Q12) Solve $(2y-x-4)\,dx = (2x-y+2)\,dy$ 10

$$2y-x-4=0$$
$$-y+2x+2=0 \quad \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3 \neq 0$$

$$2y-x-4=0$$
$$-2y+4x+4=0$$

$$3x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow y=2$$

$$(h,k)=(0,2)$$

$$x=x_1+h,\ y=y_1+k,\ x=x_1 \Rightarrow dx=dx_1$$

$$y=y_1+2 \rightarrow dy=dy_1$$

$$y_1=vx_1$$

$$dy_1=v\,dx_1+x_1\,dv$$

$$[2(y_1+2)-x_1-4]\,dx_1=[2x_1-(y_1+2)]\,dy_1$$

$$(2y_1+4-x_1-4)\,dx_1=(2x_1-y_1-2+2)\,dy_1$$

$$(2vx_1-x_1)\,dx_1=(2x_1-vx_1)(v\,dx_1+x_1\,dv)$$

$$(2vx_1-x_1-2x_1v+v^2x_1)\,dx_1-(2x_1^2-x_1^2v)\,dv=0$$

$$x_1(v^2-1)\,dx_1-x_1^2(2-v)\,dv=0$$

$$\int\frac{dx_1}{x_1}-\int\left(\frac{2-v}{v^2-1}\right)dv=\int 0$$

$$\ln|x_1|-\left(\int\frac{\frac{1}{2}}{v-1}\,dv-\frac{\frac{3}{2}}{v+1}\,dv\right)=\ln c$$

$$\ln|x_1|-\frac{1}{2}\ln|v-1|+\frac{3}{2}\ln|v+1|=\ln c$$

$$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-2}{x}-1\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y-2}{x}+1\right|=\ln c$$

$$\frac{2-v}{v^2-1}=\frac{2-v}{(v-1)(v+1)}=\frac{A}{v-1}+\frac{B}{v+1}$$

$$\rightarrow 2-v=A(v+1)+B(v-1)$$

$$2-v=Av+A+Bv-B$$

$$2-v=(A+B)v+(A-B)$$

$$A+B=-1,\ A-B=2$$

$$A=2+B$$

$$2+B+B=-1 \rightarrow 2+2B=-1$$

$$\rightarrow 2B=-3 \Rightarrow B=\frac{-3}{2}$$

(9)

$$\int -dx + \int \left(\frac{5}{7} - \frac{\frac{18}{7}}{7z+3}\right) dz = c$$

$$\begin{array}{r} \frac{5}{7} \\ 7z+5 \overline{) 5z+1} \\ -5z \mp \frac{25}{7} \\ \hline -\frac{18}{7} \end{array}$$

$$-x + \frac{5}{7}z - \frac{18}{49}\ln|7z+5| = c$$

$$-x + \frac{5}{7}(2x-3y) - \frac{18}{49}\ln|7(2x-3y)+5| = c$$

Q12) solve $(2x-3y-1)dx + \{6(2x-3y)-1\}dy = 0$

sol)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6-(-6) = -6+6 = 0$$

$$z = 2x-3y \rightarrow dz = 2dx - 3dy \rightarrow dy = \frac{2}{3}dx - \frac{1}{3}dz$$

$$(z-1)dx + (6z-1)\left(\frac{2}{3}dx - \frac{1}{3}dz\right) = 0$$

$$(z-1)dx + [4z\,dx - 2z\,dz - \frac{2}{3}dx + \frac{1}{3}dz) = 0$$

$$\left(z-1+4z-\frac{2}{3}\right)dx - \left(2z-\frac{1}{3}\right)dz = 0$$

$$5\left(z-\frac{1}{3}\right)dx - \left(2z-\frac{1}{3}\right)dz = 0$$

$$5\,dx - \frac{2z-\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{3}}dz = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ z-\frac{1}{3} \overline{) 2z-\frac{1}{3}} \\ \mp 2z \pm \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{3} \end{array}$$

$$5x - \left[2 + \frac{\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{3}}\right]dz = c$$

$$5x - 2z + \frac{1}{3}\ln\left|z-\frac{1}{3}\right| = c$$

$$5x - 2(2x-3y) - \ln\left|(2x-3y)-\frac{1}{3}\right| = c$$

$(2x_1 - 3vx_1)$ (8)

