

# نظرية الزمر

J.S. Milne

١ أيلول، ٢٠٠٧

## مقدمة:

كتبت النسخة الأولى من هذه الملاحظات لطلاب السنة الأولى من خريجي الجبر. كما هو الحال في معظم هذه الدورات، وكانت متركزة على الزمر المجردة، وبشكل خاص، على الزمر المنتهية. بكل الأحوال، إن الزمر المجردة ليست هي المشكلة الوحيدة التي تواجه معظم علماء الرياضيات وإنما الزمر الجبرية، الزمر الطوبولوجية، أو، زمر لي، ولا نهتم بالزمر بعد ذاتها فقط وإنما بتمثيلاتها الخطية أيضاً. يتركز اهتمامي (في المستقبل) بتوسيع هذه الملاحظات لتعطي وتنتج مجلداً يبلغ حجمه (٢٠٠ صفحة)، والذي سيبرهن، بشمولية أكثر، مفاهيم مقدمة إلى نظرية الزمر لخريجي الرياضيات، الفيزياء، والمجالات المرتبطة بها.

يرجى إرسال الملاحظات والتصويبات على الموقع [math0 at jmilne.org](http://math0 at jmilne.org).

V2.01 (٢١ آب، ١٩٩٦). النسخة الأولى على شبكة الإنترنت؛ ٥٧ صفحة.

V2.11 (٢٩ آب، ٢٠٠٣). حددت العديد من الأخطاء الصغيرة؛ الترقيم لم يتغير؛ ٨٥

صفحة.

V3.00 (١ أيلول، ٢٠٠٧). مع التنقيح والتوسيع؛ ١٢١ صفحة.

حقوق التأليف والنشر © 1996, 2002, 2003, 2007, J.S. Milne.

يمكن نسخ هذا العمل مرة واحدة للاستعمال الشخصي غير التجاري بدون إذن مصرح من صاحب حقوق الطباعة والنشر.

يمكن القول بأن نظرية الزمر ذات الرتب المنتهية تعود إلى زمن كوشي. فإليه ترجع المحاولات الأولى في التصنيف مع مخطط لتشكيل نظرية من عدد من الحقائق المنعزلة. أدخل غالوا إلى هذه النظرية فكرة في غاية من الأهمية عن الزمرة الجزئية (الناظرية)، وتقسم الزمر إلى بسيطة ومركبة. علاوة على ذلك، وبما أن كل معادلة من درجة منتهية تقابل زمرة من رتبة منتهية بحيث تعتمد عليها جميع خواص المعادلة، بين غالوا بأن الوصول إلى تطبيقات النظرية يمكن أن يكون بعيداً، وبالتالي فإن الإسهام سيكون أكبر، بشكل غير مباشر، لتطوير منتالياتها الجزئية.

قدمت العديد من الإضافات، وبالتحديد من قبل علماء الرياضيات الفرنسيين، من خلال منتصف القرن (التاسع عشر). قدم أول عرض تفصيلي للمبرهنة في النسخة الثالثة من قبل سيرت "Cours d'Algèbre Supérieure"، التي طبعت في عام ١٨٦٦. عرض بعد ذلك السيد جوردان في عام ١٨٧٠ النسخة "Traité des substitutions et des équations algébriques." وقد كرس الجزء الأهم من بحث جوردان بتطوير أفكار غالوا وتطبيقاتها لنظرية المعادلات.

لم يحدث تقدم ملحوظ في النظرية، كأجزاء متفرقة من تطبيقاتها، حتى ظهور مذكرات هير سيلو "Théorèmes sur les groupes de substitutions" في الجزء الخامس من Mathematische Annalen. منذ تاريخ هذه المذكرات، وخاصة في السنوات الأخيرة، تقدمت النظرية بشكل مستمر.

W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 1897.

أدخل غالوا مفهوم الزمرة الجزئية الناظرية في عام ١٨٣٢، وأشار كاميل جوردان في مقدمة Traité في عام ١٨٧٠ إلى التمييز بين الزمر البسيطة والزمر المركبة كما في معظم التفرعات الهامة في نظرية زمر التبديلات. بعد ذلك، بدأ جوردان Traité ببناء قاعدة بيانات للزمر البسيطة المنتهية - الزمر المتناوبة من الدرجة الخامسة على الأقل والكثير من الزمر الخطية التقليدية الإسقاطية على حقول ذات دليل أولي. أخيراً، طبع لودونيج سيلو مبرهناته الشهيرة عن الزمر الجزئية التي رتبها قوى لأعداد أولية في عام ١٨٧٢.

R. Solomon, Bull. Amer. Math. Soc., 2001.

## الفهرس

|         |                                      |
|---------|--------------------------------------|
| ١.....  | مقدمة                                |
| ٣.....  | الفهرس                               |
| ٦.....  | ملاحظات                              |
| ٧.....  | الفصل الأول                          |
| ٧.....  | تعريفات و نتائج أساسية               |
| ٣٦..... | الفصل الثاني                         |
| ٣٦..... | الزمر الحرة و التقديرات؛ زمر كوكستير |
| ٣٦..... | أنصاف الزمر الحرة                    |
| ٣٧..... | الزمر الحرة                          |
| ٤١..... | المولدات والعلاقات                   |
| ٤٣..... | التقديم المنتهي للزمر                |
| ٤٥..... | زمر كوكستير                          |
| ٤٩..... | تمارين                               |
| ٥١..... | الفصل الثالث                         |
| ٥١..... | التماثلات الذاتية و التمديدات        |
| ٥١..... | التماثلات الذاتية للزمر              |
| ٥٤..... | الزمر الجزئية المميزة                |
| ٥٥..... | الجداءات شبه المباشرة                |
| ٦٠..... | تمديدات الزمر                        |
| ٦٢..... | مخطط هولدر                           |
| ٦٤..... | تمارين                               |
| ٦٦..... | الفصل الرابع                         |
| ٦٦..... | تأثير زمر على مجموعات                |
| ٦٦..... | تعريف وأمثلة                         |
| ٧٦..... | زمر التبديلات                        |
| ٨٤..... | خوارزمية Tood – Coxeter              |

|          |                                                          |
|----------|----------------------------------------------------------|
| ٨٦.....  | التأثيرات الابتدائية                                     |
| ٨٨.....  | تمارين                                                   |
| ٩١.....  | <b>الفصل الخامس</b>                                      |
| ٩١.....  | مبرهنة سيلو؛ تطبيقات                                     |
| ٩١.....  | مبرهنة سيلو                                              |
| ٩٦.....  | التقريبات البديلة لمبرهنة سيلو                           |
| ٩٧.....  | أمثلة                                                    |
| ١٠٢..... | تمارين                                                   |
| ١٠٣..... | <b>الفصل السادس</b>                                      |
| ١٠٣..... | المتسلسلات تحت الناقمية؛ الزمر القابلة للحل وعديمة القوى |
| ١٠٣..... | المتسلسلات تحت الناقمية                                  |
| ١٠٦..... | الزمر القابلة للحل                                       |
| ١١١..... | الزمر عديمة القوى                                        |
| ١١٥..... | الزمر بمؤثرات                                            |
| ١١٨..... | مبرهنة كرول — ششميدت                                     |
| ١١٩..... | تمارين                                                   |
| ١٢٠..... | <b>الفصل السابع</b>                                      |
| ١٢٠..... | تمثيلات الزمر المنتهية                                   |
| ١٢٠..... | التمثيلات المصفوفية                                      |
| ١٢١..... | جذور 1 في الحقول                                         |
| ١٢٢..... | التمثيلات الخطية                                         |
| ١٢٣..... | مبرهنة Maschke                                           |
| ١٢٥..... | جبر الزمر؛ نصف البسيطة                                   |
| ١٢٦..... | المودولات نصف البسيطة                                    |
| ١٢٧..... | $F$ - الجبر البسيطة و مودولاتها                          |
| ١٣٤..... | $F$ - الجبر نصف البسيطة و مودولاتها                      |
| ١٣٦..... | تمثيلات $G$                                              |
| ١٣٨..... | ميزات $G$                                                |

|          |                   |
|----------|-------------------|
| ١٤٢..... | قائمة خواص الزمرة |
| ١٤٢..... | للكتابة           |
| ١٤٤..... | تمارين محلولة     |
| ١٥٣..... | مسائل غير محلولة  |
| ١٦٠..... | امتحان لساعتين    |
| ١٦٣..... | المراجع           |

## ملاحظات.

نستخدم الرموز الآتية:

$$\begin{aligned} &= \{0, 1, 2, \dots\}, \\ \mathbf{Z} &= \text{حلقة الأعداد الصحيح} \\ &= \text{حقل الأعداد الحقيقية} \\ &= \text{حقل الأعداد المركبة} \\ F_p &= \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = \text{عدد أولي } p \text{ حيث } p \text{ عنصر، حيث } \end{aligned}$$

لكل عددين صحيحين  $m, n$ ،  $m \mid n$  تعني بأن  $m$  يقسم  $n$ ، أي أن،  $n \in m\mathbf{Z}$ . نعتبر  $p$  في جميع الملاحظات، عدداً أولياً، أي أن،  
 $p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots, 1000000007, \dots$

لتكن لدينا علاقة التكافؤ،  $[*]$  التي ترمز لصف التكافؤ الذي يحوي على  $*$ . نرمز للمجموعة الخالية بالرمز  $f$ . أما قدرة المجموعة  $S$  فنرمز لها بالرمز  $|S|$  (لذلك فإن  $|S|$  هي عدد عناصر المجموعة  $S$ ، وذلك عندما تكون  $S$  منتهية). لتكن  $A, I$  مجموعتين، نرمز لمجموعة عناصر  $A$  التي أدلتها من المجموعة  $I$ ، بالرمز  $(a_i)_{i \in I}$ ، وهي عبارة عن تطبيق من الشكل  $i \mapsto a_i$ .

يتطلب وجود الحلقات للحصول على العنصر المحايد 1، وتشاكلات الحلقات لوجود تطبيق تقابل. يكون العنصر  $a$  من حلقة ما عنصر وحدة إذا كان له معكوس (عنصر  $b$  مثلاً، بحيث يكون  $ab = 1 = ba$ ).

$X \subset Y$ ،  $X$  مجموعة جزئية من  $Y$  (ليس بالضرورة مجموعة فعلية)؛  
 $X \stackrel{\text{def}}{=} Y$ ،  $X$  تعرّف لتساوي  $Y$ ، أو تساوي  $Y$  بالتعريف؛  
 $X \approx Y$ ،  $X$  تماثل  $Y$ ؛  
 $X \sim Y$ ،  $X$  و  $Y$  متماثلان قانونياً (أو إذا كان التماثل وحيداً).

---

<sup>1</sup> أسرة يجب تمييزها على مجموعة ما. مثلاً، إذا كانت  $f$  دالة من الشكل  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  التي ترسل العدد الصحيح إلى صف تكافئه، عندئذٍ  $\{f(i), i \in \mathbf{Z}\}$  مجموعة مكونة من ثلاثة عناصر، حيث إن  $(f(i))_{i \in \mathbf{Z}}$  أسرة مع مجموعة بدليل غير منتهية.

## الفصل الأول

### تعريفات و نتائج أساسية

#### تعريفات و أمثلة

**تعريف 1.1** الزمرة (group) هي كل مجموعة  $G$  مع العملية الثنائية

$$(a, b) \mapsto a * b : G \times G \rightarrow G$$

تحقق الشروط الآتية:

$G_1$ . (الخاصة التجميعية) لكل  $a, b, c \in G$  يكون

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

$G_2$ . (يوجد عنصر حيادي) يوجد عنصر  $e \in G$ ، بحيث يكون

$$a * e = e * a = a \quad (1)$$

لكل  $a \in G$

$G_3$ . (يوجد معكوس) لكل  $a \in G$ ، يوجد  $a' \in G$ ، بحيث يكون

$$a * a' = e = a' * a.$$

نختصر عادةً الكتابة  $(G, *)$  إلى  $G$ . نكتب أيضاً  $ab$  بدلاً من  $a * b$  و  $1$  بدلاً من  $e$ ، أو نكتب  $a + b$  بدلاً من  $a * b$  و  $0$  بدلاً من  $e$ . في الحالة الأولى، يقال بأن الزمرة ضربية (multiplicative)، وفي الحالة الثانية يقال بأنها جمعية (additive).

**2.1** فيما يلي،  $a, b, \dots$  ترمز لعناصر من الزمرة  $G$ .

(a) إن العنصر الذي يحقق العلاقة (1) يدعى بالعنصر المحايد (neutral element).

فإذا كان  $e'$  عنصراً محايداً آخر، عندئذٍ  $e' = e * e' = e$ . في الحقيقة إن  $e$  هو العنصر الوحيد من  $G$ ، الذي يحقق  $e * e = e$  (بتطبيق  $G_1$ ).

(b) إذا كان  $b * a = e$  و  $a * c = e$ ، عندئذٍ

$$b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$$

وبالتالي فإن العنصر  $a'$  في  $(G_3)$  معرف بشكل وحيد بدلالة  $a$ . يسمى هذا

العنصر معكوس (inverse) العنصر  $a$  ويرمز له بالرمز  $a^{-1}$  (أو يسمى نظير

(negative) العنصر  $a$  ورمزه  $-a$ ).

