرت نظاما بديهيا متكاملا الذي منه نستنتج الهندسة الاقليدية . لقد صحح الأخطاء والعيوب التي رافقت اعمال اقليدس.

نبدأ نظامنا هذا بكلمات أولية تقنية تدعى نقاط التي يرمز لها بالرموز A,B,C,...

ومستقيمات يرمز لها بالرموز l, m, n,..... .

بديهيات الوقوع والوجود :

بديهية (1) : لكل نقطتين مختلفتين معلومتين يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما.

بديهية (2) : كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الأقل.

بديهية (3) : لكل مستقيم معلوم توجد في الأقل نقطة واحدة لا تنتمي اليه .

بديهية (4) : يوجد في الأقل مستقيم واحد .

يتبين لنا من البديهيات أعلاه ان المستقيم هو مجموعة من النقاط غير ان هذا لا يعتبر تعريفاً للمستقيم لان أي شكل في الهندسة هو مجموعة من النقاط لكن هذا يوضح العلاقة بين النقطة و المستقيم ويساعدنا في توضيح ماذا نعني بالمستقيمات المتساوية او المختلفة.

تعريـف (1) : تكون المجموعتان متساويتين اذا وفقط اذا احتوت بالضبط على نفس العناصر .

مبرهنـــة (1) : توجد في الأقل ثلاث نقاط في النظام .

البرهان : يستنتج مباشرة من البديهيات 2 و 3 و 4 (واجب) .

مبرهنة (2) : أي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر

(البرهان واجب) .

ملاحظة : يمكن ان يعبر عن البديهية (1) بقولنا ان الخط يتعين بنقطتين .

بديهيات الترتيب (Axioms of Order)

ان بديهيات الوقوع والوجود ليست كافية لاشتقاق بعض المبرهنات المعروفة في الهندسة الاقليدية وليست كافية لوجود اكثر من نقطتين على خط و لا وجود عدد غير منتهي من النقاط على الخط ولا تتضمن وجود عدد غير منته من النقاط بين أي نقطتين ولا يمكن ان نتكلم عن نقطة بين نقطتين و لا يمكن ان نتكلم عن قطعة مستقيم او المقارنة بين القطع أيهما الأكبر او الأصغر كل هذا يأتي من العلاقة (بين) فقد اهمل اقليدس هذه العلاقة في بديهياته لكنه استنتجها من الرسم لكن هذا لا يعني اننا لا نستخدم الرسم غير انه لا يكون جزءا من البرهان.

قاعـدة لغـويـة : " بين " هي كلمة أولية تقنية ويرمز للعبارة (B تقع بين A و C) بالرمز A-B-C .

مجموعة البديهيات :

بديهية (5): A-B-C اذا وفقط اذا C-B-A .

بديهية (6): اذا كان A-B-C فان النقاط A,B,C مختلفة وتقع على مستقيم واحد .

بديهية (7): اذا كانت A,B,C أي ثلاث نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد فان واحدة فقط مما يلي تتحقق A-B-C , B-C-A , C-A-B .

رمـــز : الرمز A-B-C-D هو مختصر الى

A-B-C , A-B-D , A-C-D , B-C-D وبنفس الطريقة بالنسبة لأكثر من اربع نقاط .

بـــديهـــية (8): اذا كانت A,B,C,D أربعة نقاط مختلفة وعلى مستقيم واحد وان A-B-C فان واحدة فقط مما يلي تتحقق : اما D-A-B-C او A-D-B-C او A-B-D-C او A-B-C-D

بديـــهيـــة (9) : اذا كانت A,B أي نقطتين فان :

1. توجد نقطة C بحيث ان A-B-C .
2. توجد نقطة D بحيث ان A-D-B .
3. توجد نقطة E بحيث ان E-A-B .

مـبــرهنــة (3) :

1. اذا كان A-B-C , A-C-D فان النقاط A,B,C,D مختلفة و على مستقيم واحد.
2. اذا كان A-B-D, B-C-D فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد.(واجب)
3. اذا كان A-B-C , B-C-D فان النقاط A,B,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد (واجب).

برهــان (1) : من البديهية (6) بما ان A-B-C فان النقاط A,B,C مختلفة وعلى مستقيم واحد وكذلك بما ان A-C-D فان النقاط A,C,D مختلفة وعلى مستقيم واحد . اذا كان B = D فان بتعويض ذلك في A-C-D يؤدي الى ان A-C-B (ولكن من الفرض A-B-C) وهذا يناقض بديهية (7) لذلك فان النقاط A,B,C,D تكون مختلفة .

