نظرية الألعاب (المباراة)

Game Theory

1-9 المقدمة :

هي فرع من فروع علم الرياضيات الحديثة نسبيا، وتهتم نظرية المباراة بالتحليل الرياضي لمواقف الصراع والمنافسة والمواقف التي يسودها التضارب او الكسب على حساب الطرف المقابل، وتعتمد هذه النظرية على مبدأ المنافسة، فيحاول كل خصم ان يسعى الى تعظيم ارباحه بشكل يجعل اقل كسب له اكثر نسبيا مما يحصل عليه الخصم الاخر .

وان اول من فكر في وضع تحليل علمي للالعاب الاستراتيجية هو العالم الرياضي المشهور جون فون نيومان (Newman) وكان ذلك عام 1928 ، ولكنه لم يتطرق في ذلك الوقت الى مفهومات التطبيقات الاقتصادية والادارية والعسكرية بهذه الالعاب ، وإنما ركز جل اهتمامه على التعبير عن الالعاب بخوارزميات ونظريات تبنى على الاساس الرياضي والمنطقي لقواعد وقوانين كل لعبة وفي عام 1944 قام العالمان نيومان ومورغينشتيرن بأول محاولة لنشر كتاب في هذا المضمون (نظرية الالعاب في السلوك الاقتصادي) وكان هذا الكتاب اول مدخل لنظريات الالعاب الاستراتيجية وفي المجالات الاقتصادية والادارية. ويتلخص مفهوم نظرية الالعاب الاستراتيجية بوجود لعبة تنافسية محددة او مباراة لها هدف نهائي محدد يسعى من اجله كلا اللاعبين ومن خلال مراحل وقوانين اللعب يتم اختيار افضل الستراتيجيات وحسب ما هو متاح لكل لاعب ، وتختلف المباراة ومقياس بلوغ قيمتها او الفوز بها ففي بعض الاحيان يكون عدد الاهداف التي احرزت من قبل احد المتبارين هو العامل الحاسم لكسب المباراة (مباراة كرة القدم) وفي بعض الاحيان يكون الذي يكسب المباراة هو اللاعب الحاصل على اقل وقت مثل العاب القوى وهناك على العموم تقاس المباراة بالاستراتيجيات المتبعة من احد اللاعبين ومدى تاثيرها بالطرف الاخر مثل مباراة الشطرنجية او المباراة التجارية والعسكرية والاسترلتيجية...الخ . وهنا على اللاعبين اتخاذ القرارات اللازمة للتحرك من خلال الاستراتيجيات غير ان هناك حالات من نوع اخر تتمثل في وجود تعارض في المصالح بين عدة اطراف متنافسة على عائد او منفعة محددة .

ونظرية المباراة تقدم لنا تكتيكا يقوم على اجراءات منتظمة يتم اتباعها لاتخاذ افضل القرارت لكل طرف من المباراة وفي حقيقة الامر فان المباريات او حالة التنافس تتواجد في

الحياة العملية في مختلف ميادين الحياة، ومن امثلتها الحملات السياسية والعسكرية، السياسات السعرية، حالة المفاوضات، حالة الحصول على اكبر حصة في السوق.

ومما تجدر الاشارة اليه أن نموذج نظرية المباراة يقوم على عدة افتراضات حتى تتصف البيئة القرارية بانها بيئة تعارض ومنها :

1- اتصاف كل اللاعبين او المتنافسين بالذكاء والمعقولية والرشد بكل المعرفة العميقة بأمور اللعبة.

2- يهدف كل طرف الى تعظيم العائد أو تقليل الخسارة الخاصة به.

3- معرفة كل طرف من اطراف المباراة بكل المعلومات ذات العلاقة بالمباراة وهذا يعني معرفة كل طرف بالاستراتيجات المتاحة للطرف الاخر، ومعرفته بالمخرجات المصاحبة لاي توليفة من الاستراتيجيات .