$(2x_1 - 3vx_1)\,dx_1 + (3x_1 - 2vx_1)(v\,dx_1 + x_1\,dv) = 0$

$(2x_1 - 3vx_1 + 3vx_1 - 2v^2x_1)\,dx_1 + (3x_1^2 - 2vx_1^2)\,dv = 0$

$2x_1(1 - v^2)\,dx_1 + x_1^2(3 - 2v)\,dv = 0$

$$\frac{2\,dx_1}{x_1} + \frac{(3 - 2v)}{1 - v^2}\,dv = 0$$

$$\int \frac{2\,dx}{x_1} + \int \frac{3 - 2v}{1 - v^2}\,dv = c$$

ملحوظة

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a}}$$

$$2\ln|x_1| + 3\tanh^{-1} v + \ln|1 - v^2| = c$$

$$\ln(x-1)^2 + 3\tanh^{-1}\left(\frac{y-2}{x-1}\right) + \ln\left|1 - \left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2\right| = c$$

Q11) solve the Diff. $(2x - 3y - 1)dx - (10x - 15y + 1)dy = 0$

sol//

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 10 & -15 \end{vmatrix} = -30 - (-30) = -30 + 30 = 0$$

$$\therefore [(2x - 3y) - 1]\,dx - [5(2x - 3y) + 1]\,dy = 0$$

let $z = 2x - 3y \Rightarrow dz = 2dx - 3dy \rightarrow 3dy = 2dx - dz$
$\rightarrow dy = \frac{1}{3}(2dx - dz)$

$(z - 1)dx - (5z + 1)dy = 0$

$(z - 1)dx - (5z + 1)(-\frac{1}{3})(dz - 2dx) = 0$

$(z - 1 - \frac{10}{3}z - \frac{2}{3})dx + \frac{1}{3}(5z + 1)dz = 0$

$(-\frac{7}{3}z - \frac{5}{3})dx + \frac{1}{3}(5z + 1)dz = 0$

$$-dx + \frac{5z + 1}{7z + 5}\,dz = 0 \rightarrow \int -dx + \int \frac{5z + 1}{7z + 3} = c$$

9) $x\bar{y} - y = \sqrt{x^2-y^2}$ (7)

sol $x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2-y^2}$

$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2-y^2}\,dx$

$y = vx$

$dy = v\,dx + x\,dv$

$x(v\,dx + x\,dv) - vx\,dx = \sqrt{x^2-v^2x^2}\,dx$

$\cancel{xv\,dx} + x^2dv - \cancel{vx\,dx} - x\sqrt{1-v^2}\,dx = 0$

$x^2dv - x\sqrt{1-v^2}\,dx = 0$

$\int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} - \int\frac{dx}{x} = \int 0$

$\sin^{-1}v - \ln|x| = c$

$\sin^{-1}\frac{y}{x} - \ln|x| = c$

Q10) solve the Diff. $(2x-3y+4)dx + (3x-2y+1)dy =$

sol $2x-3y+4=0 \quad \cdot -3$

$3x-2y+1=0 \quad \cdot 2$

$5y-10=0 \rightarrow y=2 \rightarrow 2x-6+4=0, x=1$

$(1,2)$

let $x = x_1+1,\ y = y_1+2$

$dx = dx_1,\ dy = dy_1$

$[2(x_1+1)-3(y_1+2)+4]dx_1 + [3(x_1+1)-2(y_1+2)+1]dy_1$

$[2x_1-3y_1]dx_1 + [3x_1-2y_1]dy_1 = 0$

let $v = \frac{y_1}{x_1} \rightarrow y_1 = vx_1 \rightarrow dy_1 = v\,dx_1 + x_1\,dv$

