***Sequences of Number متتالية الأعداد***

Definition A sequence (or infinites sequence) is a function of whose domain is the set of positive integers

هي دالة لمتغير يقتصر مداه على مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة (يُرمز له بالرمز n), فمثلاً إذا أعطينا n القيمة 1, 2, 3, 4, ….. على الترتيب فإن الدالة تعطي متتابعة أو متوالية الحدود ويُقال عن المتوالية بأنها متتالية لا نهائية نعني بذلك إنه لا يوجد لها حد أخير, وتسمى الدالة  *بـ الحد العام أو الحد ذو الرتبة* n *أو الحد النوني للمتتالية ويُشار للمتتالية غير المنتهية بوضع حدها العام بين قوسين مثل*  أو أو بكتابة عدة حدود من المتتالية مثل :

* يُقال عن متتالية إنها غير متناقصة إذا كانت
* يُقال عن متتالية إنها غير متزايدة إذا كانت

**Show that the sequence is decreasing ?**

***Limit of Sequences غاية المتتالية***

يُقال عن متتالية إنها متقاربة الى عددٍ منتهِ كنهايةٍ لها إذا وجد كل عدد موجب مهما كان صغيراً عدد صحيح موجب بحيث إذا كان فإن بعبارة أُخرى المتتالية تكون متقاربة إذا وجد L بحيث أن لكل فترة مفتوحة مركزها L تحتوي معظم حدود المتتالية.

*an*

----------------------------------------------------------------------

***L***

***n***

0 1 2 3 4 5 N n

إذا كانت المتتالية تقترب الى L فسنكتب أو

يُطلق على L غاية المتتالية

* تكون غاية المتتالية المتقاربة وحيدة.
* إذا كانت المتتالية متباعدة فإن حاصل ضربها بأي عدد مثل c ماعدا الصفر هي متتالية متباعدة أيضاً.

***Limit Theorems نظريات الغاية***

إذا كانت غاية المتتاليتين و موجودة ولها قيمة محددة أي أن:

 و  *فإن :*

 **قاعدة لوبتل**

اذا كانت

واذا كانت غاية النسبة عندما تقترب x الى a

كما تستخدم هذه القاعدة ايضا في حالة الحصول على الصيغة غير المحددة

*Example 1:* Evaluate the following limits as

1.
2.

H.W

Evaluate the following limits as

***Leibniz's Theorem***

لأختيار تقارب أو تباعد المتسلسلة المتناوبة الإشارة هناك نظرية هي مبرهنة ليبنز تتضمن ثلاث شروط إذا تحققت, فإن المتسلسلة تكون متقاربة هي:

1. جميع an موجبة.
2. لجميع قيم n.
3. .

***Limits That Arise Frequently الغايات التي تظهر بشكل متكرر***

Some limits arise so frequently such as:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

*Example 2:* Find the following limits as

1.

1.
2.
3.
4.

(7)

**H.W**

***Infinite Series المتسلسلات غير المنتهية***

 يُسمى المجموع لمتتالية غير منتهية بـ متسلسلة غير منتهية

الحد an يُسمى الحد العام للمتسلسلة أو يُسمى حدها النوني ويُرافق كل متسلسلة مجاميع جزئية

 يُمثل حاصل جمع n من الحدود الأولى ويُسمى حاصل جمع الجزئي النوني.

تكون المتسلسلة غير المنتهية متقاربة إذا كانت متتالية حاصل جمعها الجزئية **لها نهاية** أي:

أما *إذا كان متزايداً و متناقصاً عندما تزداد n دون إن يقترب من نهاية معينة فالمتسلسلة متباعدة أي ليس لها حاصل جمع.*

***Geometric Series المتسلسلات الهندسية***

 يُطلق على المتسلسلة غير المنتهية  *بالمتسلسلة الهندسية, حيث إن النسبة r تكون موجبة أو سالبة وحاصل جمعها الجزئي النوني هو المتتالية الهندسية.*

*يمكن إيجاد صيغة لـ بضرب طرفي المعادلة (1) بـ r*

*وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على:*

*إذا كانت فبالإمكان قسمة طرفي المعادلة (3) على (1-r) وينتج:*

1. *إذا كانت و في هذه الحالة يكون*

1. *إذا كانت و في هذه الحالة يكون*
2. *إذا كانت و فالمتسلسلة متقاربة وحاصل جمعها هو (صفر).*
3. *إذا كانت فالمتسلسلة تتقارب الى (a).*
4. *إذا كانت و فإن:*

 *حيث أن متتالية المجاميع الجزئية ليس لها نهاية محددة عندما فالمتسلسلة تكون متباعدة.*

 *نستنتج من ذلك بأن المتسلسلة الهندسية تكون متقاربة عندما* وحاصل جمعها هو , ومتباعدة عندما فيما عدا حالة واحدة (a=0) فإذا كانت (a=0) فالمتسلسلة متقاربة الى الصفر.