من البديهية (1) يوجد مستقيم واحد فقط يتعين من C,A بما ان D,B تقعان على المستقيم AC فان A,B,C,D تقع على مستقيم واحد .

مبـرهنــة (4) :

1. اذا كان A-B-C , A-C-D ← A-B-C-D .
2. اذا كان A-B-D , B-C-D ← A-B-C-D (واجب) .
3. اذا كان A-B-C , B-C-D ← A-B-C-D (واجب) .

برهــان (1): من المبرهنة (3) , A-B-C , A-C-D ← A,B,C,D مختلفة وعلى استقامة واحدة

وبما ان A-B-C فانه من بديهية (8) تتحقق واحدة فقط مما يلي :

A-B-C-D , A-B-D-C , A-D-B-C , D-A-B-C

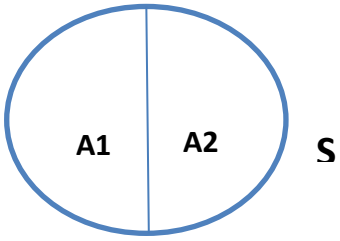
بما ان A-C-D فانه من البديهية (7) لا تتحقق كل من A-D-C وكذلك D-A-C و من هذا نستنتج انه لا تتحقق كل من A-B-D-C , A-D-B-C , D-A-B-C لذلك تتحقق فقط A-B-C-D .

مبــرهنة (5) : (واجب)

1. اذا كان A-B-D , A-C-D , B ≠ C فان A-B-C او A-C-B .
2. اذا كان A-B-C , A-B-D , C ≠ D فان B-C-D او B-D-C .
3. اذا كان A-B-C , A-B-D , C ≠ D فان A-C-D او A-D-C .

تعريف (2) :

اذا كانت المجموعة S هي اتحاد مجموعتين او اكثر جزيئتين غير خاليتين A_1 , A_2 بحيث ان كل عنصر في S هو عنصر في واحدة وواحدة فقط من المجموعات الجزئية فانه يقال A_1,A_2 تكونان تجزئة للمجموعة S .



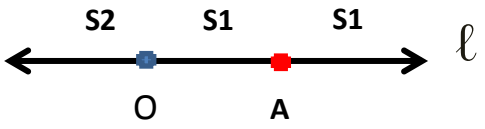
مثـال : المجموعتان {1,2} , {3,4,5,} تكونان تجزئة للمجموعة {1,2,3,4,5} .

تعريف (3) : لتكن O أية نقطة على مستقيم m , A نقطة أخرى على m .

لتكن S_1 مجموعة كل النقاط على m من ضمنها A وكل النقاط X بحيث ان O-X-A او O-A-X ، ولتكن S_2 مجموعة كل النقاط X بحيث ان X-O-A فان S_1 , S_2 تدعيان جهتي O على m و تدعيان أيضا نصفي المستقيم m بالنسبة الى O أي ان:

$S_1 = \{ x \in m : O\text{-}X\text{-}A \vee O\text{-}A\text{-}X \vee X=A \}$

$S_2 = \{ x \in m : X - O - A \}$



يقال عن المجموعتين S_1 , S_2 أنهما تتعينان من O , A .

مـــبرهـــنة (6) : جهتا النقطة O على المستقيم m لا يحتويان على O .

المعطيات : يوجد مستقيم m و توجد نقطة O على m .

المطلوب اثباته : جهتا النقطة O على المستقيم m لا يحتويان على O .

البـرهان : نفرض ان $S_1 \in O$ وبما ان $O \neq A$ فان O-O-A او O-A-O وهذا يخالف بديهية (6) وكذلك اذا كان $S_2 \in O$ فان O-O-A لذا فأن O لا تنتمي الى جهتي O .

تعـريـف (4) : لتكن S_1 , S_2 مجموعتين مختلفتين غير خاليتين ومنفصلتين و كلاً منهما منفصلة عن مجموعة S ويتحقق الشرطان التاليان :

1. لأي عنصر A في S_1 , B في S_2 توجد نقطة في S بين A , B .

2. لأي عنصرين B,A من نفس المجموعة لا توجد نقطة في S بينهما فانه يقال بأن S تفصل (Separates) S_1 و S_2.

مبـرهنــة (7): أية نقطة O على مستقيم m تفصل m الى جهتين بالنسبة الى O وتكونان مع O تجزئه للمستقيم m .

مبــرهنــة (8) : لتكن O , A , A' ثلاث نقاط مختلفة على مستقيم m , جهتا النقطة O على المستقيم m المتعينتين من A , O هما نفس الجهتين المتعينتين من A',O .