Q 8) solve $(x^2+y^2)dx - 2\overset{(\sigma)}{x}y\,dy = 0$, $x=2, y=0$

Sol $y = vx \rightarrow v = \frac{y}{x}$

$dy = v\,dx + x\,dv$

$[x^2+v^2x^2]dx - 2x^2v[v\,dx+x\,dv] = 0$

$x^2[1+v^2]dx - 2x^2v^2dx - 2x^3v\,dv = 0$

$x^2[1+v^2-2v^2]dx - 2x^3v\,dv = 0$

$x^2[1-v^2]dx - 2x^3v\,dv = 0$

$\int\frac{dx}{x} - \int\frac{2v}{1-v^2}dv = 0$

$\ln|x| - \ln|1-v^2| = \ln c$

$\ln|x| - \ln|1-\frac{y^2}{x^2}| = \ln c$

$\ln|2| - \ln|1-\frac{0}{2}| = \ln|c|$

$\ln^{-1}(\ln 2) = \ln^{-1}(\ln c)$

$\boxed{2 = c}$

(5)

c) $\sin^2 x \cos y \, dx + \sin y \sec x \, dy = 0$

Sol $\dfrac{\sin^2 x}{\sec x} dx + \dfrac{\sin y}{\cos y} dy = 0$

$\left(\sec x = \frac{1}{\cos x}\right)$

$\therefore \int \sin^2 x \cos x \, dx + \int \dfrac{\sin y}{\cos y} dy = 0$

$\dfrac{\sin^3 x}{3} - \ln|\cos y| = c$

(d) $x \, dy - (1+x) y \, dx = 0$

Sol $\int \dfrac{dy}{y} - \int \dfrac{(1+x)}{x} dx = 0$

$\ln|y| - \int \frac{1}{x} dx + \int dx = 0$

$\ln|y| - \ln|x| + x = c$

(e) $x \sin y \, dy + \cos y \, dx = 0$

Sol $\int \dfrac{\sin y}{\cos y} dy + \int \dfrac{dx}{x} = \int 0$

$-\ln|\cos y| + \ln|x| = c$

Q7). find the solution(s) of " the following:

ⓐ: $x(y^2-1)\,dx - y(x^2-1)\,dy = 0$

sol: $\dfrac{x(y^2-1)}{(y^2-1)(x^2-1)}\,dx - \dfrac{y(x^2-1)}{(y^2-1)(x^2-1)}\,dy = 0$

$\int \dfrac{x}{x^2-1}\,dx - \int \dfrac{y}{y^2-1}\,dy = \int 0$

$\frac{1}{2}\ln|x^2-1| - \frac{1}{2}\ln|y^2-1| = C$

$\ln|x^2-1| - \ln|y^2-1| = c_1 \;/\; 2c = c_1$

$\therefore \ln\left|\dfrac{x^2-1}{y^2-1}\right| = c$

$\therefore \dfrac{x^2-1}{y^2-1} = e^{c_1}$

ⓑ $xy^3\,dx + e^{x^2}\,dy = 0 \quad , y(0) = -1$ شرط ابتدائي

sol: $\int \dfrac{x}{e^{x^2}}\,dx + \dfrac{1}{y^3}\,dy = 0$

$\int x e^{-x^2}\,dx + \int y^{-3}\,dy = 0$

$-\frac{1}{2}e^{-x^2} + \dfrac{y^{-2}}{-2} = c$

$e^{-x^2} + y^{-2} = -2c$

$\because y(0) = -1 \rightarrow e^{-(0)^2} + \dfrac{1}{(-1)^2} = -2c \rightarrow c = -1$

$\therefore e^{-x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 2$

Q6) find the diff.$^{(3)}$ eq of the following

ⓐ $y^2 = 4x + c$

sol $2y \frac{dy}{dx} = 4 \quad \div 2$

$y \frac{dy}{dx} = 2$ is solution

ⓑ $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} \quad \text{----} (1)$

$y' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} \quad (2)$

$y'' = 4c_1 e^{-2x} + 9c_2 e^{3x}$

ضرب (٢) و (٣) اثنين

$2y' = -4\cancel{c_1 e^{-2x}} + 6c_2 e^{3x} \quad (\cdot 2)$

جمع $y'' = 4\cancel{c_1 e^{-2x}} + 9c_2 e^{3x}$

$2y' + y'' = 15c_2 e^{3x} \quad \text{---} (4)$

ضرب (١) و (٢) اثنين

$2y = 2\cancel{c_1 e^{-2x}} + 2c_2 e^{3x}$

$y' = -2\cancel{c_1 e^{-2x}} + 3c_2 e^{3x}$

$2y + y' = 5c_2 e^{3x} \rightarrow c_2 = \frac{2y+y'}{5e^{3x}}$

$\therefore 2y' + y'' = \overset{3}{\cancel{15}} \cdot \left(\frac{2y+y'}{\cancel{5}\cancel{e^{3x}}}\right) \cancel{e^{3x}}$

