ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Вагабов А.И., доктор физико-математических наук, профессор,
Дагестанский государственный университет

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ДВУМЯ ДВУКРАТНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аннотация: рассмотрен нерегулярный параметрический дифференциальный пучок четвертого порядка с двумя двукратными корнями характеристического уравнения при распадающихся краевых условиях, три из которых заданы на правом конце интервала (0,1).

Установлена единая формула разложения четырех функций по производным цепочкам от собственных функций пучка.

Ключевые слова: функция Грина, собственные значения, собственные функции

1. **Введение.**

Теория регулярных краевых задач для обыкновенных линейных операторов, начиная от Лиувилля, Биркгофа, Я. Тамаркина, М.В. Келдыша, В.А. Ильина, их многочисленных последователей [1] – [11] получила в известной степени завершенную форму. Данная работа не входит в разряд известных регулярных задач. Она относится к случаю задач с кратными корнями их характеристических уравнений. В этом направлении имеются лишь частные исследования по полноте и базисности собственных элементов соответствующих дифференциальных пучков [3], [10], [11]. Нами рассматривается модельная спектральная задача четвертого порядка, в которой нарушено как условие простоты характеристических корней основного дифференциального выражения, так и классическое условие регулярности граничных данных.

Доказана теорема четырехкратной разложимости четырех произвольных функций по собственным элементам задачи.

2. Постановка задачи и предварительные построения.

Рассматривается дифференциальный операторный пучок

$$l(y) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^2 y, \ \ 0 < x < 1 \tag{1}$$

с комплексным параметром λ и с распадающимися краевыми условиями

$$U_1(y) \equiv y(1) = 0, \ U_s(y) \equiv \left.\frac{d^{s-2}y(x)}{dx^{s-2}}\right|_{x=0} = 0, \ s = 2,3,4 \tag{2}$$

Мы будем опираться на фундаментальные решения уравнения $l(y) = 0$ при $\lambda \neq 0$:

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}, y_3(x) = e^{-\lambda x}, y_4(x) = xe^{-\lambda x} \tag{3}$$

В случае $\lambda = 0$, взяв вместо (3) систему $1, x, x^2, x^3$, убедимся, что ноль не является собственным значением задачи, а также полюсом функции Грина, см. пункт 3. Для определителя $det\left\{\frac{d^{i-1}y_j(\xi)}{dx^{i-1}}\right\}_1^4$ матрицы Вронского, – $Y(\xi,\lambda)$ решений (3) элементарным подсчетом получаем равенство

$$\det Y(\xi,\lambda) \equiv |Y(\xi)| = -16\lambda^4. \tag{4}$$

Обозначим через $Z(\xi) \equiv Y^{-1}(\xi,\lambda)$, $z_k(\xi) = \frac{Y_{4k}(\xi)}{|Y(\xi)|}$, $k = \overline{1,4}$, где $Y_{4k}(\xi)$ – элементы последней строки в $Z(\xi)$. Простым подсчетом находим, что

$$z_1(\xi) = \frac{(\xi\lambda + 1)e^{-\lambda\xi}}{4\lambda^3}, z_2(\xi) = \frac{-e^{-\lambda\xi}}{4\lambda^2}, z_3(\xi) = \frac{(\xi\lambda - 1)e^{\lambda\xi}}{4\lambda^3}, z_4(\xi) = \frac{-e^{\lambda\xi}}{4\lambda^2} \tag{5}$$

Определение. Функцией Коши уравнения $l(y) = 0$ назовем функцию

$$g(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=1}^4 y_k(x)z_k(\xi) & при \ x \leq \xi \\ 0 & при \ x \geq \xi \end{cases}, \tag{6}$$

то есть, с учетом выражений для $z_k(\xi)$ функцию