(c) نلاحظ من  $(G_1)$  أن جداء ثلاثة عناصر  $a_1, a_2, a_3$  من  $G$  يكون معرفاً بشكل واضح، فيما إذا شكلنا أولاً  $a_1 a_2$  ومن ثم نشكل  $(a_1 a_2) a_3$ ، أو نشكل  $a_2 a_3$  أولاً وبعد ذلك نشكل  $a_1 (a_2 a_3)$ ، فالنتيجة ستكون نفسها. في الحقيقة، يبرهن  $(G_1)$  أن الجداء لأي  $n$  - عدد  $a_1, a_2, \dots, a_n$  من عناصر  $G$  معرف بشكل واضح. نبرهن على ذلك بالاستقراء الرياضي على  $n$ . إن أحد الجداءات قد ينتهي إلى

$$(a_1 \dots a_i)(a_{i+1}, \dots, a_n) \quad (2)$$

كجداء نهائي، بينما يوجد جداء آخر من الشكل

$$(a_1 \dots a_j)(a_{j+1}, \dots, a_n) \quad (3)$$

نلاحظ أن التعبيرين السابقين معرفان بشكل جيد، وذلك حسب الفرض الاستقرائي. لذلك، إذا كان  $i = j$ ، فإن (2) و (3) متكافئان. أما إذا كان  $i \neq j$ ، عندئذٍ يمكن أن نفرض بأن  $i < j$ . وبالتالي

$$(a_1 \dots a_i)(a_{i+1} \dots a_n) = (a_1 \dots a_i)((a_{i+1} \dots a_j)(a_{j+1} \dots a_n))$$

$$(a_1 \dots a_j)(a_{j+1} \dots a_n) = ((a_1 \dots a_i)(a_{i+1} \dots a_j))(a_{j+1} \dots a_n)$$

إن التعبيران في الجهة اليمنى متساويان وذلك من  $(G_1)$ .

(d) إن معكوس  $a_1 a_2 \dots a_n$  هو  $a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$ ، أي أن معكوس الجداء يساوي جداء المعكوسات، ولكن بترتيب معاكس.

(e) إن  $(G_3)$  يبين بأن قانون الحذف (cancellation) محقق في الزمر، أي أن

$$ab = ac \Rightarrow b = c, \quad ba = ca \Rightarrow b = c$$

(بالجداء من اليسار بالعدد  $a^{-1}$ ) وبالعكس، إذا كانت  $G$  منتهية، عندئذٍ فإن قانون الحذف محقق في  $(G_3)$ ، إن التطبيق  $ax: G \rightarrow G$  متباين، وبالتالي فهو تقابل، بشكل خاص، إذا كان  $e$  في صورة التطبيق، عندئذٍ يكون للعنصر  $a$  معكوس يميني، وبشكل مشابه، يكون له معكوس يساري، ومن (b) نجد بأن المعكوسين متساويان.

تكون الزمرتان  $(G, *)$ ،  $(G', *)'$  متماثلتين إذا وجد تطبيق تقابل

$$a \leftrightarrow a', \quad G \leftrightarrow G' \quad \text{بحيث يكون } (a * b)' = a' *' b' \quad \text{لكل } a, b \in G$$



إن  $|G|$  رتبة (order) الزمرة  $G$  هي قدرة هذه الزمرة. تسمى الزمرة المنتهية التي رتبته قوى لعدد أولي  $p$  بـ  $p$  - زمرة.

لكل عنصر  $a$  من  $G$ ، نعرف

$$a^n = \begin{cases} aa \dots a & n > 0 \\ e & n = 0 \\ a^{-1}a^{-1} \dots a^{-1} & n < 0 \end{cases}$$

إن النتائج الآتية محققة

$$m, n \in \mathbb{Z} \text{ لكل } a^n a^m = a^{n+m}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (4)$$

نجد من (4) بأن المجموعة

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid a^n = e\}$$

تشكل إيديالاً في  $\mathbb{Z}$ ، ولذلك فهي تساوي  $m\mathbb{Z}$  لبعض الأعداد الصحيحة  $m \geq 0$ . إذا كان  $m = 0$ ،  $a^n \neq e$  باستثناء  $n = 0$ ، عندئذٍ يقال بأن رتبة  $a$  غير منتهية. وإذا كان  $m \neq 0$ ، يكون أصغر عدد صحيح  $m > 0$ ، بحيث يحقق  $a^m = e$ ، عندئذٍ يقال بأن رتبة  $a$  منتهية. في هذه الحالة،  $a^{-1} = a^{m-1}$  و

$$a^n = e \Leftrightarrow m \mid n$$

أمثلة

**3.1** لنكن  $C_\infty$  الزمرة  $(\mathbb{Z}, +)$ ، و، لكل عدد صحيح  $m \geq 1$ ، لنكن  $C_m$  الزمرة  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ .

**4.1** زمرة التبديلات (permutation groups). لنكن  $S$  مجموعة ولتكن

$\text{Sym}(S)$  مجموعة كل التقابلات  $a: S \rightarrow S$ . نعرف جداء عنصرين من

$\text{Sym}(S)$  بتركيبها على الشكل

$$ab = a \circ b$$

لكل  $s \in S$  و  $a, b, g \in \text{Sym}(S)$

$$((a \circ b) \circ g)(s) = a(b(g(s))) = (a \circ (b \circ g))(s), \quad (5)$$

وبالتالي فإن قانون التجميعي محقق. إن التطبيق المحايد  $s \mapsto s$  هو العنصر المحايد

في  $\text{Sym}(S)$ ، ويوجد معكوس، لكي تشكل  $\text{Sym}(S)$  تطبيقات تقابل. وبالتالي فإن

$\text{Sym}(S)$  تشكل زمرة، تدعى بالزمرة التناظرية لـ  $S$ . مثلاً، إن  $S_n$  زمرة التبديلات

من  $n$  حرف معرفة لتشكل الزمرة التناظرية للمجموعة  $\{1, 2, \dots, n\}$  وهي من الرتبة  $n!$ .

**5.1** لتكن  $G, H$  زميرتين، لنبني الزمرة  $G \times H$ ، التي تسمى بالجداء المباشر لـ  $G, H$ . أما كمجموعة، تسمى بالجداء الديكارتي لـ  $G, H$ ، وتعرف عملية الضرب كما يلي:

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$$

**6.1** تكون الزمرة  $G$  تبديلية (أو أبيلية<sup>2</sup>) إذا كان:

$$ab = ba \text{ لكل } a, b \in G$$

في الزمرة التبديلية. يكون الجداء المنتهي لأي مجموعة  $S$  منتهية من العناصر (ليس بالضرورة أن تكون مرتبة) معرفاً جيداً، الجداء الخالي هو  $e$ . عادةً، نتعامل مع الزمر التبديلية على أنها زمر جمعية. تصبح المعادلة (4):

$$(m+n)a = ma + na, \quad m(na) = mna$$

في حالة  $G$  تبديلية

$$m(a+b) = ma + mb \text{ لكل } m \in \mathbb{Z} \text{ و } a, b \in G$$

وبهذا فإن التطبيق الآتي

$$(m, a) \mapsto ma: \mathbb{Z} \times G \rightarrow G$$

يحول المجموعة  $A$  إلى  $\mathbb{Z}$ -مودول. في الزمرة التبديلية  $G$ ، تشكل مجموعة العناصر ذات الرتب المنتهية زمرة جزئية  $G_{\text{tors}}$  من  $G$ ، وتسمى بزمرة الفتل (torsion subgroup).

**7.1** ليكن  $F$  حقلاً ما. إن المصفوفات من النوع  $n \times n$  التي تأخذ عواملها من الحقل  $F$  والتي محدد كل منها لا يساوي الصفر تشكل زمرة  $GL(F)$  تسمى بالزمرة الخطية العامة (general linear group) من الرتبة  $n$ . أما بالنسبة إلى  $V$  وهو  $F$ -فضاء متجهي ذو بعد منته، فهو يشكل الزمرة  $GL(V)$  تدعى بالزمرة الخطية العامة لـ  $V$ . نلاحظ أنه إذا كان لـ  $V$  بعد  $n$ ، عندئذٍ نختار قواعد لنعرف التماثل  $GL(V) \rightarrow GL_n(F)$  الذي يرسل التماثل الذاتي إلى مصفوفاته مع الحفاظ على القواعد.

<sup>2</sup> إن "الزمرة الأبيلية" شائعة أكثر من "الزمرة التبديلية".

**8.1** ليكن  $V$  الفضاء المتجهي ذو البعد المنتهي على الحقل  $F$ . نتذكر بأن التحويل ثنائي الخطية على  $V$  هو التطبيق  $f : V \times V \rightarrow F$  والذي يكون خطياً عند كل متغير. إن التماثل الذاتي لـ  $f$  هو تماثل  $a : V \rightarrow V$  بحيث يكون

$$f(av, aw) = f(v, w) \quad \text{لكل } v, w \in V \quad (6)$$

إن التماثل الذاتي يشكل زمرة  $\text{Aut}(f)$ . لتكن  $e_1, e_2, \dots, e_n$  قاعدة لـ  $V$ ، ولتكن  $P = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

مصفوفة  $f$ . إن القاعدة المختارة تطابق  $\text{Aut}(f)$  مع زمرة المصفوفات النظامية (invertible)  $A$  بحيث يكون<sup>3</sup>

$$A^{tr} . P . A = P \quad (7)$$

إذا كان  $f$  متناظراً، أي أن

$$f(v, w) = f(w, v) \quad \text{لكل } v, w \in V$$

وغير شاذ، تسمى  $\text{Aut}(f)$  بالزمرة المتعامدة (orthogonal) لـ  $f$ . وعندما يكون  $f$  تخالفاً، أي أن

$$f(v, w) = -f(w, v) \quad \text{لكل } v, w \in V$$

وغير شاذ، تسمى  $\text{Aut}(f)$  بالزمرة المتعامدة الزوجية (symplectic) لـ  $f$ . في هذه الحالة، توجد قاعدة لـ  $V$  لأي مصفوفة  $f$  التي تكون

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}, \quad 2m = n$$

وزمرة المصفوفات النظامية  $A$  بحيث يكون

$$A^{tr} J_{2m} A = J_{2m}$$

تدعى بالزمرة المتعامدة الزوجية  $\text{SP}_{2m}$ .

<sup>3</sup> عندما نستخدم قاعدة لتعريف  $V$  في  $F^n$ ، يصبح  $f$  على الشكل  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \ L \ a_n) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  إذا كانت  $A$  مصفوفة لـ  $a$  مع الحفاظ على القاعدة، عندئذٍ  $a$  يقابل التطبيق  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

لذلك، تصبح (6) على الشكل

$$(a_1 \ \dots \ a_n) \cdot A^{tr} \cdot P \cdot A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \ L \ a_n) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in F^n$$

لاختبار هذه الحالات على قواعد قانونية لمتجهات لـ  $F^n$ ، نرى بأنه يكافئ (7).

**9.1 (a)** يمكن أن يعاد ترتيب شروط الزمرة ( $G_2$  و  $G_3$ ) بشروط أضعف ( يوجد عنصر محايد من اليسار ومعكوس من اليسار): ( $G_2$ ) يوجد  $e$  بحيث يكون  $e * a = a$  لكل  $a$ ، ( $G_3$ ) لكل  $a \in G$ ، يوجد  $a' \in G$  بحيث يكون  $a' * a = e$ . لكي نبين بأن هذين الشرطين يكافئان ( $G_2$ ) و ( $G_3$ )، ليكن  $a \in G$ ، من  $G_3$  نجد أنه إذا كان  $a', a''$  بحيث يكون  $a' * a = e$  و  $a'' * a' = e$  عندئذٍ

$$a * a' = e * (a * a') = (a'' * a') * (a * a')$$

$$= a'' * ((a' * a) * a') = a'' * a' = e,$$

وهذا يكافئ ( $G_3$ )، و

$$a = e * a = (a * a') * a = a * (a' * a) = a * e$$

وهذا يكافئ ( $G_2$ ).

**(b)** يمكن أن تعرف الزمرة على أنها مجموعة  $G$  مع عملية ثنائية  $(*)$  بحيث تتحقق الشروط الآتية: ( $g_1$ )  $*$  تجميعية، ( $g_2$ )  $G$  غير خالية، ( $g_3$ ) لكل  $a \in G$ ، يوجد عنصر  $a' \in G$  بحيث يكون  $a' * a$  محايد الزمرة. كما يوجد عنصر محايد واحد على الأكثر في المجموعة مع العملية الثنائية التجميعية المعرفة عليها، من الواضح أن هذه الشروط تكافئ الشروط التي في (a). توجد مجموعة أصغر في الحالات التي يتحقق فيها شرطين من الشروط الثلاثة، مثلاً،  $(+, \cdot)$  تحقق الشرطين الأول والثاني، بينما لا تحقق الشرط الثالث، والمجموعة الخالية تحقق الشرطين الأول والثالث، ولا تحقق الشرط الثاني، ومجموعة المصفوفات من النوع  $2 \times 2$  التي تأخذ عواملها من حقل ما وتحقق  $A * B = AB - BA$  تحقق الشرطين الثاني والثالث ولا تحقق الشرط الأول.

### جدول الجداءات

إن العملية الثنائية على المجموعة المنتهية يمكن وصفها بالجدول الآتي من الجداءات

|   | e a b c ...        |
|---|--------------------|
| e | $e^2$ ea eb ec ... |
| a | ae $a^2$ ab ac ... |
| b | be ba $b^2$ bc ... |
| c | ce ca cb $c^2$ ... |
| M |                    |

يكون  $e$  العنصر المحايد إذا وفقط إذا كان أول عمود و أول سطر من الجدول هو تكرار لعناصر الزمرة. ويكون المعكوس موجوداً إذا وفقط إذا كان كل سطر وكل عمود تبادلي مع عناصر الزمرة (انظر 1.2 (e)). إذا وجد  $n$  عنصراً، عندئذٍ لإثبات الخاصة التجميعية يجب أن نختار  $n^3$  معادلة.

هذا يقترح لنا خوارزمية لإيجاد كل الزمر المعطاة برتبة منتهية  $n$ ، وبالتحديد، كل الجداول الضربية المحتملة والتأكد من المسلمات. باستثناء الحالة التي يكون فيها  $n$  صغيراً جداً، وهذا ليس موضوعياً! إن الجدول يحتوي على  $n^2$  موضع، فإذا سمحنا لكل موضع أن يثبت أي عنصر من العناصر  $n$ ، عندئذٍ نحصل على  $n^{n^2}$  جدول محتمل قليل جداً التي تعرف زمراً. مثلاً، يوجد

$$8^{64} = 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896$$

عملية ثنائية على مجموعة مكونة من 8 عناصر، لكن يوجد خمس صفوف متماثلة من الزمر من الرتبة 8 (4.12).