$2y' + y'' = 6y + 3y'$

$\therefore y'' - y' - 6y = 0$ is solution

Q4) Is $y = x\ln x - x$ solution of $x\frac{dy}{dx} = x+y$ (2)

sol $\because y = x\ln x - x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} + \ln x\cdot 1 - 1$

$y' = 1 + \ln x - 1 = \ln x$

$\because x\frac{dy}{dx} = x+y$

$\therefore x\cdot(\ln x) = x + (x\ln x - x)$

$x\ln x = \cancel{x} + x\ln x - \cancel{x}$

$x\ln x = x\ln x$

$\therefore y = x\ln x - x$ is solution of $x\frac{dy}{dx} = x+y$

Q5) Is $y = 3e^{-2x} + 4e^{x}$ solution of $y''' - 3y' + 2y = 0$

sol $y = 3e^{-2x} + 4e^{x} \Rightarrow y' = 3e^{-2x}\cdot -2 + 4e^{x}$

$\Rightarrow y'' = 12e^{-2x} + 4e^{x} \Rightarrow y''' = -24e^{-2x} + 4e^{x}$

$\because y''' - 3y' + 2y = 0$

$\Rightarrow (-24e^{-2x} + 4e^{x}) - 3(-6e^{-2x} + 4e^{x}) + 2(3e^{-2x} + 4e^{x}) = 0$

$-24\cancel{e^{-2x}} + 4\cancel{e^{x}} + 1\cancel{8}e^{-2x} - 1\cancel{2}e^{x} + \cancel{6}e^{-2x} + \cancel{8}e^{x} = 0$

$\therefore y = 3e^{-2x} + 4e^{x}$ is solution of $y''' - 3y' + 2y$

Examples (1)

Q1) show that $y = e^{2x}$ is solution of $y' - 2y = 0$

sol

$y = e^{2x} \longrightarrow y' = 2e^{2x}$

$\because y' - 2y = 0 \longrightarrow 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$

$\therefore y = e^{2x}$ is solution

Q2) show that $y = a\cos x + b\sin x$, a, b constants ثوابت

is solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

sol

$y = a\cos x + b\sin x$

$y' = -a\sin x + b\cos x$

$y'' = -a\cos x - b\sin x$

$\because \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

$\therefore -a\cos x - b\sin x + (a\cos x + b\sin x) \stackrel{?}{=} 0$

$-\cancel{a\cos x} - \cancel{b\sin x} + \cancel{a\cos x} + \cancel{b\sin x} = 0$

$\therefore y = a\cos x + b\sin x$ is solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

Q3) prove that solution of $y'' + y = 0$

is $y = \sin x$.

sol

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$

$\because y'' + y = 0 \Longrightarrow (-\cancel{\sin x}) + (\cancel{\sin x}) = 0$

$\therefore y = \sin x$ is solution of $y'' + y = 0$

$$df = \frac{\partial f.}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (3x^2 + 3xy^2)\, dx$$

$$+ (3x^2 y - 3y^2 + 2y)\, dy = 0$$

لأن تفاضل الثابت الاختياري صفر والطرفين الاخرين هو للمعادلة التفاضلية في السؤال .

مثال (2) : حل المعادلة التفاضلية

$$(\text{Sin } 2\theta - 2r \text{ Cos } 2\theta)\, dr + (2r \text{ Cos } 2\theta + 2r^2 \text{ Sin } 2\theta)\, d\theta = 0$$

الحل : نقارنها مع $Mdr + Nd\theta$ ثم نجري الاختبار

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = 2 \text{ Cos}\theta + 4r \text{ Sin } 2\theta$$

$$\frac{\partial N}{\partial r} = 2 \text{ Cos}\theta + 4r \text{ Sin } 2\theta$$

وينتج $\frac{\partial N}{\partial r} = \frac{\partial M}{\partial \theta}$ وهكذا فالمعادلة تامة .

يمكن اختيار $A(0,0)$ بدل $A(a,b)$ النقطة الثابتة في برهان المبرهنة 2.1 . لأن كلاً من M ، N ومشتقاتهما الجزئية مستمرة في (0,0) ، فينتج

$$f(r,\theta) = \int_0^r (\text{Sin } 2\theta - 2t \text{ Cos } 2\theta)\, dt + \int_0^{\theta} [2(0) \text{ Cos } 2\theta + 2(0)^2 \text{ Sin } 2\theta]\, d$$

$$f(r,\theta) = r \text{ Sin } 2\theta - r^2 \text{ Cos } 2\theta = C$$

وهو الحل المطلوب .