*Example 3:* Determine whether each series converges or diverges. If it converges, find its sum.

 Converges

H.W

**Theorems:**

1. إن مجموع المتسلسلة المتقاربة وحيد.
2. إذا كان فإن المتسلسلة متباعدة والعكس ليس صحيحاً. وهذا ما يُطلق عليه "إختبار الحد ذو الرتبة n للتباعد (nth- Term Test for Divergence) .
3. إذا كانت المتسلسلة متقاربة فإن والعكس ليس صحيحاً.
4. إذا كانت المتسلسلة متباعدة فإن حيث إن *C* مقدار ثابت يختلف عن الصفر , هي متسلسلة متباعدة كذلك.
5. إذا كانت المتسلسلة متقاربة الى A فإن حيث إن *K* مقدار ثابت يختلف عن الصفر , هي متسلسلة متقاربة الى KA.
6. إذا كانت المتسلسلة متقاربة الى A وإن المتسلسلة متقاربة الى B فإن متقاربة الى .
7. إذا كانت المتسلسلة متقاربة الى A وإن المتسلسلة متباعدة الى B فإن متباعدة.

*Example 4:* Determine whether each series converges or diverges. If it converges, find its sum.

اختيار الحدود والرتبة n للتباعد

Diverges by term test for Divergence

متباعدة

**Limit that arise frequently**

***Series with Non-Negative Terms المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة***

*تُكتب المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة بالشكل الآتي:*

*حيث إن جميع*

تكون متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة غير منتهية ذات حدود غير سالبة غير متناقصة أي أن:

***Tests for Convergence of Series with Non-Negative Terms***

1. **Ratio Test. النسبة اختبار**
2. **The nth - Root Test. اختبار الجذر النوني**
3. **The Integral Test. اختبار التكامل**
4. **Comparison Test. المقارنة اختبار**
5. **The limit comparison test اختبار المقارنة بأستخدام الغايات**

 **(1) *Ratio Test إختبار النسبة***

*تتقارب المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة إذا كان*:

*وتتباعد إذا كان*:

*ويفشل الاختبار في تحديد تقارب أو تباعد المتسلسلة إذا كان*:

*Example 7:* Use the Ratio test to determine whether the given series converges or diverges:

*الاختبار يفشل*

**(2) *The nth - Root Test إختبار الجذر النوني***

*لتكن متسلسلة ذات حدود غير سالبة ولو افترضنا ان*

فالمتسلسلة نتقارب اذا كان

*وتتباعد إذا كان*

*الاختبار يفشل إذا كان*

*Example 8:* Use the nth - Root test to determine whether the given series converges or diverges:

**(3) *The Integral Test اختبار التكامل***

 ليكن f(n) الحد العام للمتسلسلة ذات الحدود غير السالبة أي أن , فإذا كانت دالة لـ x موجبة, مستمرة, غير متزايدة لكل قيم فإن المتسلسة تكون متقاربة أو متباعدة تبعاً لوجود أو عدم وجوده.

*Example 5:* Use the integral test to determine whether the given series converges or diverges.

*Sol.*

 *التكامل ليس له قيمة محددة (غير موجود) فالمتسلسلة متقاربة.*

 *التكامل له قيمة محددة فالمتسلسلة متقاربة*

 *التكامل له قيمة محددة فالمتسلسلة متباعدة*

**(4) *Comparison Test إختبار المقارنة***

1. ***إختبار المقارنة للتقارب:***

 *تكون المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة متقاربة إذا كان كل حد من حدودها ( ربما بعد عدد محدد من الحدود) أصغر أو يساوي الى الحد المقابل من متسلسلة ذات حدود غير سالبة متقاربة معلومة أي أن .*

1. ***إختبار المقارنة للتباعد:***

 *تكون المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة متباعدة إذا كان كل حد من حدودها ( ربما بعد عدد محدد من الحدود) أكبر أو يساوي الى الحد المقابل من متسلسلة ذات حدود غير سالبة متباعدة معلومة أي أن .*

*تُستخدم المتسلسلات الآتية كمتسلسلات مقارنة:*

1. ***Geometric Series المتسلسلات الهندسية***

متقاربة عندما ومتباعدة عندما , *.*

1. ***P- Series P متسلسلة***

*تتقارب المتسلسلة عندما p >1 وتتباعد عندما .*

1. ***Harmonic Series المتسلسلات التوافقية***

وهي متسلسلة متباعدة دائماً.

كما يمكن استخدام أية متسلسلة سبق وأن تم اختبارها كمتسلسلة مقارنة.

