م.م بان علاء عبد المجيد

قانون الجمع على الاحتمال

اذا كان الحدثان متنافيان	اذا كان الحدثان غير متنافيات
اي لا توجد عناصر مشتركة بين الحدثين ($A \cap B = \emptyset$)	اي توجد عناصر مشتركة بين الحدثين($A \cap B \neq \emptyset$)
قانون الجمع : $P(AUB)= P(A) + P(B)$	قانون الجمع: $P(AUB)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال (1) عند رمي حجر النرد مرة واحدة في الهواء. فما هو احتمال ظهور الرقم (6) أو ظهور عدد من النقاط اقل من (4).

الحل :

1- كتابة فضاء العينة $S= \{1,2,3,4,5,6\}$

2- كتابة الحدثين كلا على حدة

الحدث الاول يمثل ظهور رقم (6) $A= \{6\}$

الثاني يمثل ظهور الارقام اقل من (4) $B=\{1,2,3\}$

3- بما انه توجد كلمة (أو) في السؤال يعني قانون الجمع

4- نقارن بين الحدثين هل يوجد تقاطع بينهم $A \cap B=\{\}$

5- نوجد احتمال كل حدث: $P(A) = 1/6$

$P(B)=3/6$

6- نطبق القانون : $P(AUB)= P(A) + P(B)$

$= 1/6 + 3/6$

$= 4/6 = 2/3$

مثال (1) تم رمي حجر النرد مرة واحدة في الهواء فما احتمال الحصول على وجه يحتوي عدد زوجي او عدد اكبر من (4).

الحل: $S= \{1,2,3,4,5,6\}$

$A= \{2,4,6\}$ $P(A)=3/6$

$B=\{5,6\}$ $P(B)=2/6$

$A \cap B = \{6\}$ $P(A \cap B) = 1/6$

$P(AUB)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 3/6 + 2/6 + 1/6 \quad =2/3$

مثال (2) في تجربة ما كان : $P(A) =0.4 \quad P(B)=0.5$

$P(A \cap B)= 0.2$

$P(AUB)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.4 +0.5-0.2$

$= 0.7$

مثال (3) في تجربة ما كان لدينا $P(A)= 3/10$

$P(A \cap B)$ $P(B)= 5/10$ هل الحدثان متنافيان؟

$P(A) + P(B) = 3/10+ 5/10$

$= 8/10 = P (AUB)$

اذا الحدثيان متنافيان

مثال (4) في تجربة رمي حجر نرد ماهو احتمال ظهور عدد فردي او عدد اقل من (5)

اذا كان هنالك اكثر من حدثين وليكن (3) فأن عمليه الجمع (الاتحاد) تكون بالشكل الاتي:

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+(A\cap B\cap C)$$

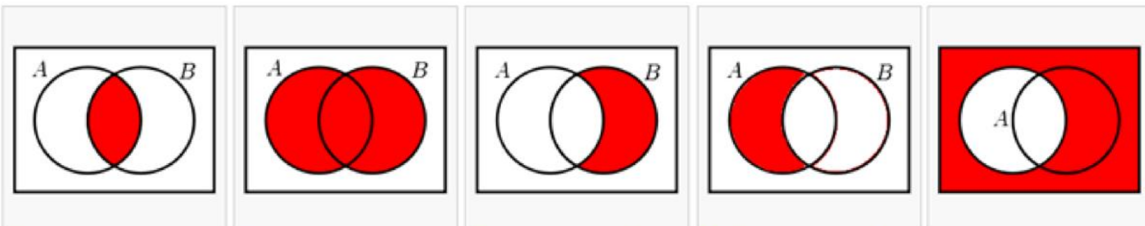
المتممة : وهي عدم حدوث حدث معين .

اذا كان لدينا حدث(A) فأن المتممة له رمز له بالرمز (A^C) او (Á) وتمثل جميع النتائج التي تنتمي الى فضاء العينة ولا تنتمي الى الحدث (A).

