طرائق حلول المعادلات ذات الحدود الغير متجانسة

حـل المعـادلات الغيـر متجانـسة $F(D,D')z = f(x,y)$ كمـا فـي المعـادلات التفاضـلية السابقة يتألف من الحل العام للمعادلة اعلاه:

$F(D,D')z = 0$ مضافا اليه الحل الخاص للمعادلة اعلاه.

$$\Rightarrow z = z_c + z_p$$

حيث z_c هو الحل العام للجزء المتجانس $F(D,D')z = 0$ والذي سنتطرق له الان

اما z_p فهو الحل الخاص للجزء غير المتجانس $F(D,D')z = f(x,y)$ ويتم ايجاده بنفس الطرق السابقة التي استخدمت في ايجاد الحل الخاص $z_p(x,y)$ للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية ذات الحدود المتجانسة والمعاملات الثابتة.

وعليه سوف يتم في هذا الفصل ايجاد الحل العام للمعادلة اعلاه.

وهناك عدد من الحالات عندما تكون المعاملات ثابتة او متغيرة.

اولاً:- معادلات ذات معاملات ثابتة وتقسم الى الحالات التالية :

أ- عندما تكون المعادلة بالصيغة :

$$F(D,D')z = (aD + bD' + c)$$

حيث ان c,b,a ثوابت أي ان المعادلة المطلوب حلها هنا هي:

$$(aD + bD' + c)z = 0$$
$$\Rightarrow (aD + bD')z + cz = 0$$
$$\Rightarrow (aD + bD')z = -cz$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{-cz}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{b} = \frac{dz}{-cz} \Rightarrow \frac{-c}{b}dy = \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{-c}{b}y = \ln z + c$$

حيث $c=\ln k_1$

$$\Rightarrow \frac{-c}{b}y + \ln k_1 = \ln z$$
$$\Rightarrow z = e^{\frac{-c}{b}y + \ln k_1}$$
$$\Rightarrow z = k_1 e^{\frac{-c}{b}y} \Rightarrow k_1 = ze^{\frac{c}{b}y} = u$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \Rightarrow bdx = ady \Rightarrow ady - bdx = 0$$
$$\Rightarrow ay - bx = k_2 = v$$
$$\Rightarrow u = \phi(v) \quad or \quad v = \phi(u)$$
$$\Rightarrow ze^{\frac{c}{b}y} = \phi(ay - bx)$$

$$\boxed{\therefore z = e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx) \quad or \quad z = e^{\frac{-c}{a}x}\phi(ay-bx)}$$

ex: $(2D - D' + 3)z = 0$

sol. a=2 , b=-1 , c=3

$\therefore z = e^{\frac{-3}{2}x}\phi(2y+x) \text{ or } z = e^{3y}\phi(2y+x)$

ex: $(D^2 - DD' - 2D'^2 + 2D - 4D')z = 0$

sol. $(D^2 - DD' - 2D'^2 + 2D - 4D')z = 0$

$\Rightarrow (D-2D')(D+D'+2)z = 0$

$\Rightarrow a_1 = 1 \quad , b_1 = -2, c_1 = 0, \quad a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 2$

$\Rightarrow z_c = e^{-\frac{c_1}{a_1}x}\phi_1(ay-bx) + e^{-\frac{c_2}{a_2}x}\phi_2(ay-bx)$

$\quad = \phi_1(y+2x) + e^{=2x}\phi_2(y-x)$

حيث ان ϕ_1 و ϕ_2 دوال اختيارية

H.w. $(D-2)(D'+2)(D+2D')(2D+3D'-5)z = 0$

Sol. $z_c = e^{2x}\phi_1(y) + e^{-2y}\phi_2(-x) + \phi_3(y-2x) +$

$\quad e^{\frac{5}{2}x}\phi_4(2y-3x)$

ب- عندما تكون المعادلة بالصيغة :