### الزمر الجزئية (subgroups)

**قضية 1. 10.** لتكن  $S$  مجموعة جزئية وغير خالية من الزمرة  $G$ . إذا كان

$$S_1: a, b \in S \Rightarrow ab \in S \quad \text{و}$$

$$S_2: a \in S \Rightarrow a^{-1} \in S$$

عندئذٍ فإن العملية المعرفة على  $G$  تحول  $S$  إلى زمرة.

**البرهان.** ( $S_1$ ) إن العملية الثنائية المعرفة على  $G$  تعرف العملية الثنائية  $S \times S \rightarrow S$  على  $S$ ، من الواضح أنها تجميعية. بفرض أن  $S$  تحوي على العنصر  $a$  على الأقل، معكوسه  $a^{-1}$ ، والجداء  $e = aa^{-1}$ . وأخيراً من ( $S_2$ ) نبين أن معكوس أي عنصر من  $S$  ينتمي إلى  $S$ .

تسمى المجموعة غير الخالية  $S$  التي تحقق  $(S_1)$  و  $(S_2)$  بالزمرة الجزئية في  $G$ . عندما تكون  $S$  منتهية فإن الشرط  $(S_1)$  يؤدي إلى الشرط  $(S_2)$ : ليكن  $a \in S$ ، عندئذٍ  $\{a, a^2, \dots\}$ ، ولذلك تكون رتبة  $a$  منتهية، ونقول بأن  $a^n = e$ ، الآن إن  $a^{-1} = a^{n-1} \in S$ . إن المثال  $(+,+) \subset (+,+)$  يبين بأن الشرط  $(S_1)$  لا يقتضي  $(S_2)$  عندما تكون  $S$  غير منتهية.

**مثال 11.1** إن مركز الزمرة  $G$  هي المجموعة الجزئية

$$Z(G) = \{g \in G : gx = xg, \forall x \in G\}$$

وهي زمرة جزئية من  $G$ .

**قضية 12.1** إن تقاطع الزمر الجزئية في  $G$  هو زمرة جزئية في  $G$ .

**البرهان.** بما أن المجموعة غير خالية لأنها تحوي على العنصر المحايد  $e$ ، ومن الواضح أن الشرطين  $(S_1)$  و  $(S_2)$  محققان.

**ملاحظة 13.1** في الحالة العامة يكون تقاطع الموضوعات الجزئية من موضوع جبري هو موضوع جزئية. مثلاً تقاطع الحلقات الجزئية هو حلقة جزئية، وتقاطع المودولات الجزئية هو مودول جزئي، وهكذا.

**قضية 14.1** لكل مجموعة جزئية  $X$  من زمرة  $G$ ، توجد زمرة جزئية أصغر في  $G$  تحوي  $X$ . وتتكون من جميع الجداءات المنتهية لعناصر من  $X$  ومعكوساتها (مع السماح بالتكرار).

**البرهان.** لنكن  $S$  تقاطع جميع الزمر الجزئية في  $G$  الحاوية على  $X$  وبالتالي فإنها زمرة جزئية في  $G$  وتحوي  $X$ ، من الواضح بأنها أصغر زمرة جزئية في  $G$  تحوي  $X$ . ومن الواضح أيضاً بأنها تحوي على جميع الجداءات لعناصر من  $X$  ومعكوسات هذه العناصر. لكن إن مجموعة هذه الجداءات تحقق الشرطين  $(S_1)$  و  $(S_2)$  وبالتالي فهي زمرة جزئية في  $G$  تحوي  $X$ ، ولذلك فهي تساوي  $S$ .

نرمز للزمرة الجزئية  $S$  المعطاة في القضية السابقة بالرمز  $\langle X \rangle$ ، وتسمى بالزمرة الجزئية المولدة بالمجموعة  $X$ . مثلاً،  $\langle f \rangle = \{e\}$ . إذا كانت رتبة كل عنصر في  $X$  منتهية، مثلاً إذا كانت  $G$  منتهية، عندئذٍ مجموعة كل الجداءات المنتهية من عناصر  $X$  تشكل زمرة وتساوي  $\langle X \rangle$ .

نقول بأن  $X$  تولد  $G$  إذا كان  $G = \langle X \rangle$ ، أي أن، كل عنصر في  $G$  يكتب على شكل جداء منته لعناصر من  $X$  ومعكوساتها. نلاحظ بأن رتبة العنصر  $a$  من الزمرة يساوي رتبة الزمرة الجزئية  $\langle a \rangle$  المولدة به.

### أمثلة

**1. 15 الزمر الدائرية.** يقال بأن الزمرة دائرية إذا كانت مولدة بعنصر واحد من عناصرها، أي أنه، إذا كانت  $G = \langle r \rangle$  لبعض العناصر  $r \in G$ . إذا كانت رتبة  $r$  منتهية وتساوي  $n$ ، عندئذٍ

$$G = \{e, r, r^2, \dots, r^n\} \approx C_n, \quad r^i \leftrightarrow i \bmod n$$

ويمكن أن نتصور بأن  $G$  عبارة عن تناظرات دورانية حول مركز مضلع منتظم مؤلف من  $n$  - ضلع. إذا كانت رتبة  $r$  غير منتهية، عندئذٍ

$$G = \{\dots, r^{-i}, \dots, r^{-1}, e, r, \dots, r^i, \dots\} \approx C_\infty, \quad r^i \leftrightarrow i$$

وبهذا، حتى التماثل، يوجد تماماً زمرة دائرية من الرتبة  $n$  لكل  $n \leq \infty$ . سنستخدم، مستقبلاً الرمز  $C_n$  لأي زمرة دائرية من الرتبة  $n$  (ليس بالضرورة  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  أو  $\mathbb{Z}$ ).

**1. 16. زمر ديهيدرال<sup>4</sup>  $D_n$ .** لكل  $n \geq 3$ ،  $D_n$  هي زمرة التناظرات لمضلع منتظم مؤلف من  $n$  - ضلع<sup>5</sup>. عدد رؤوسه  $n$ ، 1, 2, ... مرقمة بعكس اتجاه عقارب الساعة. ليكن  $r$  الدوران بزواوية تساوي  $2\pi/n$  (لذلك  $a \mapsto a + 1 \bmod n$ )، وليكن  $s$  انعكاس للمحور (= دوران حول المحور) من الرأس 1 إلى مركز المضلع (لذلك يكون  $a \mapsto a + 2 - i \bmod n$ ). عندئذٍ

$$r^n = 1; \quad s^2 = 1; \quad srs = r^{-1} \quad (\Rightarrow sr = r^{n-1}s)$$

تقتضي هذه المعادلات ما يلي

$$D_n = \{e, r, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$$

يكون واضحاً، من الهندسة، أن عناصر هذه المجموعة تكون مختلفة، ولذلك  $|D_n| = 2n$ .

<sup>4</sup> نرمز لهذه الزمرة بالرمز  $D_n$  أو بالرمز  $D_{2n}$  معتمداً على المؤلف (كالزمرة التناظرية بـ  $n$  ضلع) أو مجرداً.

<sup>5</sup> "بشكل أساسي"  $D_n$  يمكن أن تعرف على أنها زمرة جزئية من  $S_n$  مولدة بـ  $r: i \mapsto i+1 \pmod n$  و  $s: i \mapsto i+2-1 \pmod n$ . عندئذٍ كل الحالات المتعلقة بـ  $D_n$  يمكن أن تبرهن بدون الرجوع إلى الهندسة (أو توضيح للقارئ).

ليكن  $t$  انعكاساً للمحور المار من منتصف الضلع الواصل بين الرأسين 1 و 2 ومركز المضلع (ذلك  $i \mathbf{a} i + 3 - i \bmod n$ ). عندئذٍ  $r = ts$ . وبالتالي فإن  $D_n = \langle s, t \rangle$  ويكون

$$s^2 = e, \quad t^2 = e, \quad (ts)^2 = e = (st)^2$$

نعرف  $D_1$  ليكون  $C_2 = \{1, r\}$  ونعرف  $D_2$  ليكون  $C_2 \times C_2 = \{1, r, s, rs\}$ . تسمى الزمرة  $D_2$  أيضاً بزمرة كلاين، أو 4- زمرة. نلاحظ بأن  $D_3$  هي زمرة كل تبديلات المجموعة  $\{1, 2, 3\}$ . وهي أصغر زمرة غير تبديلية.

**17.1 الزمرة الرباعية  $Q$ .** لتكن  $a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$  و  $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . عندئذٍ

$$. (ba = a^3b) \text{ ومنه } a^4 = 1, \quad a^2 = b^2, \quad bab^{-1} = a^3$$

إن الزمرة الجزئية من  $GL_2(C)$  المولدة بالعنصرين  $a$  و  $b$  هي

$$Q = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

ويمكن أن توصف الزمرة  $Q$  على أنها المجموعة الجزئية  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  من الجبر الرباعي  $H$ . نتذكر بأن  $H = R_1 \oplus R_i \oplus R_j \oplus R_k$  مع الجداءات المعرفة كما يلي

$$i^2 = -1 = j^2, \quad ij = k = -ji$$

يتمدد التطبيق  $i \mathbf{a} a, j \mathbf{a} b$  بشكل وحيد إلى التشاكل  $M_2(C) \rightarrow H$  في  $R$  - جبر، بحيث تكون تطبيقات الزمرة  $\langle i, j \rangle$  متماثلة مع  $\langle a, b \rangle$ .

**18.1** نتذكر بأن  $S_n$  هي زمرة التبديلات على المجموعة  $\{1, 2, \dots, n\}$ . إن المناقشة عبارة عن تبديلة يظهر فيها عنصران أما بقية العناصر فهي ثابتة. بسهولة نجد أن  $S_n$  مولدة بمناقلاتها (انظر (4.25) فيما يلي يتضح المعنى بدقة أكثر)

### زمر برتب صغيرة (Groups of small order)

كل زمرة من رتبة أصغر من 16 تكون متماثلة تماماً مع إحدى الزمر التي في القائمة الآتية:



| الرتبة | 1                     | 2             | 3        | 4          | 5        | 6             | 7        | 8       |
|--------|-----------------------|---------------|----------|------------|----------|---------------|----------|---------|
| الزمرة | $C_1$                 | $C_2$         | $C_3$    | $C_4, D_2$ | $C_5$    | $C_6, S_3$    | $C_7$    | 5 زمرة  |
| الرتبة | 9                     | 10            | 11       | 12         | 13       | 14            | 15       | 16      |
| الزمرة | $C_9, C_3 \times C_3$ | $C_{10}, D_5$ | $C_{11}$ | 5 زمرة     | $C_{13}$ | $C_{14}, D_7$ | $C_{15}$ | 14 زمرة |

الرتبة 8:  $C_8, C_2 \times C_4, C_2 \times C_2 \times C_2, Q, D_4$

الرتبة 12:  $C_{12}, C_2 \times C_6, C_2 \times S_3, A_4, C_3 \times_j C_4$

لكل عدد أولي  $p$ ، توجد زمرة واحدة فقط (تحت سقف التماثل)، وهي بالتحديد،  $C_p$  (انظر (1.27)، وزمرتان فقط من الرتبة  $p^2$ ، وهما بالتحديد،  $C_p \times C_p$  و  $C_{p^2}$  (انظر (4.18)). لتصنيف الزمر من الرتبة 6، (انظر (4.23)، ومن أجل الرتبة 8، (انظر (4.21)، ومن أجل الرتبة 12، (انظر (5.16)، وبالنسبة للرتب 10، 14 و 15، (انظر (5.14).

نجد بصعوبة، بأن القوى الأكثر كبراً للأعداد الأولية التي تقسم  $n$ ، ستشكل لدينا زمراً أكثر من الرتبة  $n$ . في الحقيقة، إذا كان  $f(n)$  عدد الصفوف المتماثلة من الزمر ذي الرتبة  $n$ ، عندئذٍ

$$f(n) \leq n^{\left(\frac{2}{27} + o(1)\right)e(n)^2}$$

حيث  $e(n)$ . الأس الأكبر العدد الأولي القاسم لـ  $n$  و  $o(1) \rightarrow 0$  كما أن  $e(n) \rightarrow \infty$  (انظر (Pyber 1993).

في 2001، وجدت قائمة كاملة وفائضة من الزمر من الرتب أصغر أو تساوي 2000 – تحت سقف التماثل، ويوجد تماماً 49,910,529,484 (Besche et al. 2001).

## التشاكلات (Homomorphisms)

**تعريف 19.1** إن التشاكل من الزمرة  $G$  إلى زمرة ثانية  $G'$  هو تطبيق  $a : G \rightarrow G'$  بحيث يكون  $a(ab) = a(a)a(b)$ ، لكل  $a, b \in G$ . والتماثل هو تشاكل تقابل. مثلاً، التطبيق المحدد  $\det : GL_n(F) \rightarrow F^X$  هو تشاكل.

**20.1** ليكن  $a$  تشاكلاً ما لكل عنصر  $a_1, a_2, \dots, a_n$  من  $G$   
 $a(a_1 a_2 \dots a_m) = a(a_1(a_2 \dots a_m)) = a(a_1)a(a_2 \dots a_m) = \dots$   
 $= a(a_1) \dots a(a_m)$

وبشكل خاص، لكل  $m \geq 1$

بالإضافة إلى ذلك  $a(e) = a(ee) = a(e)a(e)$ ، ومنه  $a(e) = e$  (بتطبيق 1.2).  
وأيضاً

وبهذا يكون  $a(a^{-1}) = a(a)^{-1}$ . وبالتالي تكون (8) محققة لكل  $m \in \mathbb{Z}$ . لذلك، فإن تشاكلات الزمر التبديلية تكون أيضاً تشاكلات  $\mathbb{Z}$ -مودول.

