

ج- عندما تتحلل المعادلة $F(D, D')z$ الى عوامل خطية من الصيغة (ب) مختلفة فيكون الحل في هذه الحالة مساويا لمجموعة الحلول الواردة في (ب) لكل القيم الممكنة للعدد k .

ex: $(2D - D' + 1)^2 (D + 3D' + 4)^2 z = 0$

sol. من المعادلة (1) $a=2, b=-1, c=1, k=2$

من المعادلة (2) $a=1, b=3, c=4, k=2$

$$\therefore z = e^y [\phi_1(2y+x) + x\phi_2(2y+x)] + e^{-\frac{4}{3}y} [\phi_3(y-3x) + x\phi_4(y-3x)]$$

حيث ϕ_1 و ϕ_2 و ϕ_3 و ϕ_4 دوال اختيارية

د- عندما تكون $F(D, D')z$ غير متضمنة عوامل خطية من الصيغة (ب) ففي هذه الحالة يكون الحل هو

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{a_i x + b_i y}$$

حيث A_i ثوابت اختيارية

ex: $(D^3 - D')z = 0$

* نستخرج b بدلالة a او a بدلالة b ثم نعوضها بالقانون

sol. $F(D, D') = F(a, b) = 0$

$$\Rightarrow a^3 - b = 0 \Rightarrow b = a^3$$

$$\therefore z = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{a_i x + a_i^3 y}$$

H.w.

$$1 - (3D + 4D')z = 0$$

$$2 - (D - D')z = 0$$

$$3 - (2D^2 - D'^2 + D)z = 0$$

$$4 - (D^2 + DD' - D'^2 + D - D')z = 0$$

$$5 - (D^3 + 3D^2 D' + 3DD'^2 + D'^3)(D^2 - 2DD' + D'^2 - 2D + 2D' + 1)$$

$$(D + 2D' + 1)(D^4 + D^2 D'^2 - 1)z = 0$$

هـ - عندما تتضمن $F(D, D')z$ عوامل خطية من الصيغة (ج) وعوامل غير خطية من الصيغة

(د) . لاحظنا في الحالات أ ، ب ، ج ان الحلول التي تنتج من العوامل الخطية في المعادلة

$F(D, D')$ تكون ذوات دوال اختيارية هي:

$$e^{\frac{-c}{b}y} x^k \phi(ay - bx)$$

اما في حالة (د) فان الحلول تكون من الصيغة :

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{a_i x + b_i y}$$

بحيث ان قيمة المعادلة $F(D, D')=0$ لذا فان المعادلة عندما تتضمن عوامل خطية وعوامل غير خطية فان حلها سيكون مجموع الحلول من الصيغ ج ، د .

$$\text{Ex: } (2D + 3D')(3D - 4D' + 5)(3D - D'^2)z = 0$$

$$\text{Sol. } a=2, b=3, c=0 \quad (1) \text{ من المعادلة}$$

$$a=3, b=-4, c=5 \quad (2) \text{ من المعادلة}$$

$$F(a,b)=3a-b^2=0 \Rightarrow a=\frac{1}{3}b^2 \quad (3) \text{ من المعادلة}$$

$$\therefore z = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{\frac{1}{3}b_i^2 x + b_i y}$$

$$\therefore z = \phi_1(2y - 3x) + e^{\frac{5}{4}y} \phi_2(3y + 4x) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{\frac{1}{3}b_i^2 x + b_i y}$$

$$H.W : 1 - (D^2 - 2DD' + D'^2)z = 3x - y$$

$$2 - (D^3 - 2D'D^2)z = e^{2x} + x^2 y + e^{3x}$$

$$3 - (DD')z = e^{x-y} \cdot xy^2$$

$$4 - (D - D')^2 z = x + 2y$$

$$5 - (D - 2D')^2 z = 2x + y$$

$$6 - (D^2 + D')z = \sin(x - 2y)$$

$$7 - D(D + 2D')(D + D')z = e^{x-2y}$$

$$8 - (2D^2 - 3D' + D + 1)z = 2e^{x+y} \sin(x - 2y)$$

$$9 - (DD'^2 + D^2 - 1)z = e^{2x} \cos 3y + e^y \sin 2x$$

$$10 - (3D^2 + D'^2 + D)z = x + 5y$$