4- قيام كل طرف باتخاذ قراراته بصورة مستقلة، وبدون اتصال مباشر مع الطرف الاخر.

5- قيام الطرفين باتخاذ قراراتهما في وقت واحد ، وبالتالي لايعرف كل طرف الاستراتيجية المعينة التي اختارها الطرف الاخر.

وقبل مناقشة انواع البيئات التنافسية، تجدر الاشارة الى انه سيتم استخدام كلمة (لاعبين) لتدل على وجود طرفين متنافسين لهما مصالح متعارضة. فقد يكون المقصود باللاعبين شركتين متنافستين يطلق على كل شركة لاعب، كما قد يقصد باللاعبين دولتين لهما مصالح متعارضة وهكذا بالنسبة لبقية الحالات ذات المصالح المتعارضة لطرفين مختلفين ويحاول كل طرف ايجاد الاستراتيجية التي من شانها ان تحسن وضعه، فانه يشار الى كل طرف من هذه الاطراف بكلمة (لاعب) .

<u>تصنيف البيئة التنافسية:</u>

هنا يمكن تصنيف البيئة التنافسية الى عدة اصناف استنادا الى المعايير الاتية:

1- عدد المتنافسين: اذا كان عدد المتنافسين يساوي (2) عندها تسمى المباراة بمباراة بين شخصين (two player game) اما اذا كان عدد اللاعبين اكثر من (2) اي $(N \geq 3)$ عندئذ تسمى المباراة بمبارة (N) من اللاعبين (N-player game) .

2- مجموع الارباح والخسائر Sum of gains and losses : اذا كان مجموع الارباح والخسائر بين اللاعبين (المتنافسين) يساوي صفراً عندئذ تسمى المباراة (مباراة ذات

المجموع الصفري) Zero-Sum Game وفيما عدا ذلك تسمى (Non-Zero sum game) .

3- عدد الاستراتيجيات (او الخطط) التي تشتمل عليهما المباراة : استراتيجية كل لاعب في نظرية المباراة هي خطة توضح سلوك هذا اللاعب مقابل كل سلوك محتمل من اللاعب الاخر. فمن الممكن ان يكون لكل لاعب استراتيجيتان (هناك لاعبان فقط) فيرمز الى هذه الحالة من المباراة بالرمز (2*2)، اما اذا كان هناك لاعبين واحدهم لديه استراتيجيتين اثنين والاخر اكثر من استراتيجيتين فيرمز للمباراة في هذه الحالة أما (N*2) أو (2*M) . أما إذا كان عدد استراتيجيات اللاعب الاول هو (M) وعدد الاستراتيجيات اللاعب الثاني هو (N)، فيقال للمباراة انها ذات استراتيجيات (M*N) واذا كان (N , M) عددا منتهيا يقال ان المباراة منتهية، واذا كانت (N , M) اعداد غير منتهية فيقال ان المباراة غير منتهية .

4- مصفوفة العائد (مصفوفة الدفع) Pay off matrix : في المباراة الثنائية (اي التي يوجد فيها لاعبين متنافسين) ترتب العوائد بشكل مصفوفة يطلق عليها مصفوفة العائد او مصفوفة المباراة وتمثل صفوف هذه المصفوفة استراتيجيات احد اللاعبين، والذي سنطلق عليه اللاعب الاول، وتمثل الاعمدة (في الوقت نفسه) استراتيجيات للاعب الاخر الذي سنطلق عليه اللاعب الثاني، وتكون عناصر المصفوفة هي مقدار المردود لاحد اللاعبين، فالعنصر الذي يقع في الصف (i) والعمود (j) والذي نرمز له (a_{ij}) هو العائد عندما يستخدم اللاعب الاول الاستراتيجية i واللاعب الثاني الاستراتيجية j ، فاذا كان (a_{ij}) موجبا فان اللاعب الاول يربح (a_{ij}) من اللاعب الثاني، اما اذا كان سالبا فان اللاعب الاول سيخسر (a_{ij}) يدفعها الى اللاعب الثاني، وتكون المصفوفة (مصفوفة الدفع وعناصرها) كما يأتي :