**مبرهنة 21.1 (كايلي)** يوجد تشاكل متباين قانوني من الشكل

البرهان. لكل  $a \in G$ ، نعرّف  $a_L : G \rightarrow G$  بالعلاقة  $a_L x = ax$  (بالضرب من اليسار بـ  $a$ ). لكل  $x \in G$ ،

ومن هنا  $(ab)_L = a_L \circ b_L$ . كما أن  $e_L = id$  وبالتالي

وبالتالي يكون  $a_L$  تقابلاً، أي أن،  $a_L \in \text{Sym}(G)$ . عندئذٍ فإن  $a_L \mathbf{a} a_L$  تشاكل  $G \rightarrow \text{Sym}(G)$ ، وهو متباين وذلك حسب قانون الحذف.

لسوء الحظ، إن  $S_n$  كبيرة جداً بأن نتعامل معها، باستثناء الحالة التي يكون فيها  $n$  صغيراً. سنرى فيما بعد (4.22) بأن  $G$  ستكون غالباً مغمورة في زمرة التبديلات برتبة أصغر بكثير من  $n!$ .

بما أن الخاصة التجميعية محققة، يكون  $a(bS) = (ab)S$ ، ويمكن أن نرمز لها بالرمز  $abS$ .

إذا كانت  $H$  زمرة جزئية من الزمرة  $G$ ، تسمى المجموعات التي من الشكل  $aH$  بالمرافقات اليسارية لـ  $H$  في  $G$ ، و تسمى المجموعات التي تكون من الشكل  $Ha$  بالمرافقات اليمينية لـ  $H$  في  $G$ . وبما أن  $e \in H$ ، فإن،  $aH = H$  إذا وفقط إذا كان  $a \in H$ .

**مثال 23.1** لتكن  $G = (\mathbb{Z}_2, +)$ ، وليكن  $H$  فضاءً جزئياً بعده 1 (المستقيم مار من مبدأ الإحداثيات). عندئذٍ المرافقات (اليسارية و اليمينية) لـ  $H$  عبارة عن مستقيمات موازية لـ  $H$ .

**قضية 24.1** لتكن  $H$  زمرة جزئية من الزمرة  $G$ .

(a) أي عنصر  $a \in G$  يقع في المرافقة اليسارية  $C$  لـ  $H$  إذا وفقط إذا كان  $C = aH$ .

(b) المرافقتان اليساريتان إما أن تكونا منفصلتين أو متساويتين.

(c)  $aH = bH$  إذا وفقط إذا كان  $a^{-1}b \in H$ .

(d) أي مرافقتين يساريتين تحتويان على نفس العدد من العناصر (من الممكن أن تكونا غير منتهيتين).

**البرهان.** (a) من المؤكد من أن  $a \in aH$ . العكس، إذا كان  $a$  يقع في المرافقة اليسارية  $bH$ ، عندئذٍ يكون  $a = bh$  لبعض العناصر مثل  $h$ ، ولهذا

$$aH = bhH = bH$$

(b) إذا كان  $C$  و  $C'$  غير منفصلتين، عندئذٍ تحويان على عنصر مشترك  $a$ ، ويكون  $C = aH$  و  $C' = aH$  وذلك من (a).

(c) إذا كان  $a^{-1}b \in H$ ، عندئذٍ  $H = a^{-1}bH$ ، ومنه يكون  $aH = aa^{-1}bH = bH$ . وبالعكس، إذا كان  $aH = bH$ ، عندئذٍ يكون  $H = a^{-1}bH$ ، ومنه  $a^{-1}b \in H$ .

(d) التطبيق  $(ba^{-1})_L : ah \rightarrow bh$  تقابل  $aH \rightarrow bH$ .

إن الدليل (index)  $(G : H)$  للزمرة  $H$  في  $G$  هو عدد المرافقات اليسارية لـ  $H$  في  $G$ .

مثلاً،  $(G : 1)$  هي رتبة الزمرة  $G$ .

<sup>6</sup> أكثر توضيحاً، إن  $(G : H)$  هي قدرة المجموعة  $\{aH, a \in G\}$ .

إن المرافقات اليسارية للزمرة  $H$  في  $G$  تشكل تغطية لـ  $G$ ، (24.1 b) تبين بأنه يشكل تجزئة لـ  $G$ . وبكلمات أخرى، الشرطان  $a$  و  $b$  يقعان في نفس المرافقة اليسارية التي تشكل علاقة تكافؤ على  $G$ .

**مبرهنة (25.1) (لاغرانج)** لتكن  $G$  زمرة منتهية، عندئذٍ

$$(G : 1) = (G : H)(H : 1)$$

بشكل خاص، رتبة كل زمرة جزئية منتهية تقسم رتبة الزمرة .

**البرهان.** المرافقات اليسارية لـ  $H$  في  $G$  تشكل تجزئة لـ  $G$ . يوجد  $(G : H)$  مرافقة، وكل منها تحوي على  $(H : 1)$  عنصر.

**نتيجة (26.1)** رتبة كل عنصر من زمرة منتهية تقسم رتبة الزمرة.

**البرهان.** بتطبيق مبرهنة لاغرانج على  $H = \langle g \rangle$ ، ومن  $(H : 1) = o(g)$ .

**مثال 27.1** لتكن  $G$  من الرتبة  $p$ ،  $p$  عدد أولي، عندئذٍ كل عنصر يكون من الرتبة 1 أو من الرتبة  $p$ . لكن  $e$  هو العنصر الوحيد من الرتبة 1، ولذلك فإن  $G$  مولدة بأي عنصر  $a \neq e$ . وبشكل خاص، تكون  $G$  دائرية، وبالتالي  $G \approx C_p$ . هذا يبين بأنه، على سبيل المثال، وتحت سقف التماثل، توجد زمرة واحدة فقط من الرتبة 1,000,000,007 (لأن العدد أولي). في الحقيقة توجد زمرتان من الرتبة 1,000,000,014,000,000,049 (انظر 18.4).

**28.1** يوجد تطبيق تقابل بين مجموعة المرافقات اليسارية و مجموعة المرافقات اليمينية،  $aH \leftrightarrow Ha^{-1}$ . وبالتالي فإن  $(G : H)$  هو عدد المرافقات اليمينية لـ  $H$  في  $G$ . لكن، في الحالة العامة، إن المرافقة اليمينية لن تساوي المرافقة اليسارية. (انظر 33.1).

**29.1** يوجد لمبرهنة لاغرانج معكوس جزئي وهو: ليكن  $p$  عدداً أولياً يقسم رتبة  $G$ ، حيث  $m = (G : 1)$ ، عندئذٍ فإن  $G$  تحوي على عنصر من الرتبة  $p$  (مبرهنة كوشي 13.4)، إذا كان  $p^n$  قوى لعدد أولي ويقسم  $m$ ،  $m = (G : 1)$ ، عندئذٍ تحوي  $G$  على زمرة جزئية من الرتبة  $p^n$  (مبرهنة سيلو 2.5). نلاحظ أن 4- زمرة  $C_2 \times C_2$  من الرتبة 4، لكن لا تحوي على عنصر من الرتبة 4، وأن الزمرة  $A_4$  من الرتبة 12، ولكن لا تحوي على زمرة جزئية من الرتبة 6 (انظر التمرين 13.4).

وبالتعميم، يكون لدينا النتيجة الآتية.

**قضية 30.1** لأي زمرتين جزئيتين  $H \supset K$  من  $G$ ، يكون

$$(G : K) = (G : H)(H : K)$$

(نعني بذلك أنه، إما كلاهما غير منتهيتين أو تكونان منتهيتان ومتساويتان).

البرهان. نكتب  $G = \mathbf{C}_{i \in I} g_i H$  (الاجتماع منفصل)، و  $H = \mathbf{C}_{j \in J} h_j K$  (الاجتماع منفصل). بضرب المساواة الثانية بالعدد  $g_i$ ، نجد بأن  $g_i H = \mathbf{C}_{j \in J} g_i h_j K$  (الاجتماع منفصل)، و بهذا يكون  $G = \mathbf{C}_{i, j \in I \times J} g_i h_j K$  (الاجتماع منفصل). وهذا يبين بأن

$$(G : K) = |I| |J| = (G : H)(H : K)$$

### الزمر الجزئية الناعمية (Normal subgroups)

لتكن  $S$  و  $T$  مجموعتين جزئيتين من الزمرة  $G$ ، وليكن

$$ST = \{st, s \in S, t \in T\}$$

بما أن الخاصة التجميعية محققة، يكون  $R(ST) = (RS)T$ ، وبالتالي يمكن أن نرمز لهذه المجموعة بالرمز  $RST$ .

تكون الزمرة الجزئية  $N$  ناعمية في  $G$ ، ونرمز لها بالرمز  $N < G$ ، إذا كان  $gNg^{-1} = N$  لكل  $g \in G$ .

**ملاحظة 1.31** لكي نبين بأن  $N$  ناعمية في  $G$ ، يكفي أن نبرهن بأن  $gNg^{-1} \subset N$  لكل  $g \in G$ ، لأنه بضرب هذا الاحتواء من اليسار ومن اليمين بالعنصر  $g^{-1}$  و  $g$  على الترتيب نحصل على الاحتواء  $N \subset gNg^{-1}$ ، ونعيد هذه الكتابة مع  $g^{-1}$  لكل  $g$  يعطي بأن  $N \subset gNg^{-1}$  لكل  $g$ . المثال الآتي يبين بأنه يمكن أن يوجد زمرة جزئية  $N$  من الزمرة  $G$  و  $ag \in G$ ، بحيث يكون  $gNg^{-1} \subset N$  لكن  $gNg^{-1} \neq N$ .

**مثال 32.1** لتكن  $G = GL_2(Q)$ ، ولتكن  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ ، عندئذ فإن

$H$  زمرة جزئية من  $G$ ، في الحقيقة إن  $\mathbb{Z}$  لتكن  $g = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . عندئذ

$$g \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي  $gHg^{-1} \subset H$   $\neq$ .

**قضية 33.1** تكون الزمرة الجزئية  $N$  ناظمية في  $G$  إذا وفقط إذا كانت كل مرافقة يسارية هي مرافقة يمينية أيضاً، في هذه الحالة،  $gN = Ng$  لكل  $g \in G$ .  
البرهان. واضح أن

$$gNg^{-1} = N \Leftrightarrow gN = Ng$$

لهذا، إذا كانت  $N$  ناظمية، عندئذ كل مرافقة يسارية هي مرافقة يمينية (في الحقيقة،  $gN = Ng$ ). وبالعكس، إذا كانت المرافقة اليسارية  $gN$  هي مرافقة يمينية أيضاً، عندئذ يجب أن تكون المرافقة اليمينية  $Ng$  من (1.24 a). وبالتالي  $gN = Ng$ ، ولذلك  $gNg^{-1} = N$ .

**34.1** تنص القضية على أنه، لكي تكون  $N$  ناظمية، يجب أن يكون لدينا من أجل كل  $g \in G$  و  $n \in N$ ، العنصر  $n'$  بحيث يكون  $gn = n'g$  (وبشكل مكافئ، لكل  $g \in G$  و  $n \in N$ ، يوجد  $n'$  بحيث يكون  $ng = gn'$ ). وبعبارة أخرى، لكي نقول بأن  $N$  ناظمية هذا يكافئ القول بأن كل عنصر من  $G$  يمكنه أن يتحرك ليغير موضعه ليؤثر على عنصر من  $N$  ليستبدل بعنصر آخر من  $N$ .

**مثال 35.1 (a)** كل زمرة جزئية دليلها يساوي 2 تكون ناظمية. وبالفعل، لتكن  $g \in G$ ،  $g \notin H$ . عندئذ  $gH \neq H$  (الاجتماع منفصل). وبالتالي فإن  $gH$  متمم  $H$  في  $G$ . وبفس الترتيب يبين لنا بأن  $Hg$  متمم  $H$  في  $G$ ، وبالتالي يكون  $gH = Hg$ .

(b) نعتبر أن زمرة ديهيدرال هي على الشكل  $C_n = \{e, r, \dots, r^{n-1}\}$  عندئذ فإن دليل  $D_n = \{e, r, \dots, r^{n-1}, s, \dots, r^{n-1}s\}$  يساوي 2، وبالتالي فهي ناظمية. لكل  $n \geq 3$  الزمرة الجزئية  $\{e, s\}$  ليست ناظمية لأن  $r^{-1}sr = r^{n-2}s \notin \{e, s\}$ .

(c) كل زمرة جزئية في زمرة تبديلية تكون ناظمية (واضح)، لكن العكس ليس صحيحاً: الزمرة الرباعية  $Q$  ليست تبديلية، لكن كل زمرة جزئية فيها تكون ناظمية (انظر التمرين 1.1).

نقول أن الزمرة  $G$  بسيطة إذا لم تحو زمراً جزئية ناظمية باستثناء  $G$  و  $\{e\}$ . معظم الزمر يمكنها أن تحوي على كثير من الزمر الجزئية الناظمية – في الحقيقة، مبرهنات سيلو (§5) تطبق على كل زمرة منتهية تحوي على زمر جزئية غير تافهة ماعدا الزمر الدائرية برتب أولية.

**قضية 36.1** لتكن  $H$  و  $N$  زمريتين جزئيتين من  $G$  و  $N$  ناظمية، عندئذٍ  $HN$  زمرة جزئية في  $G$ . وإذا كانت  $H$  ناظمية عندئذٍ فإن  $HN$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$ . البرهان. إن المجموعة  $HN$  ليست خالية، و

$$(hn)(h'n') \stackrel{34.1}{=} hh'n'n' \in HN$$

وبالتالي تكون مغلقة بالنسبة لعملية الضرب. بما أن

$$(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} \stackrel{34.1}{=} h^{-1}n' \in HN$$

وهي أيضاً مغلقة بالنسبة لتركيب النظائر، وبالتالي فإن  $HN$  زمرة جزئية. عندئذٍ

$$gHNg^{-1} = gHg^{-1}.gNg^{-1} = HN,$$

لكل  $g \in G$ .