*Example:* Use the Comparison test to determine whether the given series converges or diverges:

المتسلسلة متقاربة حاصل ضربها باي عدد () متسلسلة متقاربة ايضا متقاربة.

***(5) The limit comparison test المقارنة باستخدام الغايات***

(1) تتكون المتسلسلة ذات الحدود الغير السالبة متقاربة اذا كان

له قيمة محددة حيث ان هي متسلسلة ذات حدود موجبة متقاربة.

(2) تكون متسلسلة ذات الحدود غير السالبة متباعدة اذا كان

حيث ان هي متسلسلة ذات حدود موجبة متباعدة.

Example: Use the limit Comparison test to determine whether the following series converges or diverges:

حاصل ضرب باي عدد (3) متقاربة كذلك

 المتسلسلة الاصلية متقاربة

 المتسلسلة الاصلية متباعدة

***Series with Non-Positive Terms المتسلسلات ذات الحدود غير الموجبة***

*تكون جميع حدودها غير موجبة, فلدراسة تقارب أو تباعد مثل هذا النوع من المتسلسلات نعمل على إخراج العامل (1-) خارج حدود المتسلسلة لنحصل على متسلسلة ذات حدود غير سالبة, ثم يتم إختبار تقارب أو تباعد المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة بإحدى الإختبارات التي مر ذكرها.*

*Example 9:* Use the Comparison test to determine whether the given series converges or diverges:

*حاصل ضربها بأي عدد (4-) متسلسلة متقاربة كذلك.*

حاصل ضربها باي عدد متباعدة كذلك

**H.W**

**Absolute Convergence التقارب المطلق**

نقول عن المتسلسلة

ذات الحدود المختلفة (موجبة سالبة ) بانها متقاربة تقريباً مطلقاً اذا كانت

متقاربة

* كل متسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً تكون متقاربة .
* كل متسلسلة موجبة متقاربة تكون متقاربة تقريباً مطلقاً ، اذا كانت متباعدة فان مطلق متباعدة كذلك.

*Example 10:* determine whether the following series converge or absolutely

نأخذ القيم المطلقة للمتسلسلة الاصلية

 متقاربة

 المتسلسلة الاصلية متقاربة تقاربا مطلقا

**H.W**

يمكن في هذا النوع من المتسلسلات المتقاربة تقاربا مطلقا استخدام اختبار النسبة للتقارب المطلق فالمتسلسلة ذات الحدود المختلفة المتقاربة تقاربا مطلقا تكون متقاربة اذا كان

في حالة الاختبار يفشل

ملاحظة : اذا كانت متقاربة و متقاربة فلهما الاقتراب الى نفس المجموع عدا حالة ان جميع حدود موجبة

 مثال :

متقاربة لنفس المجموع

**Example:** Use the ratio test for absolute convergence determines whether the series converges or diverges:

***Alternating Series المتسلسلات المتناوبة***

تسمى المتسلسلة التي تأخذ حدودها بالتناوب إشارة موجبة وسالبة, حيث جميع قيم an موجبة، متسلسلة متناوبة الإشارة مثل:

***Leibniz's Theorem*** نظرية ليبنز

لاختبار تقارب أو تباعد المتسلسلة المتناوبة الإشارة هناك نظرية مبرهنة هي ليبنز تتضمن ثلاث شروط إذا تحققت, فإن المتسلسلة تكون متقاربة وهذه الشروط هي:

1. جميع an موجبة.

2. لجميع قيم n.

3. .

***Conditional Convergence التقارب الشرطي***

إذا كانت متسلسلة متقاربة في حين متسلسلة متباعدة, فإننا نقول إنها متقاربة تقارباً مشروطاً.

*Example:* classify the series as absolutely convergent, conditionally convergent or divergent:

متسلسلة متناوبة الإشارة حيث ان جميع an موجبة

تحقق الشرط لجميع قيم n

تحقق الشرط الثالث

المتسلسلة المتناوبة الاشارة متقاربة.

نأخذ متسلسلة القيم المطلقة.

متسلسلة ذات حدود غير سالبة هي المتسلسلة التوافقية وهي متباعدة دائما حاصل ضرب متسلسلة متباعدة باي عدد وهي متسلسلة متباعدة كذلك

 متسلسلة متقاربة تقاربا شرطيا

متسلسلة متناوبة الاشارة حيث ان جميع قيم موجبة

لم يتحقق الشرط لجميع قيم

لم يتحقق الشرط

 المتسلسلة متباعدة

***Partial sums of the series* المجاميع الجزيئية للمتسلسلات**

Example: determine whether the series converges or diverges if it converges, find its sum:

المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع

(2) prove that

H.W