Абуд А.Х., аспирант,
Дагестанский государственный университет

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ТРЕХКРАТНЫМИ КОРНЯМИ ОСНОВНОГО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация: рассмотрен параметрический операторный пучок нерегулярного типа с трехкратной характеристикой и периодическими краевыми условиями. Решена задача о трехкратном разложении трех произвольных функций в ряды по производным цепочкам для собственных функций пучка. Дается построение резольвенты пучка как мероморфной функции параметра. В основной теореме доказывается, что полный вычет по параметру от резольвенты, помноженной на s-тую степень параметра, равен s-той из разлагаемых нами функций.

Ключевые слова: функция Грина, собственные значения, собственные функции

1. Введение

Случай дифференциальных пучков с кратными характеристиками представляет естественную трудность в их изучении. Здесь отсутствуют общие исследования. Имеются ряд работ, относящихся к частным случаям [11] – [12], в которых рассматривался случай двукратных характеристик. В работе [4] рассмотрен случай пучка с четырехкратной характеристикой. Нами рассматривается пучок третьего порядка с регулярными в классическом понимании граничными условиями.

В отличие от предыдущих работ, относящихся к случаю двукратных характеристик устанавливается трехкратная разложимость трех произвольных функций в ряды Фурье по корневым элементам рассматриваемого пучка.

2. Постановка задачи

$$l(y) \equiv \left(\frac{d}{dx} - \lambda^2\right)^3 y(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (1)$$

с краевыми условиями периодического типа:

$$U_1(y) \equiv y(0) - y(1) = 0, \quad U_2(y) \equiv y'(0) - y'(1) = 0,$$
$$U_3(y) \equiv y''(0) - y''(1) = 0 \qquad (2)$$

Особенность модельной задачи (1) – (2) состоит в том, что единица является трехкратным корнем основного характеристического уравнения оператора (1). Основным инструментом исследования спектральных характеристик задачи служит функция Грина. Займемся ее построением. Мы будем исходить из элементарных решений уравнения $l(y) = 0$:

$$y_i(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = xe^{\lambda x}, \; y_3(x) = x^z e^{\lambda x} \qquad (3)$$

Одной из важнейших составляющих функции Грина является "функция Коши".

Определение. Функцией Коши уравнения (1) назовем функцию $g(x,\xi,\lambda)$, которая:

1) непрерывна вместе с производными первого порядка по x и ξ и лишь вторая производная по x имеет скачок равный единице при $x = \xi$.

2) В каждом из промежутков $(0,\xi),(\xi,1)$ является решением уравнения $l(y(x)) = 0$.

Замечание. Легко понять, что $g(x,\xi,\lambda)$ определено с точностью до любого решения уравнения $l(y) = 0$, заданного на всем интервале (0,1).

Утверждение 1. Функции

$$g(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < \xi \le x \le 1 \\ -\frac{1}{2}(x-\xi)^2 e^{\lambda(x-\xi)} & \text{при} \quad 0 \le x \le \xi \le 1 \end{cases} \qquad (4)$$

и

$$g(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-\xi)^2 e^{-\lambda(x-\xi)} & \text{при} \quad 0 < \xi \le x \le 1 \\ 0 & \text{при} \quad 0 \le x \le \xi \le 1 \end{cases} \qquad (4')$$

являются функциями Коши для уравнения $l(y) = 0$.

Проверка того, что эти функции удовлетворяют условиям 1), 2) тривиальна. Выражение (4) удобно к рассуждениям, касающихся полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$, а выражение (4′) в случае $\operatorname{Re}\lambda \le 0$. Обратим внимание на то, что нам не пришлось обращаться к утомительным, известным процедурам для нахождения $g(x,\xi,\lambda)$.

Приступим к исследованию аналитической по параметру природы мероморфной функции Грина используя ее известную конструкцию [10, с. 47]:

$$g(x,\xi,\lambda) = \frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \qquad (5)$$

где $\Delta(\lambda) = (1-e^{\lambda})\times$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & -e^{\lambda} & -e^{\lambda} \\ \lambda & 1-(1+\lambda)e^{\lambda} & -(2+\lambda)e^{\lambda} \\ \lambda^2 & 2\lambda-\lambda(2+\lambda)e^{\lambda} & 2-(\lambda^2+4\lambda+2)e^{\lambda} \end{vmatrix} = 2(1-e^{\lambda})^3, \qquad (6)$$