B

		1	2	3	j	-----	n
	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1j}		a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2j}		a_{2n}
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{3j}		a_{3n}
A	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{ij}		a_{4n}
	-						
	-						
	m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{mj}		a_{mn}

وكمثال عددي حول ذلك نورد المثال الاتي :

		B			
		1	2	3	4
	1	4	-10	-15	20
	2	-3	-18	7	-4
A	3	5	-8	3	8
	4	6	-20	-6	-8
	5	-8	-12	-15	-10

وتوضيحاً الى مصفوفة الدفع فانها مكونة من عائد لاعبين هما A , B وكذلك للاعب A توجد لديه $m=5$ سياسات وللاعب B لديه $n=4$ سياسات وعند اتباع اللاعب A السياسة رقم واحد فانه يعلم جيدا انه سيربح (4) اذا استخدم اللاعب B السياسة رقم واحد وسيخسر (10) يدفعها الى اللاعب B اذا استخدم الاخير السياسة رقم اثنين ويعلم اللاعب انه سيخسر (15) اذا استخدم اللاعب B السياسة الثالثة وكذلك يعلم اللاعب A انه سوف يربح (20) اذا استخدم اللاعب B السياسة رقم (4) وما يقال عن السياسة الاولى يقال عن كل سياسات اللاعب A فضلا عن انه يعلم بها سلفا ويعلم ان لدى اللاعب B أربع سياسات.

اما بالنسبة للاعب B فانه يعلم سلفا انه اذا استخدم السياسة رقم واحد فانه سيخسر (4) يدفعها الى اللاعب A اذا استخدم اللاعب A السياسة رقم واحد وسيربح (3) يدفعها اليه اللاعب A اذا استخدم اللاعب A السياسة رقم (2) وسيخسر (5) اذا استخدم اللاعب A السياسة رقم (3) وسيخسر (6) اذا استخدم اللاعب A السياسة رقم (4) وسيربح (8) يدفعها اليه اللاعب A اذا استخدم الاخير السياسة الخامسة .

ويمكن تعريف مصفوفة الدفع على انها عبارة عن صفوف واعمدة تشتمل على نتائج الجهتين حيث يفترض ان الجهة الاولى تسمى A والجهة الثانية تسمى B وان الارقام الموجبة داخل المصفوفة تمثل ربحا للجهة A والارقام السالبة تمثل ربحا الى B وان مايربحه A يخسره B وليس هناك اي طرف ثالث يربحان منه .

2-9 طرق حل مسائل المباراة

اي على اللاعب A استخدام السياسة الخاصة بالصحف ويتعين على اللاعب B ايضا استخدام فقط السياسة الخاصة بالصحف ليخسر وحدة واحده يدفعها الى اللاعب A .

وهنا يجب توضيح نقطة مهمة لدى طلابنا وهي ان قيمة اللعبة دائما وحتى في السياسات المختلطة يجب ان تقع بين القيمتين الاولى اعلى الادنى والثانية ادنى الاعلى وكما يأتي :

قيمة اعلى الادنى ≤ قيمة اللعبة ≤ قيمة ادنى الاعلى

قيمة دنيا قيمة عليا

$$\textit{Maxi}\min \le \textit{Value of the game} \le \textit{Mini}\max$$

lower *upper*

مثال (121) :

حدد السياسات المثلى للاعبين A و B كذلك اوجد قيمة اللعبة لمصفوفة الدفع الاتية:

اللاعب B

		1	2	3	4	Min	
	1	12	3	0	2	0	
اللاعب	2	0	3	6	10	0	(4)
A	3	5	4	7	5	4	Maximin
	4	9	2	0	16	0	اعلى الادنى
	5	8	1	1	13	1	
Max		12	4	7	16		

