المستوي التآلفي (Affine Plane)

يتكون المستوي التآلفي α من مجموعة كلمات اولية تقنية [نقاط ونرمز لها بحروف كبيرة $A,B,C\ldots$ ومستقيمات ونرمز لها بحروف صغيرة $\ell , m,\ldots$] ومجموعة البديهيات كما يلي :

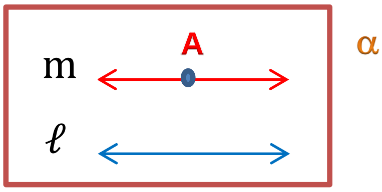
البديهية (1) و(2) و(3) نفس بديهيات المستوي الاسقاطي

امـــا البديهـــية (4) فهي اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان $\ell \cap m = \emptyset$.

تعريف : يقال لمستقيمين مختلفين انهما متوازيان اذا كان $\ell \cap m = \emptyset$

من هذا التعريف يمكن ان نعيد نص بديهية (4) بالشكل التالي :

اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث ان $A \notin \ell$ فأنه يوجد مستقيم واحد فقط m يمر من A ويوازي ℓ.



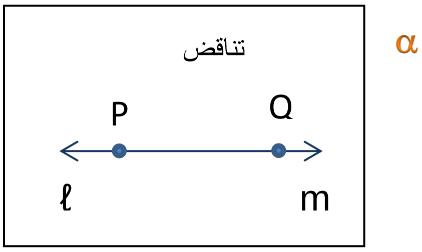
مبرهنة (4): أي مستقيمين مختلفين في مستوى تألفي يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر .

المعطيات : ليكن ℓ , m مستقيمين مختلفين في المستوي التآلفي α ، $\ell \neq m$.

المطلوب اثباته : ℓ , m يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر .

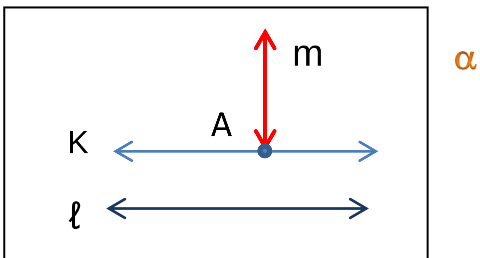
البـــرهـــان :-

ليكن المستقيمان ℓ و m يشتركان في نقطتين في الاقل P و Q من البديهية (1) ينتج ان $\ell = m$ وهذا تناقض { كون $\ell \neq m$ بالمعطيات} لذلك فأن اي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة علـــى الاكثـــر أي ان أي مستقيمين اما يكونا متوازيين او يتقاطعان في نقطة واحدة فقط .



مبـرهنـــة (5) : في المستوي التآلفي اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فأنه يجب ان يقطع الاخر .

المعطيات : ليكن ℓ , K مستقيمين متوازيين في المستوي التآلفي α ، m مستقيم اخر يقطع K في نقطة A.



المطلوب اثباته : m يقطع ℓ .

البـــرهـــان :-

ليكن ℓ ,K مستقيمين متوازيين وان m مستقيم اخر

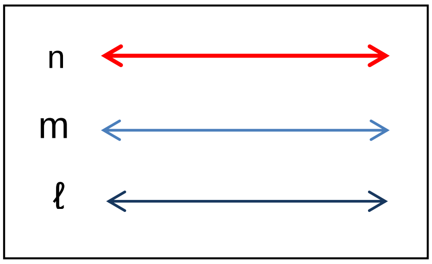
يقطع K في نقطة A . نفرض ان m يوازي ℓ فأنه من A سيكون هنالك المستقيمان m, K

يوازيان ℓ و هذا يخالف البديهية (4) { اذا كان ℓ مستقيما و A نقطة بحيث $A \notin \ell$ فأنه يوجد

مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان $\ell \cap m = \emptyset$ }

لذلك m لا يمكن ان يوازي ℓ وبهذا يكون m يقطع ℓ و هو المطلوب .

مبـــرهــنة (6) : في المستوي التآلفي المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان .



المعطيات : في المستوي التآلفي α ليكن $\ell \parallel n$, $\ell \parallel m$. α

المطلوب اثباته : $m \parallel n$.

البـــرهـــان :-

نفرض ان $n \nparallel m$ (n لايوازي m) أذن n يقطع m ,

من المبرهنة (5) ينتج ان n يقطع ℓ وهذا يتناقض المعطيات كون { $n \parallel \ell$ } أذن يجب

ان يكون $n \parallel m$ وهو المطلوب.