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

اي ان عدم أحتمال حدوث الحدث = 1− احتمال حدوثه

أشكال فن Venn Diagram



Intersection of two sets $A \cap B$ | Union of two sets $A \cup B$ | Relative complement of A (left) in B (right) $A^c \cap B$ | Relative complement of A (left) in B (right) $A \cap B^c$ | Absolute complement of A A^c

$A^c \cap B = B - A$ $A \cap B^c = A - B$

امثلة

1− عند رمي قطعة نقود مرة واحد وكان احتمال ظهور الرقم (5) هو(6/1) ماهو احتمال عدم ظهور الرقم (5)؟

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{5\}$ $\quad P(A)= 1/6$

$P(A^C) = 1-P(A)$

$= 1- 1/6$

$= 5/6$

2−اذا كان احتمال نجاح طالب في الامتحان هو (0.75) فما هو احتمال رسوبه؟

احتمال نجاحه P(A)

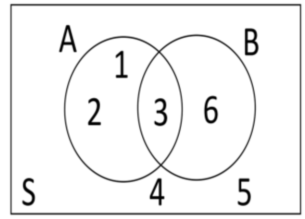
احتمال رسوبه :

$P(A^C) = 1-P(A)$

$= 1- 0.75$

$=0.25$

مثال:



$P(A) = \frac{3}{6}$

$P(B) = \frac{2}{6}$

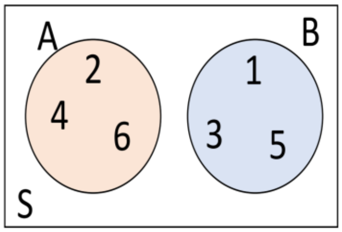
$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A^c) = 1 - P(A)$
$\rightarrow P(A^c) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$

$P(B^c) = 1 - P(B)$
$\rightarrow P(B^c) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$\rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
$\rightarrow P(A \cap B^c) = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$



$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$

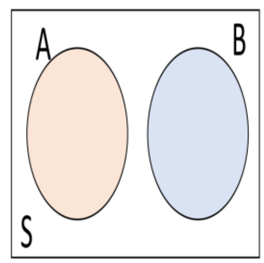
$P(B) = \frac{3}{6} = 0.5$

$P(A^c) = 1 - P(A)$
$\rightarrow P(A^c) = 1 - 0.5 = 0.5$

$P(B^c) = 1 - P(B)$
$\rightarrow P(B^c) = 1 - 0.5 = 0.5$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\rightarrow P(A \cup B) = 0.5 + 0.5 = 1$

مثال:



$P(A) = 0.6$

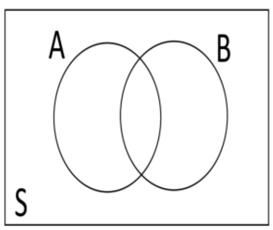
$P(B) = 0.3$

$P(A^c) = 1 - P(A)$
$\rightarrow P(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4$

$P(B^c) = 1 - P(B)$
$\rightarrow P(B^c) = 1 - 0.3 = 0.7$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\rightarrow P(A \cup B) = 0.6 + 0.3 = 0.9$

مثال:



$P(A) = 0.6$

$P(B) = 0.3$

$P(A \cap B) = 0.1$

$P(A^c) = 1 - P(A)$
$\rightarrow P(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4$

$P(B^c) = 1 - P(B)$
$\rightarrow P(B^c) = 1 - 0.3 = 0.7$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$\rightarrow P(A \cup B) = 0.6 + 0.3 - 0.1 = 0.8$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
$\rightarrow P(A \cap B^c) = 0.6 - 0.1 = 0.5$

الاحتمال الشرطي

هو احتمال حدوث حدث A بشرط أن حدث B قد وقع فعلاً. اي ان الحدث B قد حدث قبله, وبشرط ان الحدثين غير مستقلين.

يرمز له بـ: P(A/B) ويُقرأ: احتمال A بشرط B.

القانون الاساسي :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , \quad B\neq 0$$

اما اذا كان العكس اي ان الحدث (B) هو الذي يعتمد حدوثه على الحدث (A) فأن الاحتمال الشرطي يكون :

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad A\neq 0$$

وفي حال حدوث الحدثين بنفس الوقت فأن الاحتمال يحسب بالشكل التالي :

$$P(A\cap B) = P(A) * P(A/B)$$

مثال1 : عند رمي قطعة نقود مرتين , اوجد احتمال الرمية الاولى صورة والرمية الثانية كتابة.

