

الفصل الثاني

خواص النظام البديهي

في أي نظام بديهي توجد ثلاثة مفاهيم مهمة هي

- 1- الاتساق
- 2- الاستقلال
- 3- التمام

1- **الاتساق (Consistency)** يكون النظام البديهي متسقا اذا وفقط اذا لا توجد في النظام اي

بديهيتين او بديهية ومبرهنة او أي مبرهنتين بالشكل $(P, \sim P)$ أي بمعنى لا يوجد بينهما تناقض.

❖ ان النظام الذي يكون فيه عبارة ما ونفيها صحيحا يكون نظاما لا معنى له .

تعريف : تفسير النظام البديهي هو اعطاء معاني في الكلمات الاولية التقنية بطريقة بحيث تصبح

البديهيات اما صائبة او خاطئة .

تعريف : يقال للتفسير الذي يجعل كل بديهية في مجموعة من بديهيات صائبة بأنه نموذج

(Model) .

طريقة اختبار الاتساق : اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات فأن المجموعة تكون منسقة

اذا وجد نموذج لمجموعة من بديهيات فأن جميع البديهيات في النظام تكون عبارات صحيحة .

نماذج عن الاتساق :

نموذج (1) الهندسة الاقليدية الاعتيادية حيث ان الهندسة الاقليدية تعتبر نمودجا يتحقق فيه كل

البديهيات المستوي التآلفي .

نموذج (2) : يقوم صاحب محل صياغة بصنع حلية مكونة من سبع خرزات مختلفة الالوان وقد

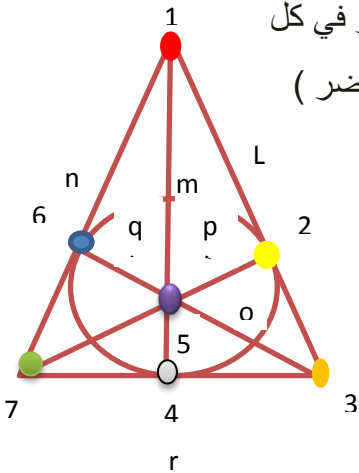
ربطها بسبعة اسلاك بحيث انه توجد ثلاثة خرزات في كل سلك ، وثلاث اسلاك تمر في كل

خرزة الالوان (الاصفر , الاحمر , البرتقالي , الابيض , البنفسجي, السماوي , الاخضر)

ان الحلية بدت كما في الشكل التالي:

في هذا النموذج تفسر (الخرزة) على انها نقطة و الاسلاك على انها مستقيم

وفي الجدول (النقطة) تمثل بعدد و(المستقيم) بعمود



L	m	n	o	p	q	r
1	1	1	2	2	3	3
2	5	6	4	5	5	4
3	4	7	6	7	6	7

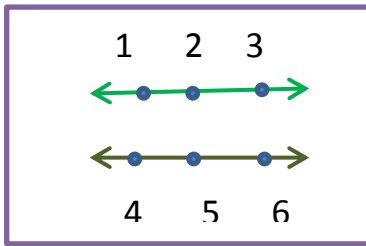
ان النموذج السابق يبين ان نظام فانو متسق

2- الاستقلال (Independence)

تعني الاستقلالية انه لا يوجد بديهية في النظام يمكن برهنتها من بقية البديهيات في النظام ففي هذه الحالة يمكن اعتبارها كمبرهنة .

تعريف : يقال عن عبارة انها مستقلة في مجموعة من عبارات اذا لم نتمكن من اشتقاقها من بقية العبارات في المجموعة .

طريقة اختبار الاستقلال : اذا كانت مجموعة بديهيات متسقة فعندما تبدل العبارة (المراد اختبارها) بنفيها للنظام الجديد فإن العبارة المراد اختبارها تكون مستقلة .



مثال على استقلال البديهية (1) : في نظام يونك

ليكن $\ell = \{1, 2, 3\}$, $m = \{4, 5, 6\}$ و ℓ , m مستقيمتان
نقاط 1,2,3,4,5,6

نفي بديهية (1) : اي نقطتين مختلفتين يحويهما مستقيم واحد فقط .

النفي متحقق هنا لان النقطتين 1,4 على سبيل المثال لا يوجد مستقيم يحويها

البديهية (2) متحققة لان كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط .

البديهية (3) متحققة لانه على سبيل المثال يوجد المستقيم ℓ وتوجد النقطة 4 مثالا تنتمي اليه .

البديهية (4) متحققة لانه اذا اخذنا المستقيم ℓ والنقطة 6 مثالا لا تنتمي اليه فيوجد المستقيم m يمر

من النقطة 6 (او يحوي 6) وكذلك m لا يتقاطع مع ℓ اي لا يوجد نقاط مشتركة بينهما لذلك

فإن بديهية (1) مستقلة .

مثال على استقلال البديهية (2) : في المستوي التآلفي (4 نقاط , 4 مستقيمتان)

. (تمرين)

مثال على استقلال البديهية (3) : (4 نقاط و مستقيم واحد) في

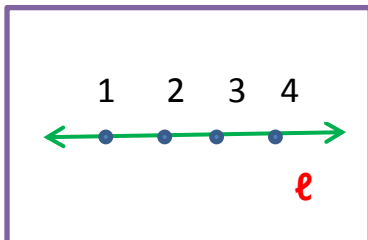
المستوي التآلفي $\ell = \{1,2,3,4\}$

1. البديهية الاولى : متحققة لان النقطتين $\{1,2\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين $\{1,3\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين $\{1,4\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .

النقطتين $\{2,3\}$ يوجد المستقيم ℓ يحويها وهو الوحيد .



النقطتين {2,4} يوجد المستقيم l يحويها وهو الوحيد .

النقطتين {3,4} يوجد المستقيم l يحويها وهو الوحيد .

2. البديهية الثانية : متحققة لأنه المستقيم الوحيد الموجود يحتوي على اربع نقاط .

3. البديهية الثالثة : [توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد l بحيث $A \notin l$

نفي هذه البديهية هو لا توجد نقطة A بحيث $A \notin l$

4. البديهية الرابعة متحققة لأنه لا يوجد نقطة لا تنتمي الى l . اذن البديهية (3) مستقلة .

مثال على استقلال البديهية (4) في نظام فانو: في نموذج الحلية (2) البديهيات

(1) و (2) و (3) متحققة اما البديهية الرابعة (من نقطة لا تنتمي الى المستقيم يوجد مستقيم وحيد

يمر من هذه النقطة ويوازي المستقيم المعلوم .)

نفيها هو (من نقطة لا تنتمي الى المستقيم لا يوجد مستقيم يمر من هذه النقطة ويوازي المستقيم

المعلوم) أي بمعنى لا توجد خطوط متوازية والنموذج (2) فيه كل المستقيمت متقاطعة.

أذن البديهية (4) متحققة.

ملاحظة : الاستقلالية هي غير اساسية حيث اذا وجدت احدى البديهيات غير مستقلة أي لانها

مبرهنة فبدلا من ان توضع في مجموعة البديهيات توضع في مجموعة المبرهنات .

3. التمام Completeness

يكون النظام البديهي غير تام اذا امكن اضافة بديهية مستقلة اما اذا لم تتمكن من اضافة مثل هذه

البديهية فأن النظام يكون تام .

يكون المستوى الاسقاطي غير تاما وكذلك المستوى التآلفي

بينما نظام يونك يكون تاما وكذلك نظام فانو (لماذا ؟) (واجب)

ملاحظة :- التمامية هي خاصية ليست اساسية وبصورة عامة غير مفضلة .