مثال 3 : حل المعادلة التفاضلية

$$(3x^2 + \frac{2y}{x})\, dx + (2 \log 3x + \frac{3}{y})\, dy = 0\, , x > 0, y \neq 0$$

الحل : نقارنها مع $Mdx + Ndy$ ونختبر تماميتها

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x}\, , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2\, \frac{3}{3x} + 0 = \frac{2}{x}$$

فالمعادلة تامة لأن النتيجتين متساويتان

لاكمال الحل ، نختار نقطة ثابتة غير (0,0) لأن الدالتين M و N غير معرفتين فيها . مثل (1,1) فيكون

وبهذا ينتهي برهان المبرهنة (2.1)

ملاحظة : اذا كان كل من M و N متعددة حدود . يمكن أخذ النقطة الاختيارية (0,0) بدل A(a,b) لأن متعددات الحدود ومشتقاتها مستمرة في R منطقة تواجدها .

مثال 1 : حل المعادلة التفاضلية

$$(3x^2 + 3xy^2)\,dx + (3x^2y - 3y^2 + 2y)\,dy = 0$$

الحل : نقارن الجهة اليسرى مع $M dx + N dy$ فتكون

$$M = (3x^2 + 3xy^2) \quad ; \quad N = 3x^2y - 3y^2 + 2y$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 6xy \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy$$

وبهذا ينتج $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ وتكون المعادلة تامة .

ثم نجري التكامل حسب ماجاء في برهان المبرهنة (2.1).

$$f(x,y) = \int_0^x (3t^2 + 3ty^2)\,dt + \int_0^y (0 - 3t^2 + 2t)\,dt$$

$$= x^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 - y^3 + y^2 = C$$

هذا هو الحل المطلوب .

ويمكن تحقيق صحة هذا الجواب بحساب التفاضل التام

تامة هو

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بفرض N, M ومشتقاتهما الجزئية دوال مستمرة في y, x ضمن منطقة تواجدهما R المحددة بـ $|x - x_0| \leq \alpha$ و $|y - y_0| \leq \beta$

البرهان : القسم الأول .

نفرض المعادلة التفاضلية تامة ، فحسب التعريف ، توجد دالة $f(x,y)$ بحيث

$$df = M dx + N dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

فإذا ثبتنا y وجعلنا x متغيرة نحصل على $M = \frac{\partial f}{\partial x}$

واذا ثبتنا x وجعلنا y متغيرة نحصل على $N = \frac{\partial f}{\partial y}$

وبحساب $\frac{\partial M}{\partial y}$ و $\frac{\partial N}{\partial x}$ ينتج

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

لكن $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ لأن f قابلة التفاضل فهي مستمرة وكذلك M و N ومشتقاتهما الجزئية مستمرة في منطقة تواجدها .

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

وهكذا فالمعادلة التفاضلية تحقق الشرط الضروري في للبرهنة.

القسم الثاني من البرهان

بالعكس ، اذا كان $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

علينا اثبات المعادلة التفاضلية تامة اي علينا أن نبحث عن دالة بحيث أن تفاضلها يساوي

$(2x + 3y - 1)\, dx = 4(x + 1)\, dy$ — 19

$(2y - x - 4)\, dx = (2x - y + 2)\, dy$ — 20

2.5 المعادلات التفاضلية التامة :

التفاضل التام للدالة $f(x,y)$ هو

$$d f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad (1)$$

الطرف الأيمن من (1) يسمى تفاضل تام . واذا ساوى هذا الطرف الأيمن صفراً اي اذا كان

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \qquad (2)$$

فعند ذلك تسمى (2) معادلة تفاضلية تامة ، ويكون حلها $f(x,y) = c$ حيث c ثابت اختياري

فمثلاً

$$d(xy + x - y - 3) = (y + 1)\, dx + (x - 1)\, dy$$

هو تفاضل تام والمعادلة التفاضلية

$$(y + 1)\, dx + (x - 1)\, dy = 0$$

هي معادلة تفاضلية تامة وحلها العام $xy + x - y = c$

والمعادلة $xy + x - y + 3 = 0$ هي حل خاص عندما $c = -3$

مبرهنة 2.1

ان الشرط الضروري والكافي لكي تكون المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$$