(4) Minimax

ادنى الاعلى

وهنا على اللاعب A اتباع السياسة رقم (3) وعلى اللاعب B اتباع السياسة رقم (2) لتكون قيمة اللعبة (4) يدفعها اللاعب B الى اللاعب A وهنا ايضا يكون

$$\textit{Maxi}\min = \textit{Mini}\max = \textit{Value of the game} = 4 = \textit{Saddle point}$$

2-2-9 السياسات المختلطة Mixed Strategy

اعتدنا في الامثلة السابقة لايجاد قيمة اللعبة كان أيجاد نقطة التعادل عن طريق ايجاد القيمتين وهما ادنى الاعلى والاخرى هي اعلى الادنى وهاتان القيمتان عند مساواتهما فالعلاقة بارزة

مثال (122) :

اوجد قيمة اللعبة لمصفوفة الدفع الاتية وماهي السياسات المثلى التي يجب ان يتبعها اللاعبون للوصول الى قيمة اللعبة.

اللاعب B

			S	T		
اللاعب A	X_1	P	-3	7	-3	(1)
	$X_2 = 1 - X_1$	Q	6	1	1	Maximin
			6	7		
			(6)			

Minimax

اولا : يجب ان نتحقق هل ان مصفوفة الدفع تحتوي على نقطة التعادل ام لا على افتراض انها من نوع السياسات الطليقة وبعد ان تم استخراج القيمتين وهي اللاعلى الادنى ≠ قيمة الادنى اللاعلى ومعنى هذا لا وجود لنقطة التعادل ويجب ان يرجح كلا اللاعبين السياسات باحتمالات معينة وهنا سوف يرشح اللاعب A السياسة (P) باحتمال مقدار X_1 والسياسة Q باحتمال مقداره $(X_2 = 1 - X_1)$.

ويمكن حل اللعبة اعلاه عن طريق تكوين المعادلات الاتية

$g(A, B_S) = -3X_1 + 6(1 - X_1)$ ....(1)

وتعني هذه المعادلة قيمة اللعبة بالنسبة للاعب A عندما اللاعب B يستخدم السياسة (s)

$g(A, B_T) = 7X_1 + 1(1 - X_1)$ ....(2)