إن تقاطع الزمر الجزئية الناظمية هو أيضاً زمرة جزئية ناظمية (cf 13.1). لذلك، يمكننا أن نعرف زمرة جزئية ناظمية مولدة بالمجموعة  $X$  في الزمرة  $G$  لتكون تقاطع الزمر الجزئية الناظمية الحاوية على  $X$ . وتكون على شكل حدود من  $X$  وهي معقدة قليلاً. نقول بأن المجموعة الجزئية  $X$  من الزمرة  $G$  ناظمية إذا كان  $gXg^{-1} \subset X$  لكل  $g \in G$ .

**تمهيدية 37.1** إذا كانت  $X$  ناظمية، عندئذٍ الزمرة الجزئية  $\langle X \rangle$  المولدة بها تكون ناظمية. البرهان. إن تطبيق "الترافق مع  $g$ "،  $a \mapsto gag^{-1}$ ، عبارة عن تشاكل  $G \rightarrow G$ . إذا كان  $a \in \langle X \rangle$ ، نقول بأن،  $a = x_1 \dots x_m$  مع كل  $x_i$  أو معكوسها في  $X$ ، عندئذٍ

$$gag^{-1} = (gx_1g^{-1}) \dots (gx_mg^{-1}) \in \langle X \rangle$$

**تمهيدية 38.1** لأي مجموعة جزئية  $X$  في  $G$ ، المجموعة الجزئية  $\bigcup_{g \in G} gXg^{-1}$  ناظمية، وهي أصغر مجموعة ناظمية تحوي على  $X$ . البرهان. واضح.

بجمع التمهيدات السابقة، نحصل على القضية الآتية.

**قضية 39.1** الزمرة الجزئية الناظمية المولدة بالمجموعة الجزئية  $X$  في  $G$  هي  $\langle \bigcup_{g \in G} gXg^{-1} \rangle$ .

## النواة وزمر القسمة (Kernels and quotients)

إن نواة التشاكل  $a : G \rightarrow G'$  هي

$$\text{Ker}(a) = \{g \in G \mid a(g) = e\}$$

إذا كان  $a$  متبايناً، عندئذٍ  $\text{Ker}(a) = \{e\}$ . العكس، إذا كان  $\text{Ker}(a) = \{e\}$ ، فإن  $a$  متباين، لأن

$$a(g) = a(g') \Rightarrow a(g^{-1}g') = e \Rightarrow g^{-1}g' = e \Rightarrow g = g'$$

**قضية 40.1** نواة أي تشاكل هي زمرة جزئية ناظمية.

**البرهان.** من الواضح أنها زمرة جزئية، وإذا كان  $a \in \text{Ker}(a)$ ، لذلك فإن  $a(a) = e$ ، و  $g \in G$  عندئذٍ

$$a(gag^{-1}) = a(g)a(a)a(g)^{-1} = a(g)a(g)^{-1} = e$$

وبالتالي  $gag^{-1} \in \text{Ker}(a)$ .

مثلاً، إن نواة التشاكل  $\det: \text{GL}_n(F) \rightarrow F^X$  هي زمرة من المصفوفات من النوع  $n \times n$  والتي محددها يساوي 1 - تسمى هذه الزمرة  $\text{GL}_n(F)$  بالزمرة الخطية الخاصة من الدرجة  $n$ .

**قضية 41.1** كل زمرة جزئية ناظمية هي نواة لتشاكل زمري. وبتفصيل أكثر، إذا كانت  $N$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$ ، عندئذٍ توجد زمرة وحيدة تبني على المجموعة  $G/N$  والمؤلفة من مرافقات  $N$  في  $G$  بحيث  $aN: G \rightarrow G/N$  يكون تشاكل زمري. **البرهان.** نكتب المرافقات كمرافقات يسارية، ونعرف  $(aN)(bN) = (ab)N$ . علينا أن نبرهن (i) إنه معرف جيداً، و (ii) يعطي زمرة تبني على مجموعة المرافقات. وعندئذٍ يكون من الواضح أن التطبيق  $aN: G \rightarrow G/N$  تشاكل نواته  $N$ .

(i) لنكن  $aN = a'N$  و  $bN = b'N$ ، علينا أن نبين بأن  $abN = a'b'N$ .  
لكن

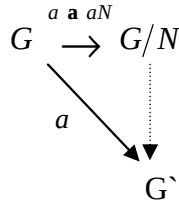
$$abN = a(bN) = a(b'N) \stackrel{33.1}{=} aNb' = a'Nb' \stackrel{33.1}{=} a'b'N$$

(ii) إن الجداء تجميعي بالتأكيد، المرافق  $N$  هو العنصر المحايد، و  $a^{-1}N$  هو معكوس  $aN$ .

**42.1** إن الزمرة  $G/N$  تسمى بزمرة القسمة<sup>7</sup> لـ  $G$  على  $N$ . التطبيق  $aN: G \rightarrow G/N$  يتمتع بالخاصة العامة الآتية: لأي تشاكل  $a: G \rightarrow G'$  من الزمر بحيث يكون  $a(N) = \{e\}$ ، يوجد تشاكل وحيد  $G/N \rightarrow G'$  بحيث يجعل المخطط الآتي تبادلياً:

<sup>7</sup> تسمى عند بعض المؤلفين بـ "زمرة الخارج" بدلاً من "زمرة القسمة".





لنتبين ذلك، نلاحظ بأنه لكل  $n \in N$ ،  $a(gn) = a(g)a(n) = a(g)$  ولذلك فإن  $a$  ثابتة على كل مرافقة يسارية  $gN$  لـ  $N$  في  $G$ . ولذلك نعرّف التطبيق

$$\bar{a} : G/N \rightarrow G', \bar{a}(gN) = a(g)$$

و  $\bar{a}$  تشاكل لأن

$$\bar{a}((gN)(g'N)) = \bar{a}(gg'N) = a(gg') = a(g)a(g') = \bar{a}(gN)\bar{a}(g'N)$$

إن وحدانية  $\bar{a}$  تتضح من أن  $G \rightarrow G/N$  غامر.

**مثال 43.1 (a)** نعتبر الزمرة الجزئية  $mZ$  في  $Z$ . وزمرة القسمة  $Z/mZ$  زمرة دائرية من الرتبة  $m$ .

(b) ليكن  $L$  مستقيماً ماراً من مبدأ الإحداثيات في  $\mathbb{R}^2$ . عندئذ فإن  $\mathbb{R}^2/L$  يتماثل مع (لأنه فضاء متجهي على  $\mathbb{R}$  ذو البعد واحد)

(c) لكل  $n \geq 2$ ، زمرة القسمة  $\langle r \rangle / D_n = \{\bar{e}, \bar{s}\}$  (زمرة دائرية من الرتبة 2).

### حول مبرهنات التماثل (Theorems concerning homomorphisms)

المبرهنات في هذا المقطع الجزئي تسمى أحياناً بمبرهنات التماثل (الأولى، الثانية، ...).

تحليل التشاكلات إلى عوامل

نتذكر بأن صورة التطبيق  $a : S \rightarrow T$  هي  $a(S) = \{a(s), s \in S\}$ .

**مبرهنة 44.1 (المبرهنة الأساسية لتشاكلات الزمر)** لأي تشاكل  $a : G \rightarrow G'$  من الزمر،

تكون النواة  $N$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$ ، الصورة  $I$  لـ  $a$  هي زمرة جزئية في  $G'$ ،

إن  $a$  يتحلل بالحالة الطبيعية إلى تطبيق

غامر، وتماثل، وتطبيق متباين:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{a} & G' \\
 \downarrow \text{غامر } g & \text{a } gN & \downarrow \text{متباين} \\
 G/N & \xrightarrow{gN \text{ a } a(g)} & I \\
 & \text{تماثل} &
 \end{array}$$

**البرهان.** لقد رأينا في (40.1) أن النواة هي زمرة جزئية ناظمية في  $G$ . إذا كان  $b = a(a)$  و  $b' = a(a')$ ، عندئذٍ  $bb' = a(aa')$ ، و  $b^{-1} = a(a^{-1})$ ، ولذلك  $I = a(G)$  <sup>def</sup> يكون زمرة جزئية في  $G'$ . تبين الخاصة العامة لزمرة القسم (42.1) أن التطبيق  $\alpha: G \rightarrow I$  يعرف التشاكل  $\bar{\alpha}: G/N \rightarrow I$  بالعلاقة  $\bar{\alpha}(gN) = a(g)$ . إن هذا التشاكل غامر، وإذا كان  $\bar{\alpha}(gN) = e$ ، عندئذٍ فإن  $g \in \text{Ker}(a) = N$ ، ومنه فإن نواة  $\bar{\alpha}$  تافهة. وبالتالي فإن التشاكل متباين.

### مبرهنة التماثل

**مبرهنة 45.1 (مبرهنة التماثل)** لنكن  $H$  و  $N$  زمرتين جزئيتين من  $G$  و  $N$  ناظمية. عندئذٍ  $HN$  زمرة جزئية في  $G$ ،  $H \cap N$  زمرة جزئية ناظمية في  $H$ ، وإن التطبيق  $h(H \cap N) \rightarrow hN: H/H \cap N \rightarrow HN/N$  تماثل.

**البرهان.** لقد رأينا في (36.1) أن  $HN$  زمرة جزئية. لنأخذ التطبيق  $H \rightarrow G/N, h \mapsto hN$

إن هذا التطبيق عبارة عن تشاكل، نواته  $H \cap N$ ، والتي هي ناظمية في  $H$ . من المبرهنة 44.1، ومن التطبيق ينتج لدينا التماثل  $H/H \cap N \rightarrow I$  حيث  $I$  صورة التطبيق. لكن  $I$  مجموعة المرافقات التي لها الشكل  $hN$  مع  $h \in H$ ، أي أن،  $I = HN/N$ .

### مبرهنة التقابل

تبين المبرهنة الآتية أنه إذا كانت  $\bar{G}$  زمرة القسم لـ  $G$ ، عندئذٍ فإن شبكة من الزمر الجزئية في  $\bar{G}$  تتحكم ببنية شبكة الزمر الجزئية لـ  $G$  التي تقع على نواة التطبيق  $G \rightarrow \bar{G}$ .

**مبرهنة 46.1 (مبرهنة التقابل)** لتكن  $a: G \rightarrow \bar{G}$  تشاكل زمري غامر، وليكن  $N = \text{Ker}(a)$  عندئذٍ يوجد تطبيق تقابل

$$\{ \text{الزمر الجزئية من } \bar{G} \} \leftrightarrow \{ \text{الزمر الجزئية من } G \text{ والحاوية على } N \}$$

بالنسبة للزمرة الجزئية  $H$  الحاوية على  $N$  فهي تقابل  $\bar{H} = a(H)$  والزمرة الجزئية  $\bar{H}$  في  $\bar{G}$  فهي تقابل  $H = a^{-1}(\bar{H})$ . وبالإضافة لذلك، إذا كان  $H \leftrightarrow \bar{H}$  و  $H' \leftrightarrow \bar{H}'$  عندئذٍ

$$(\bar{H}' : \bar{H}) = (H' : H) \text{ في الحالة التي يكون فيها } \bar{H} \subset \bar{H}' \Leftrightarrow H \subset H' \text{ (a)}$$

(b) تكون  $\bar{H}$  زمرة جزئية ناظمية في  $\bar{G}$  إذا وفقط إذا كانت  $H$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$ ، وفي هذه الحالة ينتج لدينا التماثل

$$G/H \rightarrow \bar{G}/\bar{H}$$

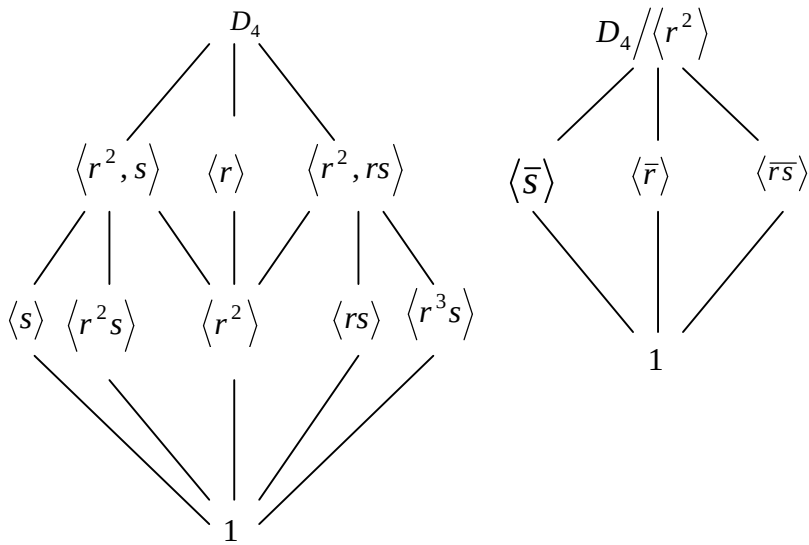
**البرهان.** إذا كانت  $\bar{H}$  زمرة جزئية في  $\bar{G}$ ، عندئذٍ من السهولة رؤية بأن  $a^{-1}(\bar{H})$  زمرة جزئية في  $G$  وتحتوي  $N$ ، وإذا كانت  $H$  زمرة جزئية في  $G$ ، عندئذٍ فإن  $a(H)$  زمرة جزئية في  $\bar{G}$  (انظر 44.1). من الواضح،  $aa^{-1}(H) = HN$ ، والتي تساوي  $H$  إذا وفقط إذا كان  $H \supset N$ ، و  $aa^{-1}(\bar{H}) = \bar{H}$ ، لذلك، فإن العمليتين تعطيان التطبيق التقابل المطلوب. أما الحالات الباقية فمن السهل برهانها. مثلاً، التحليل  $H' = \mathbf{C}_{i \in I} a_i H$  لـ  $H' \rightarrow \bar{H}'$  إلى اجتماع منفصل من المرافقات اليسارية لـ  $H$  يعطينا تحليلاً مشابهاً  $\bar{H}' = \mathbf{C}_{i \in I} a_i \bar{H}$ .