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتي:

مثال 2 : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$(4x + 2y + 3)\,dx - (6x + 3y - 2)\,dy = 0$$

الحل : مستقيما المعادلتين الجبريتين

$$4x + 2y + 3 = 0$$
$$6x + 3y - 2 = 0$$

متوازيان لأن ميل الأول $= -\frac{4}{2}$ يساوي ميل الثاني $-\frac{6}{3}$

نفرض $z = 2x + y$ فيكون $6x + 3y = 3z$ ، $4x + 2y = 2z$

ثم نفاضل هذه الفرضية ونعوض عن أحد المتغيرين بدلالة z والمتغير الآخر . أي مثلاً نعوض عن $y = z - 2x$ ، $dy = dz - 2dx$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية ونحصل على

$$(2z + 3)\,dx + (3z - 2)(2\,dx - dz) = 0$$

$$(8z - 1)\,dx - (3z - 2)\,dz = 0$$

$$dx = \frac{3z - 2}{8z - 1}\,dz = \left(\frac{3}{8} - \frac{13}{8}\,\frac{1}{8z - 1}\right)dz \quad , \quad |8z-1| \neq 0$$

$$x = \frac{3}{8}z - \frac{13}{64}\log|8z - 1| + C_1$$

ثم نرجع قيمة $2x + y = z$ ، ينتج

$$8(2x - 3y) + 13\log|16x + 8y - 1| = C$$

حيث $C = 64C_1$ وهذا هو الحل المطلوب.

تمارين 2.1

حل المعادلات التفاضلية في التمارين (1 – 8) الآتية

1 – $(y^2 + y)\,dx - (x^2 - x)\,dy = 0$

2 – $x^2(1 - y)^2\,dx + y(1 + x^2)\,dy = 0$

3 – $\sin^2 x \cos y\,dx + \sin y \sec x\,dy = 0$

4 – $x\,dy - (1 + x)\,y\,dx = 0$

5 – $x(1 - y)\frac{dy}{dx} + y(1 + x) = 0$

أي $(2x_1 - 3y_1)\,dx_1 + (3x_1 - 2y_1)\,dy_1 = 0$

تنتج معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الاولى . نفرض

$$y_1 = v\,x_1$$

ونعوض فنحصل على

$$(2x_1 - 3\,v\,x_1)\,dx_1 + (3x_1 - 2vx_1)(vdx_1)(vdx_1 + x_1 dv) = 0$$

أي

$$4\,\frac{dx_1}{x_1} + 5\,\frac{dv}{1+v} + \frac{dv}{1-v} = 0,\ x_1(1 - v^2) \neq 0$$

$$\therefore \quad \log x_1^4 \left| \frac{(1+v)^5}{1-v} \right| = c_1$$

وبارجاع $v = \dfrac{y_1}{x_1}$ ينتج

$$(y_1 + x_1)^5 = e^{c_1}(x_1 - y_1)$$

ثم بارجاع $x_1 = x - 1$ ، $y_1 = y - 2$ نحصل على

$$(x + y - 3)^5 = c\,(x - y + 1)$$

حيث $c = e^{c_1}$ ، وهو الحل المطلوب .

في حالة عدم امكانية حل المعادلتين الجبريتين

$$ax + by + c = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

أي عندما تمثلان خطين متوازيين . بمعنى ميل الاول يساوي ميل الثاني :

$$-\frac{a}{b} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

حيث محدد المعاملات للمتغيرات x و y يساوي صفر أي

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

عندئذ نفرض $z = ax + by$ فينتج $mz = \alpha x + \beta y$
حيث

$$m = \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}$$

ثم نعوض بقيم x و y المعطاة في المسألة ينتج

$$\log e + \frac{2e}{e} = C$$

وبذا تكون قيمة الثابت الاختياري $3 = C$

ويصبح حل المعادلة التفاضلية

$$y \log x + 2x = 3y$$

2.4 المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الخطية :

في المعادلة التفاضلية $(ax + by + c)\,dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)\,dy = 0$