$F(D,D')z = (aD + bD' + c)^k z$

حيث k عدد صحيح موجب

$if \ k = 1 \Rightarrow (aD + bD' + c)z = 0$

Then the solution is:-

$$z = e^{\frac{-c}{b}y}\phi(ay-bx)\ or\ z = e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay-bx)$$

$$if\ \ k=2 \Rightarrow (aD+bD^{/}+c)^2 z = 0$$

$$\Rightarrow (aD+bD^{/}+c)(aD+bD^{/}+c)z = 0$$

$$let\quad u = (aD+bD^{/}+c)z$$

$$\therefore (aD+bD^{/}+c)u = 0$$

$$\therefore u = e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx)\ or\ u = e^{-\frac{c}{a}x}\phi(ay-bx)$$

$$\because u = (aD+bD^{/}+c)z$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx) = (aD+bD^{/}+c)z$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx) = (aD+bD^{/})z + cz$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx) - cz = (aD+bD^{/})z$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx) - cz}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \Rightarrow ady = bdx \Rightarrow ay - bx = k$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{b} = \frac{dz}{e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx) - cz}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}(e^{-\frac{c}{b}y}\phi(ay-bx) - cz) = \frac{dz}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{1}{b}e^{-\frac{c}{b}y}\phi(k) - \frac{c}{b}z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} + \frac{c}{b}z = \frac{1}{b}e^{-\frac{c}{b}y}\phi(k)$$

تحولت الى معادلة تفاضلية اعتيادية وتحل بطريقة عامل التكامل

$$\frac{dz}{dy}+p(y)z=\phi(y) \qquad \Rightarrow I.f.=e^{\int\phi(y)dy} \quad =e^{\int\frac{c}{b}dy} \quad =e^{\frac{c}{b}y}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy}e^{\frac{c}{b}y}+\frac{c}{b}ze^{\frac{c}{b}y}=\frac{\phi(k)}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}(e^{\frac{c}{b}y}.z)=\frac{\phi(k)}{b} \qquad *dy$$

$$\therefore z=\frac{e^{-\frac{c}{b}y}}{b}\phi(k)y$$

$$\therefore z=\frac{e^{-\frac{c}{b}y}}{b}y\phi(ay-bx)$$

$$\because k=ay-bx \Rightarrow y=\frac{k}{a}+\frac{b}{a}x$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{b}e^{\frac{-c}{b}y}(\frac{k}{a}+\frac{b}{a}x)\phi(ay-bx)$$

$$\Rightarrow z=e^{\frac{-c}{b}y}(\frac{k}{ab}+\frac{x}{a})\phi(ay-bx)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{ab}e^{\frac{-c}{b}y}\phi(ay-bx)+\frac{x}{a}e^{\frac{-c}{b}y}\phi(ay-bx)$$

$$=e^{\frac{-c}{b}y}\phi(ay-bx)+xe^{\frac{-c}{b}y}\phi_2(ay-bx)$$

$$s.t. \quad \phi_1(ay-bx)=\frac{k}{ab}\phi(ay-bx)$$

$$\phi_2(ay-bx)=\frac{1}{a}\phi(ay-bx)$$

$$\because z=e^{-\frac{c}{b}y}\sum\phi_1(ay-bx)+x\phi_2(ay-bx)$$

وهو الحل العام عندما تكون المعادلة $(aD+bD^{/}+C)^2z=0$

وبالاستقراء الرياضي والى n من المرات

$$\therefore z=e^{-\frac{c}{b}y}[\phi_1(ay-bx)+x\phi_2(ay-bx)+x^2\phi_3(ay-bx)$$
$$+.....+x^{K-1}\phi_k(ay-bx)$$

ex: $(D-2D^{/}+1)^4z=0$

sol. a=1 ,b=-2 ,c=1 ,k=4

$$\therefore z = e^{-\frac{c}{b}y}[\phi_1(ay-bx) + x\phi_2(ay-bx) + x^2\phi_3(ay-bx)$$
$$+ x^3\phi_4(ay-bx)]$$
$$\therefore z = e^{\frac{1}{2}y}[\phi_1(y+2x) + x\phi_2(y+2x) + x^2\phi_3(y+2x)$$
$$+ x^3\phi_4(y+2x)]$$

حيث ϕ_1 و ϕ_2 و ϕ_3 و ϕ_4 دوال اختيارية

H.w:

1- $(3D + 4D' + 5)^3 z = 0$

2- $(2D - D' + 4)^2 z = 0$

3- $(2D + 3D' - 1)^2 (D - 3D' + 3) z = 0$