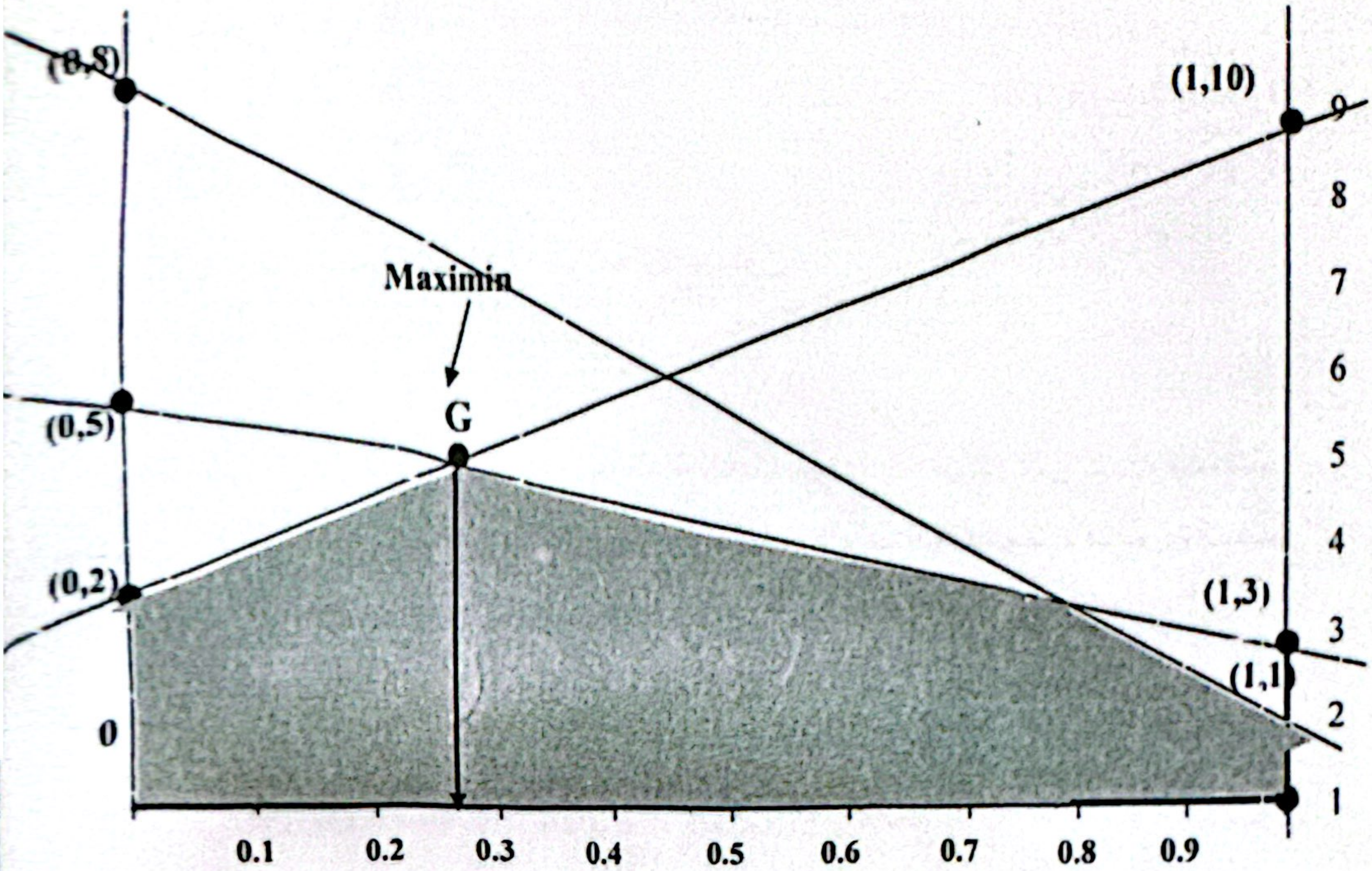
وتعني هذه المعادلة قيمة اللعبة بالنسبة للاعب A عندما اللاعب B يستخدم السياسة (T)

وعند تبسيط المعادلتين نحصل على

$g(A, B_S) = -9X_1 + 6$ ....(1)

$g(A, B_T) = 6X_1 + 1$ ....(2)

وسواء اللاعب B اختار السياسة S او السياسة T فان قيمة اللعبة للاعب A هي واحدة وهذا معناه تساوي المعادلتين (1) و(2) اي



شكل رقم (53)

تم تضليل المنطقة تبعا للمعادلات الاصلية اذ كانت اقل او يساوي قيمة اللعبة V اضافة الى ان اللعبة ستحقق اهدافها بالنسبة الى اللاعب A بتحقيق نقطة Maximin وتفسير الطريقة البيانية أنها أعلى نقطة تقاطع للمستقيمين في المنطقة الدنيا أو السفلى Lower envelope ولذلك سوف تحدد نقطة G وانزال عمود منها على المحور الأفقي (الذي يمثل الاحتمالات) لأستخراج قيمة الاحتمال الذي سيرشح اللاعب A سياسته الأولى بمقدار X_1 والثانية بما يساوي $(1-X_1)$. ولهذا يكون $X_1=0.28$ ، الاحتمال لترشيح السياسة الأولى

الاحتمال لترشيح السياسة الثانية $X_2=0.72$

$$V^*=4.5$$

ولبيان كيفية تحديد قيمة اللعبة وذلك برسم مستقيمين من نقطة G على المحورين العمودين ليحددا قيمة اللعبة والتي هي $V=4.5$.