حيث ان b.a ,...... ثوابت . نلاحظ ان المعاملات هي دوال خطية بالمتغيرين y.x وعليه تسمى معادلة تفاضلية ذات معاملات خطية . يمكن تحويل المعادلة ذات المعاملات الخطية الى معادلات تفاضلية من النوع المتجانس اذا كان للمعادلتين الجبريتين

$$M = ax + by + c = 0$$

$$N = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

حلاً . أي تمثلان خطين مستقيمين متقاطعين في نقطة مثل (h,k) عندئذ نفرض :

$$x = x_1 + h$$
$$y = y_1 + k$$

فتتحول المعادلة التفاضلية الى نوع متجانس بـ x_1 و y_1 .كما في المثال الآتي :

مثال (1): حل المعادلة التفاضلية

$$(2x - 3y + 4)\,dx + (3x - 2y + 1)\,dy = 0$$

الحل : هذه معادلة تفاضلية ذات معاملات خطية . نضع

$$2x - 3y + 4 = 0$$
$$3x - 2y + 1 = 0$$

ثم نحلها جبرياً فنحصل على $y = 2 ,\ x = 1$ ثم نفرض

$$y = y_1 + 2 \quad , \quad x = x_1 + 1$$

ونعوض في المعادلة التفاضلية فتتحول الى نوع متجانس كما يأتي

$$dy = dy_1 + 0 \quad , \quad dx = dx_1 + 0$$

$$[2(x_1 + 1) - 3(y_1 + 2) + 4]\,dx_1 + [3(x_1 + 1) - 2(y_1 + 2) + 1]\,dy = 0$$

وبالتعويض والتبسيط نحصل على

$$x(vdx + xdv) - vxdx = \sqrt{x^2 + v^2x^2}\ dx$$

أي

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{x}\ ; x \neq 0$$

$$\log|v + \sqrt{1 + v^2}| = \log x + \log C$$

$$v + \sqrt{1 + v^2} = Cx$$

ثم نرجع قيمة $v = \frac{y}{x}$ ينتج

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$$

وهو الحل المطلوب .

مثال (2) : حل المعادلة التفاضلية واحسب قيمة الثابت الاختياري اذا علمت

$$(2xy + y^2)\,dx - 2x^2dy = 0 \quad ,$$

$e = y$ عندما $e = x$

الحل : ان المعادلة التفاضلية من النوع المتجانس بدرجة ثانية . نفرض

$$y = vx$$

$$\therefore \qquad dy = vdx + xdv$$

ثم نعوض ، ينتج

$$x^2(2v + v^2)\,dx - 2x^2(vdx + xdv) = 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2\,dv}{v^2} = 0 \quad , \quad x \neq 0,\ v \neq 0$$

$$\log x + \frac{2}{v} = C$$

ثم نرجع قيمة v فنحصل

$$\log|x| + \frac{2x}{y} = C$$

وبذا تتحول الدالة المتجانسة

ضرب x^n في دالة للمتغير $z = \frac{y}{x}$

تسمى المعادلة التفاضلية

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (3)$$

بمعادلة تفاضلية من النوع المتجانس بـ x و y اذا كان كل من M ، و N دالة متجانسة بـ x و y ومتساوية بالدرجة .

لما كان $\left(\frac{y}{x}\right)$ يلعب دور المتغير الواحد في الدول المتجانسة (معادلة 2) يمكننا افتراض $\frac{y}{x} = v$ عند حل المعادلات المتجانسة وينتج

$$y = vx .$$

وباجراء التفاضل ينتج

$$dy = vdx + xdv$$

ثم بالتعويض في المعادلة (3) ، تتحول الى معادلة بمتغيرين x و v قابلة الانفصال حسب البند 2.2

مثال (1) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$x\,dy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$$

الحل : لما كانت المعادلة من النوع المتجانس بدرجة اولى ، نفرض

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

ثم نقسم الطرفين على $x(y+2) \neq 0$ من اجل فصل المتغيرات . نحصل على

$$\frac{y\,dy}{y+2} + \frac{2x^2 - 1}{x}\,dx = 0$$

$\ln|y+2|$ $\ln|x|$

وبالتكامل نحصل على الحل العام المطلوب وهو

$$y - 2\log|y+2| + (x^2 - \log|x|) = C$$

(2.3) المعادلات من النوع المتجانس :