**نتيجة 47.1** لتكن  $N$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$ ، عندئذٍ يوجد تطبيق تقابل بين مجموعة الزمر الجزئية في  $G$  والحاوية على  $N$  ومجموعة الزمر الجزئية في  $G/N$ ،  $G/N \leftrightarrow H/N$ ، علاوة على ذلك، تكون  $H$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$  إذا وفقط إذا كانت  $H/N$  زمرة جزئية ناظمية في  $G/N$ ، وفي هذه الحالة ينتج لدينا التماثل

$$G/H \rightarrow (G/N)/(H/N)$$

**البرهان.** هذه الحالة الخاصة من المبرهنة التي يكون فيها  $a$  هو التطبيق  $g \mapsto gN: G \rightarrow G/N$ .

**مثال 48.1** لتكن  $G = D_4$  ولتكن  $N$  زمرتها الجزئية  $\langle r^2 \rangle$ . بالرجوع إلى (16.1) نجد أن  $srs^{-1} = r^3$ ، ولذلك  $(r^3)^2 = r^2$ ،  $sr^2s^{-1} = r^2$  لذلك فإن  $N$  ناظمية. إن الزمرتين  $G$  و  $G/N$  لهما الشبكة الآتية من الزمر الجزئية



### الجداءات المباشرة (Direct product)

لتكن  $G$  زمرة، ولتكن  $H_1, H_2, \dots, H_k$  زمراً جزئية من  $G$ . نقول بأن  $G$  هي جداء مباشر للزمر الجزئية  $H_i$  إذا كان التطبيق

$$(h_1, h_2, \dots, h_k) \mathbf{a} h_1 h_2 \dots h_k : H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k \rightarrow G$$

تماثلاً من الزمر. هذا يعني أن كل عنصر  $g$  من  $G$  يمكن أن يكتب وبشكل وحيد بالشكل  $g = h_1 h_2 \dots h_k$ ، وإذا كان  $g' = h'_1 h'_2 \dots h'_k$ ، عندئذٍ

$$gg' = (h_1 h'_1) (h_2 h'_2) \dots (h_k h'_k)$$

إن القضايا الآتية تعطينا قاعدة لكي تكون الزمرة جداءً مباشراً لزمريها الجزئية.

**قضية 49.1** تكون الزمرة  $G$  جداءً مباشراً لزمريها الجزئية  $H_1, H_2$  إذا وفقط إذا كان

$$G = H_1 H_2 \quad (a)$$

$$H_1 \mathbf{I} H_2 = \{e\} \quad (b)$$

(c) كل عنصر من  $H_1$  يتبادل مع كل عنصر من  $H_2$ .

**البرهان.** إذا كانت  $G$  جداءً مباشراً لزمريها الجزئية  $H_1, H_2$ ، عندئذٍ فإن (a) و (c) و (b) محقق لأنه، من أجل أي  $g \in H_1 \mathbf{I} H_2$ ، يتطابق العنصر  $(g, g^{-1})$  مع  $e$  بالنسبة للتطبيق  $\mathbf{a} h_1 h_2$ ، وبالتالي يساوي  $(e, e)$ .

بالعكس، (c) يقتضي بأن  $h_1 h_2 \mathbf{a} (h_1, h_2)$  تشاكل، و (b) يبين بأن التطبيق متباين:

$$h_1 h_2 = e \Rightarrow h_1 = h_2^{-1} \in H_1 \mathbf{I} H_2 = \{e\}$$

أخيراً، من (a) نجد بأنه غامر .

**قضية 50.1** تشكل الزمرة  $G$  جداءً مباشراً لزمريها الجزئية  $H_1, H_2$  إذا وفقط إذا كان

$$G = H_1 H_2 \quad (a)$$

$$H_1 \cap H_2 = \{e\} \quad (b)$$

(c) كل من  $H_1, H_2$  ناظمية في  $G$ .

**البرهان.** لقد برهنت هذه الشروط في القضية السابقة، بقي أن نبرهن بأن كل عنصر  $h_1$  من  $H_1$  يتبادل مع كل عنصر  $h_2$  من  $H_2$ . إن المبادل

$$[h_1, h_2] \stackrel{\text{def}}{=} h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} = (h_1 h_2 h_1^{-1}) \cdot h_2^{-1} = h_1 (h_2 h_1^{-1} h_2^{-1})$$

ينتمي إلى  $H_2$  لأن  $H_2$  ناظمية، وينتمي إلى  $H_1$  لأنها ناظمية، و من (b) نجد بأنه يساوي  $e$ ، وبالتالي  $h_1 h_2 = h_2 h_1$ .

**قضية 51.1** تكون الزمرة  $G$  جداءً مباشراً لزمريها الجزئية  $H_1, H_2, \dots, H_k$  إذا وفقط إذا كان

$$G = H_1 H_2 \dots H_k \quad (a)$$

$$H_j \cap (H_1 \dots H_{j-1} H_{j+1} \dots H_k) = \{e\} \quad (b) \text{ لكل } j$$

(c) كل من  $H_1, H_2, \dots, H_k$  ناظمية في  $G$ .

**البرهان.** لزوم الشرط واضح، سوف نبرهن على كفاية الشرط. من أجل  $k = 2$ ، فقد قمنا ببرهانه سابقاً، ولذلك سنناقش بالاستقراء على  $k$ . إن المناقشة بالاستقراء المستخدمة في (36.1) تبين بأن زمرة جزئية ناظمية في  $G$ . إن الشروط (a,b,c) محققة بالنسبة للزمر الجزئية  $H_1, H_2, \dots, H_{k-1}$  في  $H_1 H_2 \dots H_{k-1}$ ، ولذلك ومن الفرض الاستقرائي يكون

$$(h_1, h_2, \dots, h_{k-1}) \mathbf{a} h_1 h_2 \dots h_{k-1} :$$

$$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_{k-1} \rightarrow H_1 H_2 \dots H_{k-1}$$

تماثلاً. إن الزمرتين  $H_k$  و  $H_1, H_2, \dots, H_{k-1}$  تحققان فرضيات (50.1)، ولذلك فإن

$$(h, h_k) \mathbf{a} h h_k : (H_1 \dots H_{k-1}) \times H_k \rightarrow G$$

تماثل أيضاً. إن تركيب هذه التماثلات

$$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_{k-1} \times H_k \xrightarrow{(h_1, \dots, h_k) \mathbf{a} (h_1 \dots h_{k-1} h_k)} H_1 H_2 \dots H_{k-1} \times H_k \xrightarrow{(h, h_k) \mathbf{a} h h_k} G$$

يرسل  $(h_1, h_2, \dots, h_k)$  إلى  $h_1 h_2 \dots h_k$ .

## الزمر التبديلية (Commutative groups)

إن تصنيف الزمر التبديلية المنتهية التوليد درست بشكل أكبر كجزء في مبرهنة المودولات على حلقة الإيديالات الرئيسية، لكن، من أجل أن نكمل ذلك، فيما يلي الشرح الأولي.

لتكن  $M$  زمرة تبديلية، مع عملية الجمع، إن الزمرة  $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  من  $M$  و المولدة بالعناصر  $x_1, \dots, x_k$  تتكون من المجموع  $\sum m_i x_i$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}$ . تسمى المجموعة الجزئية  $\{x_1, \dots, x_k\}$  قاعدة لـ  $M$  إذا كانت تولد  $M$  و

$$i \text{ لكل } m_1 x_1 + \dots + m_k x_k = 0 \Rightarrow m_i x_i = 0, m_i \in \mathbb{Z}$$

من الواضح، أن لـ  $M$  قاعدة منتهية إذا وفقط إذا كان مجموعاً مباشراً لزمرة دائرية منتهية.

**تمهيدية 52.1** بفرض أن  $M$  مولدة بالمجموعة  $\{x_1, \dots, x_k\}$  ولتكن  $c_1, \dots, c_k$  أعداد صحيحة، بحيث يكون  $\gcd(c_1, \dots, c_k) = 1$ . عندئذٍ توجد مولدات  $y_1, \dots, y_k$  من  $M$ ، بحيث يكون  $y_1 = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k$ .

**البرهان.** إذا كان  $c_i < 0$ ، نغير إشارات كل من  $c_i$  و  $x_i$ . هذا يسمح لنا بأن نفرض أن كل من  $c_i \in \mathbb{N}$ . بالاستقراء على  $s = c_1 + \dots + c_k$ . تكون التمهيدية محققة إذا كان  $s = 1$ ، نفرض أن  $s > 1$ . عندئذٍ، يوجد على الأقل عنصران من  $c_i$  غير معدومين، وليكن،  $c_1 \geq c_2 > 0$ . الآن إن  $M = \langle x_1, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_k \rangle$  وبما أن

$$\begin{aligned} \gcd(c_1 - c_2, c_2, c_3, \dots, c_k) &= 1, \text{ ومنه، بالاستقراء، } M = \langle y_1, \dots, y_k \rangle, \text{ حيث} \\ y &= (c_1 - c_2)x_1 + c_2(x_1 + x_2) + c_3 x_3 + \dots + c_k x_k \\ &= c_1 x_1 + \dots + c_k x_k \end{aligned}$$

**مبرهنة 53.1** كل زمرة تبديلية منتهية التوليد لها قاعدة.

**البرهان.** نناقش بالاستقراء على عدد مولدات  $M$ . إذا كانت  $M$  مولدة بعنصر واحد، تكون الحالة التافهة، ولذلك نفرض بأنه يكون لدينا  $k > 1$  مولد على الأقل. من المجموعة  $\{x_1, \dots, x_k\}$  المولدة لـ  $M$  مع  $k$  عنصر يوجد عنصر واحد  $x_1$  بحيث تكون رتبته هي الرتبة الأصغر. نبين لاحقاً بأن  $M$  هي المجموع المباشر لـ  $\langle x_1 \rangle$  و  $\langle x_2, \dots, x_k \rangle$ . وهذا يكمل البرهان، وذلك من الفرض الاستقرائي ومن أن قواعد المودول الثاني و  $x_1$  يشكلان قاعدة لـ  $M$ .

إذا لم تكن  $M$  مجموعاً مباشراً لـ  $\langle x_1 \rangle$  و  $\langle x_2, \dots, x_k \rangle$ ، عندئذٍ توجد العلاقة

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k = 0, \quad (9)$$

حيث  $m_1 x_1 \neq 0$  . ليكن  $d = \gcd(m_1, \dots, m_k) > 0$  ، وليكن  $c_i = m_i \mid d$  . من التمهيدية، و  $M = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$  و  $y = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k$  . لكن  $dy_1 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k = 0$  و  $d \leq m_1 < o(x_1)$  ، وهذا تناقض.

**نتيجة 54.1** الزمرة التبديلية المنتهية  $G$  و المؤلفة من  $n$  عنصر على الأكثر من الرتبة  $n$  تكون دائرية.

**البرهان.** من المبرهنة لدينا،  $G \approx C_{n_1} \times \dots \times C_{n_r}$  من أجل  $n_i \in N$  . ومن الفرض ينتج أن  $n_i$  أولية نسبياً. ليكن  $a_i$  عنصراً يولد العامل  $i$  . عندئذٍ  $(a_1, \dots, a_r)$  من الرتبة  $n_1 \dots n_r$  ، وبالتالي فهي تولد  $G$  .

**ملاحظة 55.1** ليكن  $F$  حقل ما. إن العناصر من الرتبة  $n$  في  $F^X$  هي جذور لكثيرية الحدود  $X^n - 1$  . لأن التحليل وحيد في  $F^X$  ، يوجد منها  $n$  جذر على الأكثر، ولذلك فإن النتيجة تبين بأن أي زمرة جزئية منتهية من  $F^X$  تكون دائرية.

**مبرهنة 56.1** يمكن أن تمثل الزمرة التبديلية المنتهية التوليد غير التافهة  $M$  بالشكل

$$M \approx C_{n_1} \times \dots \times C_{n_s} \times C_{\infty}^r \quad (10)$$

من أجل أعداد صحيحة معينة  $n_1, \dots, n_s \geq 2$  و  $r \geq 0$  . وبالإضافة لذلك فإن

(a)  $r$  يعرف  $M$  بشكل وحيد

(b) يمكن اختيار  $n_i$  بحيث يكون  $n_1 \geq 2$  و  $n_1 \mid n_2, \dots, n_{s-1} \mid n_s$  ، وعندئذٍ فهي تعرف  $M$  بشكل وحيد.

(c) يمكن اختيار  $n_i$  بحيث تكون قوى لأعداد أولية، وبالتالي فهي تحدد  $M$  بشكل وحيد.

يدعى العدد  $r$  مرتبة (rank)  $M$  . نتعرف  $M$  بطريقة وحيدة بواسطة  $r$  ، نعني بذلك أن كل تحليلين لـ  $M$  من الشكل (10)، سيكون عدد الزمر من  $C_{\infty}$  نفسه (وبالنسبة إلى  $n_i$  في (b) و (c) نبرهن بشكل مشابه). تسمى الأعداد الصحيحة  $n_1, \dots, n_s$  في (b) القواسم اللامتغيرة لـ  $M$  . تعني (c) أن  $M$  يمكن أن تمثل

$$M \approx C_{p_1^{e_1}} \times \dots \times C_{p_t^{e_t}} \times C_{\infty}^r, \quad e_i \geq 1 \quad (11)$$

من أجل قوى لأعداد أولية معينة  $p_i^{e_i}$  (يمكن تكرار الأعداد الأولية) ، إن الأعداد الصحيحة  $p_1^{e_1}, \dots, p_t^{e_t}$  تعرف  $M$  بشكل وحيد، وتسمى بالقواسم الابتدائية لـ  $M$  .