مــبرهـنة (9): لتكن O,O' نقطتين مختلفتين على مستقيم m . جهتا النقطة O على المستقيم m تختلفان عن جهتي النقطة O' على m .

القــطع (Segments)

التعـريف (5) : لتكن B,A نقطتين مختلفتين مجموعة كل النقاط X بحيث ان A-X-B تدعى قطعة ويرمز لها بالرمز A-B .

مــبرهنــة (10) : النقطتان B,A لا تنتميان الى A-B .
البرهان : اذا كان A, B∈ A-B فان A-A-B , A-B-B وهذا يناقض بديهية (6).

مبــرهنــة (11): A-B هي مجموعة غير خالية .
البرهــان : من البديهية (9) توجد نقطة C بحيث ان A-C-B أي ان C ∈ A-B و بهذا فأن A-B هي مجموعة غير خالية .

مــبرهنــة (12) : A-B = B-A .
المعطيات : يوجد قطعه A-B .
المطلوب اثباته : A-B = B-A .
البرهان : يجب ان نبرهن ان A-B هي مجموعة جزئية من B-A وان B-A هي مجموعة جزئية من A-B .

لكي نبين ان A-B هي مجموعة جزئية من B-A يجب ان نبرهن اذا كان X∈ A-B فان X ∈ B-A بما ان X∈ A-B فان A-X-B ومن بديهية (5) يكون B-X-A ومن التعريف (5) X ∈ B-A وبنفس الطريقة نبرهن الاتجاه الاخر . (واجب)

مبـــرهنـــة (13): A-B هي مجموعة جزئية من المستقيم AB .

المعطيات : يوجد مستقيم AB و يوجد قطعه مستقيم A-B .

المطلوب اثباته : A-B هي مجموعة جزئية من المستقيم AB .

البرهان : لكي نبين ان A-B هي مجموعة جزئية من المستقيم AB يجب ان نبرهن انه اذا كان X ∈ A-B فان X ∈ AB

ليكن X ∈ A-B ⟵ A-X-B

ومن البديهية (6) النقاط A,X,B مختلفة و على مستقيم واحد لذا فان X تقع على المستقيم AB .

مبـرهـنـة (14) : لتكن B,A نقطتين مختلفتين فان A-B = C-D اذا وفقط اذا كان {A,B} = {C,D} .

تعريف (6) : تدعى كل من B,A نقطة نهاية القطعة A-B .

مبـــرهنـــة (15): لتكن A-B قطعة و A-R-B فأن A-R , R-B مجموعتان جزئيتان من A-B .

البرهان : لكي نبرهن ان A-R هي مجموعة جزئية من A-B يجب ان نبين اذا كان X ∈ A-R فأن X ∈ A-B

ليكن X ∈ A-R ⟵ A-X-R ومن الفرض A-R-B

فانه من مبرهنة (4) يكون A-X-R-B ⟵ A-X-B ⟵ X ∈ A-B

وبنفس الطريقة نستطيع ان نبرهن ان R-B هي مجموعة جزئية من A-B (واجب).

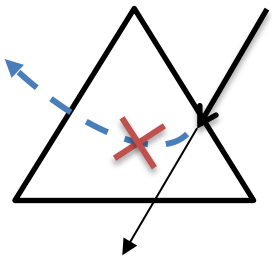
مـــبرهـــنـة (16) : أي نقطة R في القطعة A-B تفصل A-B الى مجموعتين جزئيتين غير خاليتين A-R , R-B واللتان تكونان مع {R} تجزئة للقطعة A-B .

بديـــهة بـــاخ (The Axiom of Pasch)

لقد صاغ العالم باخ بديهيته ليس فقط على انها عبارة اعتمد عليها في البراهين و لكن لأنه ليس بالإمكان برهنتها من بديهيات اقليدس المعروفة .

تعريـف (7) : لتكن A,B,C ثلاث نقاط مختلفة و لا تقع على مستقيم واحد ان اتحاد {A,B,C} مع القطع A-B , A-C , B-C يدعى مثلثاً وتدعى A,B,C الرؤوس وتدعى A-B ,A-C, B-C الاضلاع والخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع .المثلث الذي يتعين من A,B,C يرمز له بالرمز $\triangle ABC$.

بديهية بـــاخ : اذا كام مستقيم لا يمر بأي رأس من رؤوس مثلث ويقطع ضلعا واحدا في المثلث فانه يقطع **في الأقل** واحدا من الضلعين الاخرين .