يقال للدالة $f(x,y)$ بأنها متجانسة من الدرجة n اذا تحقق الشرط

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) \qquad (1)$$

فمثلاً (1) $f(x,y) = 7x^2 + 8xy - 9y^2$

دالة متجانسة من الدرجة الثانية لأن

$$f(tx,ty) = 7(tx)^2 + 8(tx)(ty) - 9\,(ty)^2$$

$$= t^2(7x^2 + 8xy - 9y^2) = t^2 f(x,y)$$

كل دالة بـ $\left(\frac{y}{x}\right)$ متجانسة من درجة صفر لأن .

$$f\left(\frac{ty}{tx}\right) = t^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$$

فمثلاً

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \tan\left(\frac{x}{y}\right) + \log\left(\frac{2x}{y} + 1\right) + 8$$

$$\therefore\ f\left(\frac{ty}{tx}\right) = \frac{1}{\left(\frac{ty}{tx}\right)^2} + \tan\left(\frac{tx}{ty}\right) + \log\left(\frac{2tx}{ty} + 1\right) + 8$$

$$= \frac{1}{(y/x)^2} + \tan\left(\frac{x}{y}\right) + \log\left(\frac{2x}{y} + 1\right) + 8$$

$$= f(y/x)$$

$$\therefore\ f\left(\frac{ty}{tx}\right) = t^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$$

: وتنقسم المعادلات التي يمكن ايجاد حلها بطريقة مباشرة الى عدة انواع . اهمها

1 المعادلات التي تنفصل متغيراتها
2 معادلات تفاضلية من النوع المتجانس .
3 معادلات ذات المعادلات الخطية .
4 معادلات تفاضلية تامة .
5 معادلات تفاضلية خطية - معادلة برنولي

في بنود هذا الفصل الاتية سوف نستعرض هذه المعادلات وطرق حلها

2.2 المعادلات التي تنفصل متغيراتها :

ان هذا النوع من ابسط الحالات ويمكن وضعها بالشكل

$$g(x)\,dx + h(y)\,dy = 0$$

ويتم الحل باجراء التكامل المباشر

مثال (1) حل للمعادلة التفاضلية الاتية

$$x^2(1-y^2)\,dx + y(1+x^2)\,dy = 0$$

الحل : نقسم طرفي المعادلة على $(1-y^2)(1+x^2)$ فتنفصل المتغيرات وتصبح كالاتي

$$\frac{x^2\,dx}{1+x^2} + \frac{y}{1-y^2}\,dy = 0 , \quad 1-y^2 \neq 0$$

ثم نكامل كل حد حسب طرق التكامل التي سبق وان درسها الطالب في موضوع التفاضل والتكامل فنحصل على :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{y}{1-y^2}\,dy$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx - \frac{1}{2}\int \frac{-2y\,dy}{1-y^2} = C$$

$$\therefore \quad x - \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log|1-y^2| = C$$

هذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال 2 . حل المعادلة التفاضلية

$$xy\,dy + (2yx^2 + 4x^2 - y - 2)\,dx = 0$$

الحل : بواسطة التحليل ينتج

$$yx\,dy + (2x^2 - 1)(y + 2)\,dx = 0$$

المعادلات التفاضلية من

الرتبة الأولى والدرجة الأولى

مقدمة :

ان حل المعادلة التفاضلية هو عمل معاكس لعملية التفاضل أي يقوم على عمليات التكامل . ومن المعروف أنه لايمكن ايجاد عكس تفاضل (بصورة مباشرة) لكل دالة . فلا نتوقع أن يكون لكل معادلة تفاضلية حل عام بدلالة الدوال الأولية المعروفة . ومن ذلك فالمعادلات التفاضلية التي يمكن حلها تقسم الى أنواع متعددة حسب طريقة الحصول على حلها العام .

في هذا الفصل سوف نستعرض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى بمتغيرين x و y

يمكن كتابة هذا النوع من المعادلات التفاضلية باحدى الأشكال الآتية :

$$g(x,y) + h(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

أو

$$g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy = 0$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

حيث f,g,h لاتحتوي على المشتقة y' .

ومع ان هذا النوع هو من المعادلات التفاضلية التي تبدو بسيطة . الا أنه ليس من الممكن ايجاد حل عام لأي منها بصورة عامة . ولا توجد طريقة عامة للحل . وعلى ذلك تقسم