**البرهان.** الإثبات الأول هو معنى آخر للمبرهنة 53.1.

(a) لكل عدد أولي  $p$  لا يقسم أي من  $d_i$

$$M/pM \approx (C_\infty/pC_\infty)^r \approx (Z/pZ)^r$$

وبالتالي فإن  $r$  هو البعد للزمرة  $M/pM$  باعتباره  $F_p$  - فضاء متجهي.

(b,c) إذا كان  $\gcd(m, n) = 1$ ، عندئذٍ  $C_m \times C_n$  تحتوي على عنصر من الرتبة

$mn$ ، ولذلك

$$C_m \times C_n \approx C_{mn} \quad (12)$$

باستخدام (12) لتحليل  $C_{n_i}$  إلى جداء زمر دائرية رتبة كل منها قوى لأعداد أولية. وهذا قد

تحقق، (12) يمكن أن تستخدم لتجميع عوامل لتشكيل تحليل كالتحليل في (b)، مثلاً،

$C_{n_s} = \prod C_{p_i^{e_i}}$ ، حيث يكون الجداء من أجل أعداد أولية مختلفة من  $p_i$  و  $e_i$  أكبر قوة للعدد الأولي  $p_i$ .

لبرهان الوحداية في (b) و (c)، يمكن أن نستبدل  $M$  بزمرة القتل الجزئية (ولذلك

نفرض أن  $r = 0$ ). إن العدد الأولي  $p$  سيكون أي عدد أولي  $p_i$  في (11) إذا وفقط إذا

كانت  $M$  تحوي على عنصر من الرتبة  $p$ ، في الحالة التي يكون فيها  $p$  مكرر  $a$  مرة

حيث  $p^a$  عدد العناصر من الرتبة التي تقسم  $p$ . وبشكل مشابه،  $p^2$  سيقسم بعضاً من

العناصر  $p_i^{e_i}$  في (11) إذا وفقط إذا حوت  $M$  على عنصر من الرتبة  $p^2$ ، في تلك الحالة

سوف يقسم تماماً  $b$  الأعداد  $p_i^{e_i}$ ، حيث  $p^{a-b} p^{2b}$  عدد العناصر في  $M$  من الرتبة التي

تقسم  $p^2$ . بالمتابعة بهذه الطريقة، نجد بأن القواسم الأولية لـ  $M$  يمكن أن تعرف من عدد

عناصر  $M$  التي رتبة كل منها قوى لعدد أولي.

يمكن أن نتوصل إلى وحداية العوامل اللامتغيرة من القواسم الأولية، أو يمكن أن تبرهن

مباشرةً: ليكن  $n_s$  أصغر عدد صحيح أكبر من الصفر، بحيث يكون  $n_s M = 0$ ،  $n_{s-1}$

أصغر عدد صحيح أكبر من الصفر بحيث يكون  $n_{s-1} M = 0$  دائرية،  $n_{s-2}$  أصغر

عدد صحيح بحيث إن  $n_{s-2}$  يمكن أن يمثل على شكل جداء لزمريتين دائريتين، وهكذا.

تبرهن المبرهنة التي تكمل تصنيف الزمر التبديلية المنتهية: كل زمرة كهذه تكون متماثلة

تماماً مع إحدى الزمر الآتية

$$C_{n_1} \times \dots \times C_{n_r}, \quad n_1 | n_2, \dots, n_{r-1} | n_r$$

رتبة هذه الزمرة تساوي  $n_1 \dots n_r$ . مثلاً، كل زمرة تبديلية من الرتبة 90 تماثل تماماً واحدة

من الزمر الآتية  $C_{90}$  أو  $C_3 \times C_{30}$  - لتوضيح ذلك، نلاحظ أن أكبر عامل لامتغير يجب

أن يكون العامل من الرتبة 90 و القابل للقسمة على كل الأعداد الأولية الأصغر من 90.



## الميزات الخطية للزمر التبديلية

ليكن  $m(C) = \{z \in C, |z| = 1\}$ . هذه زمرة غير منتهية. لأي عدد صحيح  $n$ ، المجموعة  $m_n(C)$  من العناصر من الرتبة القاسمة لـ  $n$  تكون دائرية من الرتبة  $n$ ، في الحقيقة

$$m_n(C) = \{e^{2\pi i m/n}, 0 \leq m \leq n-1\} = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$$

حيث  $x_n = e^{2\pi i/n}$  الجذر النوني الابتدائي للواحد.

إن الميزة الخطية (أو الميزة فقط) للزمرة  $G$  هو التشاكل  $G \rightarrow m(C)$ . إن المجموعة  $G^\vee$  مع هذه الميزات تصبح زمرة بالنسبة لعملية الجمع

$$(c + c')(g) = c(g) + c'(g)$$

تسمى هذه الزمرة بالزمرة الثنوية. مثلاً، إن التطبيق  $c \mapsto c(1)$  تماثل من الزمرة الثنوية  $Z^\vee$  إلى  $m(C)$ .

نسمي التشاكل  $a \mapsto a(1)$  بالميزة التافهة (أو الأساسية). الباقي التربيعي بالمودول  $p$  للأعداد الصحيحة  $a$  التي لا تقبل القسمة على  $p$  معرفة بالشكل

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{في } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ -1 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

من الواضح، إن هذا يعتمد فقط على  $a$  بالمودول  $p$ ، وإذا كان كل من  $a, b$  لا يقبلان القسمة على  $p$ ، عندئذٍ  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$ ، ولذلك فإن

$$m_2(C) = \{ \left(\frac{a}{b}\right) : (Z/pZ)^c \rightarrow \{\pm 1\} \} \text{ هي ميزة } (Z/pZ)^c.$$

لنرمز الآن لأي زمرة دائرية من الرتبة  $n$  بالرمز  $m(n)$  (ليس بالضرورة  $m_n(C)$ )، و للزمرة التبديلية ذات القوة (exponent)  $n$ ، بالرمز  $G^\vee = \text{Hom}(G, m_n)$ .

**مبرهنة 57.1** لتكن  $G$  زمرة تبديلية منتهية بقوة  $n$ .

(a) إن الزمرة الثنوية  $G^\vee$  متماثلة مع  $G$ .

(b) التطبيق  $G \rightarrow G^{\vee\vee}$  الذي ترسل أي عنصر  $a$  من  $G$  إلى الميزة  $c \mapsto c(a)$

في  $G^\vee$  يكون تماثلاً.

وبعبارة أخرى،  $G \approx G^\vee$  و  $G^{\vee\vee} \approx G$ .

**البرهان.** البرهان واضح من أجل الزمر الدائرية، و  $(G \times H)^\vee \cong G^\vee \times H^\vee$ .

**58.1** نعني بأن التطبيق الطبيعي  $G \rightarrow G^{\vee\vee}$  تماثل ويكون حالة خاصة من مبرهنة (بونترياغين). وبتعميم الحالة، من الضروري أن تعتبر الزمر في الطوبولوجيا. مثلاً، كما لاحظنا سابقاً،  $m(C)^\vee$ ، كل  $m \in Z$  ستعرف مميزة  $m(C) \rightarrow m(C)$  :  $x \mapsto x^m$ ، يوجد العديد من التشاكلات  $m(C) \rightarrow m(C)$  ليست من هذا الشكل، لكن هذه الحالات المستمرة فقط. لنكن  $G$  زمرة تبديلية معطاة في الطوبولوجية المتراسة المحلية لأجل عمليات الزمرة المستمرة، عندئذٍ الزمرة  $G^\vee$  مع الخواص المستمرة  $G \rightarrow m(C)$  لها الميزة الطوبولوجية الطبيعية لتكون متراسة كلياً، وبالتالي التطبيق الطبيعي  $G \rightarrow G^{\vee\vee}$  يكون تماثلاً حسب مبرهنات (بونترياغين) الثنوية.

**مبرهنة 59.1 (علاقات التعمد)** لنكن  $G$  زمرة تبديلية منتهية. لأي ميزتين  $c$  و  $y$  في  $G$

$$\sum_{a \in G} c(a) y(a^{-1}) = \begin{cases} |G| & ; \quad c = y \\ 0 & ; \quad c \neq y \end{cases}$$

وبحالة خاصة

$$\sum_{a \in G} c(a) = \begin{cases} |G| & \text{تافهة } c \text{ إذا كانت} \\ 0 & \text{في الحالات الأخرى} \end{cases}$$

**البرهان.** إذا كان  $c = y$ ، عندئذٍ  $c(a) y(a^{-1}) = 1$ ، وبالتالي فإن المجموع يساوي  $|G|$ ، فيما عدا ذلك يوجد  $b \in G$ ، بحيث يكون  $c(b) \neq y(b)$ . حيث  $a$  تمسح كل  $G$ ، وكذلك  $ab$  أيضاً، ومنه

$$\begin{aligned} \sum_{a \in G} c(a) y(a^{-1}) &= \sum_{a \in G} c(ab) y((ab)^{-1}) \\ &= c(b) y(b^{-1}) \sum_{a \in G} c(a) y(a^{-1}) \\ \cdot \sum_{a \in G} c(a) y(a^{-1}) &= 0 \text{ وبالتالي } c(b) y(b^{-1}) \neq 1 \end{aligned}$$

**نتيجة 60.1** لأي  $a \in G$  يكون

$$\sum_{a \in G^\vee} c(a) = \begin{cases} |G| & \text{إذا كان } a = e \\ 0 & \text{في الحالات الأخرى} \end{cases}$$

البرهان. بتطبيق المبرهنة على  $G^\vee$ ، نلاحظ أن  $G = (G^\vee)^\vee$ .

## تمارين

إن هذه التمارين موضحة بالشرح كما هو مطلوب ليؤخذ بها.

1-1 بين أن الزمرة الرباعية تحوي على عنصر واحد من الرتبة 2، يتبادل مع جميع عناصر الزمرة  $Q$ ، استنتج أن  $Q$  تماثل  $D_4$ ، وأن كل زمرة جزئية في  $Q$  تكون ناظمية.

2-1 نأخذ العناصر

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

في  $GL_2(\mathbb{Z})$ . بين أن  $a^4 = 1$  و  $b^3 = 1$ ، لكن رتبة العنصر  $ab$  غير منتهية، وبالتالي فإن الزمرة  $\langle a, b \rangle$  غير منتهية.

3-1 بين أن كل زمرة منتهية رتبته عدد زوجي تحوي على عنصر رتبته تساوي 2.

4-1 لنكن  $N$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$  دليلها يساوي  $n$ . بين أنه إذا كان  $g \in G$ ، عندئذ فإن  $g^n \in N$ . أعطي مثلاً تبين فيه أن من الممكن أن يكون هذا خاطئاً إذا لم تكن  $N$  ناظمية.

5-1 يقال بأن الزمرة ذات قوة منتهية إذا وجد  $m > 0$  بحيث يكون  $a^m = e$  لكل  $a \in G$ ، وهو أصغر عدد يحقق العلاقة السابقة سندعوه فيما بعد قوة  $G$ . بين أن كل زمرة قوتها يساوي 2 تكون تبديلية.

6-1 يقال عن الزمرتين  $H$  و  $H'$  أنهما قابلتان للقياس إذا كان دليل  $H' \mid H$  منته في كل من الزمرتين  $H$  و  $H'$ . بين أن قابلية القياس تشكل علاقة تكافؤ على الزمر الجزئية في  $G$ .

## الفصل الثاني

### الزمر الحرة والتقديمات، زمر كوكستير

#### Free Groups and Presentations Coxeter groups

من المفيد دائماً لوصف زمرة إعطاء مجموعة من المولدات ومجموعة من الروابط للمولدات التي تستنتج منها علاقات أخرى. مثلاً، يمكن وصف الزمرة  $D_n$  بالمولدات  $r, s$  و العلاقات

$$r^n = e, s^2 = e, srsr = e$$

في هذا الفصل، نعطي القيمة لهذا المعنى. أولاً نحتاج لتعريف الزمرة الحرة على مجموعة  $X$  من المولدات — هذه الزمرة مولدة بـ  $X$  بدون علاقات باستثناء تلك التي تكون مستنتجة من مسلمات الزمرة. لأن النظائر قد تسبب التباسات، سنقوم أولاً بالدراسة على أنصاف الزمر<sup>8</sup>، والتي نعني بها المجموعة  $S$  مع عملية ثنائية معرفة عليها وعنصرها المحايد  $e$ . إن التشاكل  $a: S \rightarrow S'$  من أنصاف الزمر هو تطبيق يحقق  $(ab) = a(a)b$  لكل  $a, b \in S$  و  $a(e) = e$ . عندئذٍ  $a$  يحافظ على كل الجداءات المنتهية.

#### أنصاف الزمر الحرة (Free semigroups)

لنكن  $X = \{a, b, c, \dots\}$  (من الممكن أن تكون غير منتهية) مجموعة من الرموز، الكلمة (word) هي متتالية منتهية من رموز  $X$  والتي يمكن التكرار فيها. مثلاً، إن

$$aa, aabac, b$$

كلمات مختلفة. يمكن ضرب كلمتين وذلك بالدمج بينهما، مثلاً،

$$aaaa * aabac = aaaaaabac$$

هذا يعرف على كل مجموعة الكلمات عملية ثنائية تجميعية. كما توجد متتالية خالية، نرمز لها بالرمز 1. (في الحالة التي يكون فيها الرمز 1 من المجموعة  $X$ ، نرمز له برمز مختلف).

---

<sup>8</sup> ويسمى أيضاً مونويد.

عندئذ فإن الرمز 1 هو العنصر المحايد. نكتب  $SX$  لمجموعة من الكلمات مع هذه العملية الثنائية. عندئذ  $SX$  نصف زمرة، وتسمى نصف الزمرة الحرة (free semigroups) على  $X$ .