المستوى التألفي المنتهي : هو مجموعة منتهية (من النقاط و المستقيمات) تحققت

البديهيات من (1) الى (4) للمستوى التألفي.

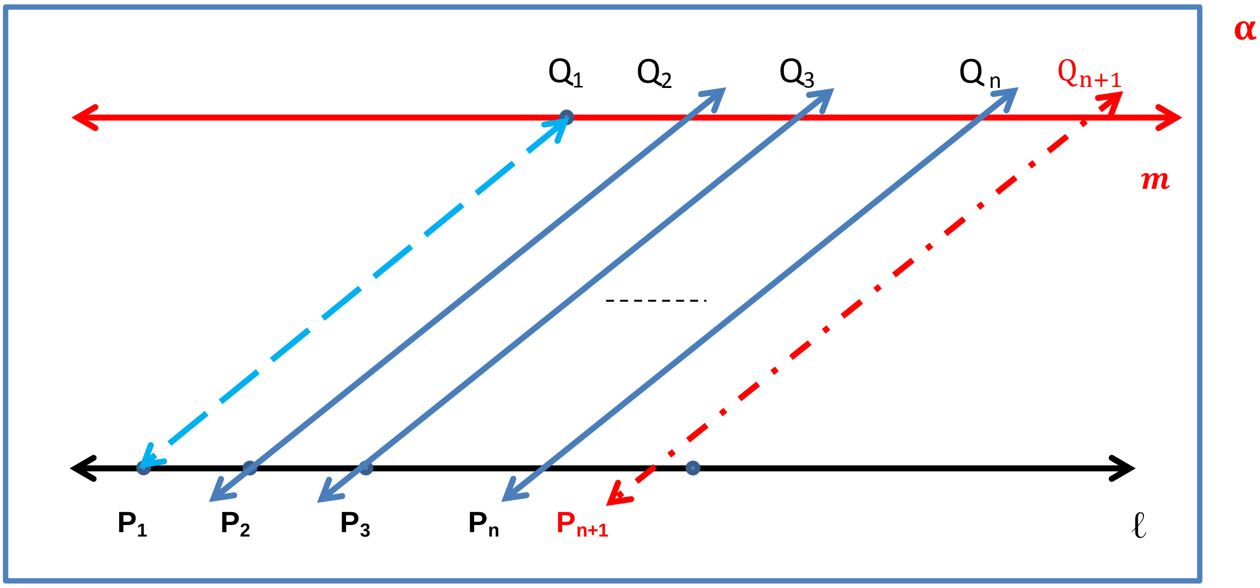
مبـــرهــنة (7): في المستوي التآلفي α اذا وجد مستقيم يحتوي بالضبط على n من

النقاط فأن أي مستقيم يوازي ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط .

المعطيات : في المستوي التآلفي α ليكن ℓ مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط

, $m \parallel \ell$.

المطلوب اثباته : المستقيم m يحتوي بالضبط على n من النقاط .



البــرهــان : نفرض ان ℓ مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقــاط $P_1,P_2,\dots P_n$ وليكن

m اي مستقيم بحيث $m // \ell$

يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقــاط

من البديهية (2) ← توجد نقطة Q_1 على m

من البديهية (2) ← يوجد المستقيم P_1Q_1

من البديهية (4) ← توجد بالضبط $n-1$ من المستقيمات الموازية الى P_1Q_1 من النقاط

$P_2,P_3,\dots P_n$

من المبرهنة (6) ← هذه المستقيمات تكون متوازية

من المبرهنتين (4) و(5) ← تقطع هذه المستقيمات المستقيم m في $n-1$ من النقاط

المختلفة ولتكن $Q_2,Q_3,\dots Q_n$ والتي تختلف عن Q_1 (من تعريف التوازي)

من هذا نستنتج انه توجد على الاقل n من النقاط على m

لكي نبرهن على وجود على الاكثر n من النقاط على m نفرض وجود نقطة اخرى ولتكن

$Q_n + 1$ علــى m

من البديهية (4) ← يوجد مستقيم يمر من Q_{n+1} يوازي P_1Q_1

من المبرهنتين (4) و (5) ← هذا المستقيم يقطع ℓ في نقطة غير النقاط $P_1,P_2,\dots,P_n$
وهذا يخالف الفرض .

حيث ℓ يحتوي بالضبط على n من النقاط ولذلك فأن m يحتوي بالضبط على n من النقاط .