الحل / ليكن:

S= {HH, HT, TH , TT}

A: الرمية الأولى صورة {HT, HH} $P(A)=2/4$

B: الرمية الثانية كتابة {HT, TT } $P(B) = 2/4$

$A\cap B$: {HT} $P(A\cap B)= 1/4$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2$$

مثال2 : صندوق يحتوي (3 كرات بيضاء و (5) كرات حمراء و (2) زرقاء) تم سحب كرتين من هذا الصندوق وبدون ارجاع (اي سحب الكره الاولى وتركت خارج الصندوق وسحبت الكرة الثانية) اوجد:

1- احتمال ان تكون الكرة الثانية حمراء اذا كانت الكرة الاولى بيضاء.

2-احتمال ان تكون الكرة الثانية بيضاء اذا كانت الكرة الاولى بيضاء

3- احتمال ان تكون كلتا الكرتين زرقاء.

الحل / مجموع الكرات قبل السحب هي (10)

1- احتمال ان تكون الثانية حمراء اذا كانت الاولى بيضاء

بعد سحب الكرة البيضاء :

* البيضاء يصبح عددها 2

*الحمراء 5

*الزرقاء 2

المجموع الجديد اصبح (9)

$P(R/W) = 5/9$

2- احتمال ان تكون الثانية بيضاء اذا كانت الاولى بيضاء

بعد السحبة الاولى البيضاء المتبقية هي 2

$P(W2/W1) = 2/9$

3- احتمال كلتا الكرتين زرقاء (اي ممكن نقول زرقاء وزرقاء)

$P(B1 \cap B2) = P(B1) * P(B2/B1)$

$= 2/10 * 1/9 = 1/45$

$P(B) = 2/10$ قبل السحب

مثال 3 : في شركة تحتوي على(40) موظف منهم (25) ذكور و (15) اناث تم سحب (10) منهم

ما احتمال أن المختار مهندس بشرط أنه ذكر؟

$P(F/M) = 10 / 25$

مثال 4 :رمي حجر نرد مرة واحدة فاذا كان الحدث الاول ظهور عدد زوجي اذا كان الحدث الاخر ظهور عدد اكبر من (3). اوجد $P(A/B)$

$A=\{2,4,6\} \quad P(A) = 3/6$

$B=\{4,5,6\}$ $P(B) = 3/6$

$A\cap B = \{4,6\}$ $P(A\cap B) = 2/6$

$P(A/B) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3$

عملية الضرب في الاحتمال

يستخدم لحساب احتمال حدوث حدثين معا في نفس التجربة او في تجارب متتالية.

اي نحسب $P(A\cap B)$ وهو على نوعين

1- اذا كانت الاحداث مستقلة $P(A\cap B)$ OR $P(AB) = P(A)*P(B)$

2- اذا كانت الاحداث غير مستقلة $P(A\cap B)$ OR $P(AB) = P(A)*P(B/A)$

مثال (1) عند قطعة النقود مرة واحدة ما هو احتمال ظهور صورة وكتابة

احتمال ظهور صورة $P(A) = 1/2$

احتمال ظهور كتابة $P(B) = 1/2$

بما انه الحدثين مستقلين فأن: $P(AB) = 1/2*1/2 = 1/4$

مثال (2) صندوق يحتوي (3) كرات حمراء و (2) زرقاء سحبت كرتين بدون ارجاع ما هو احتمال الاولى حمراء و و الثانية زرقاء؟

بما انه بدون ارجاع فالحادثتين غير مستقلتين

احتمال الاولى حمراء $P(A) = 3/5$

احتمال الثانية زرقاء $P(B) = 2/4$

$P(B/A) = 2/4$

$P(AB) = 3/5 * 2/4 = 6/20 = 3/10$

مثال (3) لنفرض لدينا ثلاث اكياس متشابهة يحتوي كل منهما على مجموعة من الكرات الملونة .