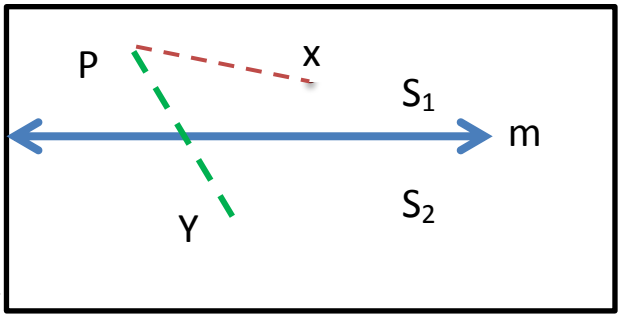
مبـــرهنة (17): اذا كان مستقيم يقطع ضلعا واحدا من مثلث فانه يقطع **في الأكثر** واحدا من الضلعين الاخرين .

نتيجة : المستقيم الذي يقطع ضلعا واحدا من مثلث و الذي لا يمر بأي رأس منه فانه يقطع ضلعا **واحدا فقط** من الضلعين الاخرين .

تعريف (8) : ليكن m أي مستقيم , P نقطة لا تقع على m لتكن S_1 مجموعة تحتوي على P و كل النقاط X لا تقع على m بحيث ان P-X لا تحتوي على نقطة من m .
لتكن S_2 مجموعة كل النقاط Y بحيث ان P -Y تحتوي على نقطة من m
فان S_1 و S_2 تدعيان جهتي المستقيم m وتدعيان أيضا نصفي المستوي بالنسبة للمستقيم m .

$S_1=\{ x : x \notin m : P\text{-}X \cap m = \varnothing \vee X=P \}$

$S_2 = \{ Y: Y \notin m : P\text{-}Y \cap m \neq \varnothing \}$



مبـــرهنة (18): جهتا المستقيم m غير خاليتين .

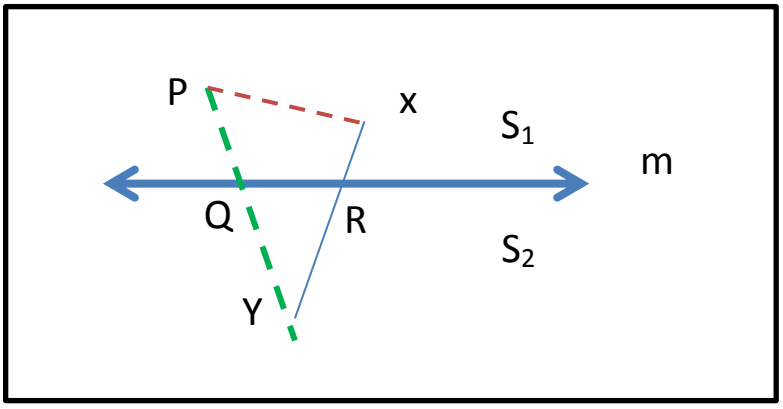
المعطيات : يوجد مستقيم m .

المطلوب اثباته : جهتا المستقيم m S_1 و S_2 غير خاليتين .

البرهـــان : ليكن m مستقيما , توجد نقطة Q على m ونقطة P لا تقع على m , من البديهية (9) توجد نقطة Y بحيث ان P-Q-Y ولذلك P-Y تحتوي على نقطة Q من m أي ان $Y \in S_2$ وعليه فان المجموعة S_2 هي مجموعة غير خالية .

توجد نقطة أخرى R على m ومن بديهية (9) توجد نقطة X بحيث ان X – R - Y , في $\triangle$ P X Y بما ان m يقطع الضلع P - Y في Q ويقطع الضلع Y - X في R فانه من مبرهنة (17) لا يمكن ان يقطع الضلع P - X

ومن بديهية (6) ومبرهنة (2) لا تقع X على m فانه $X \in S_1$ أي ان جهة المستقيم m المجموعة S_1 هي مجموعة غير خالية .



مبـــرهنـــة (19) : توجد جهتان فقط للمستقيم m وتكونان مع m تجزئة لمجموعة كل النقاط .

مبـــرهـــنة (20) : أي مستقيم m يفصل مجموعة كل النقاط الى جهتين .

مبـــرهنـــة (21) : ليكن m مستقيماً وp و 'p نقطتين لا تقعان على m . جهتا المستقيم m المتعينتين من P و m هما نفس الجهتين المتعينتين من 'P و m.

مبـــرهنة (22) : ليكن 'm و m مستقيمين مختلفين, جهتا المستقيم m تختلفان عن جهتي المستقيم 'm .