الكيس الاول يحتوي (3 كرات خضراء و 4 حمراء و 5 صفراء)

الكيس الثاني يحتوي (5 كرات خضراء و 10 حمراء و 5 صفراء)

الكيس الثالث يحتوي (3 كرات خضراء و 2 حمراء و واحدة صفراء)

تم سحب كيس بصورة عشوائية من الاكياس الثلاثة ثم تم سحب كرة واحدة ماهي احتمالية الكرة المسحوبة خضراء؟

الحل :

احتمال سحب الكرة الخضراء من الكيس الاول $P(G1) = 3 / 12$

احتمال سحب الكرة الخضراء من الكيس الثاني $P(G2) = 5 / 20$

احتمال سحب الكرة الخضراء من الكيس الثالث $P(G3) = 3 / 6$

$P(\ ) = 3/12 * 1/3 + 5/20 * 1/3 + 6/6 * 1/3$

قانون الاحتمال الكلي Law Total Probability Law

قانون الاحتمال الكلي من أهم القوانين في الاحتمالات، ويُستخدم عندما يكون لدينا عدة حالات ممكنة تؤدي لنفس الحدث.

قانون الاحتمال الكلي يحسب احتمال حدث B عندما يمكن أن يحدث من خلال عدة أحداث متنافية ...,A1, A2 An.

الشروط

الأحداث A1, A2,...., An:يجب ان تكون

- ✔ متنافية
- ✔ مجموعها = فضاء العينة

القانون

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\dots+P(A_n)P(B|A_n)$$

اي :نحسب احتمال B من كل طريق ممكن، ثم نجمعهم.

قاعدة بيز : (Bayes Rule) وهو من اهم قوانين الاحتمال ويستخدم لمعرفة احتمال سبب معين بعد معرفة النتيجة.

ويمثل احتمال حدوث (A) بشرط ان (B) قد حدث

$$P(Ai / B) = \frac{p(Ai)*p(B\backslash A)}{P(A1)*P(B\backslash A1)+P(A2)*(B\backslash A2)+\cdots}$$

متى نستخدم قانون بيز ؟

1- عندما نعرف احتمالات الاسباب

2- معرفة النتيجة

2- نريد ان نعرف اي سبب هو الارجح .

مثال / 3 صناديق فيها كرات بالشكل التالي :

*الصندوق A يحتوي على 3 حمراء و 5 بيضاء

* الصندوق B يحتوي على 2 حمراء و 1 بيضاء

* الصندوق C يحتوي على 3 حمراء و 3 بيضاء

اختير احد الصناديق عشوائياً وسحبت منه كره فاذا كانت الكرة المسحوبة حمراء, ماهو احتمال ان تكون مسحوبة من الصندوق A ؟

الحل :

بما انه تم سحب كرة حمراء من 3 صناديق فالاحتمال لكل صندوق يكون 3/1

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$

نطبق القانون : $P(A/R) = \frac{P(A).\ P(R\backslash A)}{P(A).P(R\backslash A)+P(B).P(R\backslash B)+P(C).P(R\backslash C)}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}}$$

=

مثال / ثلاث ماكنات M1,M2,M3 تنتج على التوالي 30% , 50% , 20% وجد الانتاج الكلي للمصنع عشوائيا وان احتمال التلف هي على التوالي 80% و 10% و 40% اوجد احتمال :

1- ان تكون الوحدة تالفة

2- اذا كانت الوحدة تالفة اوجد احتمال انها من الماكنة الاولى

3- اذا كانت الوحدة تالفة اوجد احتمال انها ليست من الماكنة الاولى.

الحل: $P(M1) = 0.3$ $P(M2)= 0.5$ $P(M3) = 0.2$

$P(D/M1) = 0.8$ $P(D/M2) = 0.1$ $P(D/M3)= 0.4$

1- ان تكون وحدة تالفة : بما انه لم يتم تحديد من اي ماكنة بالضبط هذا يعني احتمال كل الطرق اي نطبق قانون الاحتمال الكلي:

$$P(M)=P(M_1)P(D|M_1)+P(M_2)P(D|M_2)+ P(M_3)P(D|M_3)$$

$$P(M) = 0.3(0.8)+0.5(0.1)+0.2(0.4) = 0.37$$

2- احتمال ان تكون التالفة من الماكنة الاولى

$$P(M_1/D) = \frac{P(M1).\ P(D\backslash M1)}{P(M1)P(D|M1)+P(M2)P(D|M2)+ P(M3)P(D|M3)}$$

$$P(M_1/D) = \frac{0.3(0.8}{0.37} = 0.24 / 0.37 = 0.64$$

3- احتمال التالف ليست من الماكنة الاولى

$$= 1- P(M_1/D) \quad = 1- 0.64 = 0.36$$