إذا طابقنا العنصر  $a$  من  $X$  مع الكلمة  $a$ ، تصبح  $X$  مجموعة جزئية من  $SX$  وتولدها (أي أنه لا يوجد نصف زمرة جزئية من  $SX$  تحوي  $X$ ). على أية حال، للتطبيق  $SX \rightarrow X$  الخاصة العامة الآتية: من أجل أي تطبيق للمجموعات  $a : X \rightarrow S$  من  $X$  إلى نصف الزمرة  $S$ ، فإنه يوجد تشاكل وحيد  $SX \rightarrow S$  يجعل المخطط الآتي تبادلياً:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a \ a \ a} & SX \\ & \searrow a & \downarrow \\ & & S \end{array}$$

في الحقيقة، يأخذ التمديد الوحيد لـ  $a$  القيم الآتية:

$$a(1) = 1_S, \quad a(dba...) = a(d)a(b)a(a)...$$

### الزمر الحرة (Free groups)

نريد أن نبني زمرة  $FX$  تحوي  $X$  ولها نفس الخواص العامة لـ  $SX$  مع "نصف زمرة" بدلاً من "زمرة". نعرف  $X'$  على أنها مجموعة حاوية على رموز من  $X$  مع رمز إضافي أيضاً، نرمز بـ  $a^{-1}$ ، لكل  $a \in X$ ، وبهذا يكون

$$X' = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, \dots\}$$

ليكن  $W'$  مجموعة الكلمات التي رموزها من  $X'$ . تصبح نصف زمرة بالنسبة لعملية الدمج، ولكنها ليست زمرة لأن  $a^{-1}$  ليس نظيراً لـ  $a$  حتى الآن، ولا يمكن حذف الحدود الواضحة في الكلمات التي لها الشكل الآتي:

$$...aa^{-1}... \text{ أو } ...a^{-1}a...$$

تسمى الكلمة مختزلة (reduced) إذ كانت لا تحوي على أي من الأزواج  $a^{-1}a$  أو  $aa^{-1}$ . بالبدء بالكلمة  $w$ ، يمكننا أن نشكل متتالية منتهية من الاختصارات لنصل إلى الكلمة المختزلة (من المحتمل أن تكون الخالية)، والتي سنسمي كل منها بالشكل المختزل (reduced form)  $w_0$  لـ  $w$ . يمكن إيجاد طرق مختلفة لتشكيل هذه الاختصارات، مثلاً،

$$cabb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca \rightarrow caa^{-1}c^{-1}ca \rightarrow cc^{-1}ca \rightarrow ca$$

$$cabb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca \rightarrow cbb^{-1}a^{-1}a \rightarrow cabb^{-1} \rightarrow ca$$

وضعنا خطوطاً تحت الأزواج المختصرة. نلاحظ بأن الرمز المتوسط  $a$  مختزل بالرمز المختلف عنه  $a^{-1}$ ، والحدود المختلفة بقيت في الحالتين (الكلمة  $ca$  التي في الجهة اليمنى من الاختصار الأول، والكلمة  $ca$  في الجهة اليسرى من الاختصار الثاني). وصلنا إلى النتيجة نفسها، والنتيجة الآتية ستبين لنا بأن هذا سيحصل دائماً.

**قضية 1.2** يوجد شكل مختزل واحد فقط لكل كلمة.

**البرهان.** نستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي على طول الكلمة  $w$ . إذا كانت  $w$  مختزلة، عندئذٍ فإن البرهان محقق. أما في الحالات الأخرى نفرض أولاً أنه لدينا أحد الأزواج التي لها الشكل  $a_0^{-1}a_0$ ، أو  $a_0a_0^{-1}$  لأن الترتيب نفسه في الحالتين.

نفرض أن أي شكلين مختزلين لـ  $w$  اللذين حصل عليهما بمتتالية من الاختصارات، والتي يكون فيها  $a_0a_0^{-1}$  مختصراً في البداية، متساويان، وذلك لأننا نستطيع تطبيق الفرض الاستقرائي على الكلمة (الأقصر) التي حصلنا عليها بالاختصار  $a_0a_0^{-1}$ .

بعد ذلك نفرض أن أي شكلين مختزلين لـ  $w$  اللذين حصلنا عليهما بمتتالية من الاختصارات، والتي يكون فيها  $a_0a_0^{-1}$  مختصراً في بعض النقاط، متساويان، لأن نتيجة هذه المتتالية من الاختصارات لن تتأثر إذا كان  $a_0a_0^{-1}$  مختصراً في البداية.

أخيراً، نعتبر أن الشكل المختزل  $w_0$  الذي حصلنا عليه بمتتالية من الاختصارات والتي لا يكون فيها أي اختصار ينتج  $a_0a_0^{-1}$  مباشرةً. بما أن  $a_0a_0^{-1}$  لن يبقى في  $w_0$ ، عندها سيختصر واحدة على الأقل من  $a_0^{-1}$ ، أو  $a_0$  في بعض النقاط. إذا لم يختصر الزوج نفسه،

عندئذٍ الاختصار الأول الذي يتضمن الزوج يكون من الشكل

$$\dots a_0^{-1} a_0 a_0^{-1} \dots \text{ أو } \dots a_0 a_0^{-1} a_0 \dots$$

حيث وضع خطأً تحت الزوج الأساسي. لكن الكلمة التي حصلنا عليها بعد هذه الاختصارات ستكون نفسها فيما إذا كان الزوج الأساسي مختصراً، ولهذا يمكن أن نختصر الزوج الأساسي بدلاً منها. وبذلك سنعود إلى الحالة التي برهنت.

نقول أن الكلمتين  $w$  و  $w'$  متكافئتان (equivalent)، ونرمز لهما بالرمز  $w \sim w'$ ، إذا كان لهما الشكل المختزل نفسه. وهي تشكل علاقة تكافؤ (واضحة).

**قضية 2.2** إن جداء كلمتين متكافئتين هو كلمة مكافئة لهما، أي أن

$$w \sim w', v \sim v' \Rightarrow wv \sim w'v'$$

**البرهان.** ليكن  $w_0$  و  $v_0$  شكلان مختزلان للكلمتين  $w$  و  $v$  على الترتيب. لكي نحصل على الشكل المختزل للكلمة  $wv$ ، يجب أن نحذف أولاً كل ما هو ممكن في الكلمتين  $w$  و  $v$  كل على حدا. حتى نحصل على شكل الكلمة  $w_0v_0$  ومن ثم نتابع الحذف. وبهذا ينتج الشكل المختزل للكلمة  $w_0v_0$  من الكلمة  $wv$ . والحالة المشابهة محققة لأجل الكلمة  $w'v'$ ، لكن (من الفرض) الشكلان المختزلان لـ  $w$  و  $v$  يكافئان الشكلين المختزلين لـ  $w'$  و  $v'$ ، وبهذا نحصل على النتيجة نفسها في الحالتين.

لتكن  $FX$  مجموعة جميع صفوف التكافؤ للكلمات. إن القضية 2.2 تبين بأن العملية الثنائية على  $W'$  تعرف عملية ثنائية على  $FX$ ، التي تتحول بشكل واضح إلى نصف زمرة. وهي تحوي أيضاً على النظائر، لأن

$$(ab \dots gh)(h^{-1}g^{-1} \dots b^{-1}a^{-1}) = 1$$

وبهذا تصبح  $FX$  زمرة، تسمى بالزمرة الحرة (free group) على  $X$ . والخلاصة: إن عناصر  $FX$  ممثلة بكلمات من  $X'$ ؛ تمثل الكلمتان العنصر نفسه من  $FX$  إذا وفقط إذا كان لهما الشكل المختزل نفسه؛ ويعرف الجداء بطريقة الدمج؛ و تمثل الكلمة الخالية بـ 1؛ نحصل على النظائر بطريقة بسيطة. وبالتالي، كل كلمة من  $FX$  تمثل بكلمة مختزلة وحيدة، مع عملية الجداء المعرفة عليها وهي عملية الدمج للوصول إلى الشكل المختزل.

إذا طابقنا  $a \in X$  بصف التكافؤ للكلمة  $a$  (المختزلة)، عندئذ تتحول  $X$  على أنها تتطابق مع مجموعة جزئية في  $FX$  - من الواضح أنها تولد  $FX$ . إن القضية الآتية هي ملخص لمعنى الحقيقة الذي تنص على أنه لا توجد علاقات بين عناصر  $X$  عندما تعتبر كعناصر من  $FX$  باستثناء العناصر المفروضة في مسلمات الزمرة.

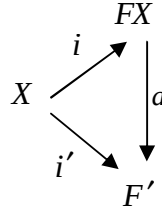
**قضية 3.2** لأي تطبيق  $a: X \rightarrow G$  من المجموعة  $X$  إلى الزمرة  $G$ ، يوجد تشاكل وحيد  $FX \rightarrow G$  يجعل المخطط الآتي تبادلياً:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & FX \\ & \searrow a & \downarrow \\ & & G \end{array}$$

**البرهان.** نأخذ التطبيق  $a: X \rightarrow G$  ونمدده إلى التطبيق  $X' \rightarrow G$  والمعطى بالشكل  $a(a^{-1}) = a(a)^{-1}$ . بما أن  $G$ ، كحالة خاصة، نصف زمرة، نمدد  $a$  إلى التشاكل لأنصاف الزمر  $SX' \rightarrow G$ . هذا التطبيق سيرسل الكلمات المتكافئة إلى العنصر نفسه في  $G$ ، ولذلك سوف يتحلل إلى عوامل من خلال  $FX = SX' /$ . إن التطبيق الناتج

$FX \rightarrow G$  هو تشاكل زمري. وهو وحيد لأننا نعلم بأنه معرف على مجموعة من مولدات  $FX$ .

**ملاحظة 4.2** يتصف التطبيق  $x \mapsto x$  ،  $i: X \rightarrow FX$  بالخاصة العامة الآتية: إذا كان  $i': X \rightarrow F'$  تطبيق آخر وله الخاصة العامة نفسها، عندئذٍ يوجد تماثل وحيد  $a: FX \rightarrow F'$  بحيث يكون  $a \circ i = i'$ ،



ننتذكر البرهان: بالنسبة إلى  $i$  بشكل عام، يوجد تشاكل وحيد  $a: FX \rightarrow F'$  بحيث يكون  $a \circ i = i'$ ؛ وبالنسبة إلى  $i'$  بشكل عام، يوجد تشاكل وحيد  $b: F' \rightarrow FX$  بحيث يكون  $b \circ i' = i$ ؛ الآن، إن  $(b \circ a) \circ i = i$ ، لكن بالنسبة إلى  $i$ ، يكون  $id_{FX}$  هو التشاكل الوحيد  $FX \rightarrow FX$  بحيث يكون  $id_{FX} \circ i = i$ ، وبالتالي  $b \circ a = id_{FX}$ ، وبشكل مشابه،  $a \circ b = id_{F'}$  وبهذا فإن  $a$  و  $b$  تماثلان عكوسان.

**نتيجة 5.2** كل زمرة هي زمرة قسمة لزمرة حرة.

**البرهان.** نختار المجموعة  $X$  من مولدات الزمرة  $G$  (مثلاً،  $X = G$ )، ولتكن  $F$  زمرة حرة مولدة بالمجموعة  $X$ . من (3.2)، يمدد التطبيق  $a: X \rightarrow G$  إلى التشاكل  $a: F \rightarrow G$ ، وكون الصورة، عبارة عن زمرة جزئية تحوي  $X$ ، فهي تساوي  $G$ . إن الزمرة الحرة على المجموعة  $X = \{a\}$  تكون ببساطة زمرة دائرية غير منتهية  $C_\infty$  مولدة بالعنصر  $a$ ، لكن الزمرة الحرة على مجموعة مكونة من عنصرين تكون معقدة جداً. سأناقش الآن، وبدون برهان، بعض النتائج الهامة على الزمر الحرة.

**مبرهنة 6.2** (Nielsen-Schreier)<sup>9</sup> كل زمرة جزئية من زمرة حرة هي زمرة حرة.

يستخدم البرهان الأفضل في الطوبولوجية، وبشكل خاص في الفضاءات المتراسة - انظر Serre 1980 أو Rotman 1995، المبرهنة 11.44.

<sup>9</sup> Nielsen (1921) برهن هذا من أجل الزمر الجزئية المنتهية التوليد، وفي الحقيقة أعطى خوارزمية للبت فيما إذا كانت الكلمة تقع في الزمر الجزئية، (Schreier (1927) برهن الحالة العامة.



تكون الزمرتان  $FX$  و  $FY$  متماثلتين إذا وفقط إذا كان لكل من  $X$  و  $Y$  القدرة نفسها. ولذلك يمكن أن نعرف مرتبة الزمرة الحرة  $G$  بأنها قدرة أي مجموعة مولدة حرة (المجموعة  $X$  للزمرة  $G$  والتي من أجلها يكون التشاكل  $FX \rightarrow G$  المعطى في (3.2) تماثلاً). لتكن  $H$  زمرة جزئية منتهية التوليد من زمرة حرة  $G$ . عندئذٍ توجد خوارزمية لتشكيل من أي مجموعة منتهية من مولدات  $H$  مجموعة منتهية حرة من المولدات. إذا كانت  $G$  من الرتبة  $n$  وكان  $(G : H) = i < \infty$ ، عندئذٍ تكون  $H$  زمرة حرة من الرتبة

$$ni - i + 1$$

وبشكل خاص، يمكن أن تكون رتبة  $H$  أكبر من رتبة  $F$ . للبراهين، انظر Rotman 1995، الفصل 11، و Hall 1959، الفصل 7.

## المولدات والعلاقات (Generators and relation)

نعتبر المجموعة  $X$  و المجموعة  $R$  المؤلفة من الكلمات المتشكلة من رموز  $X'$ . كل عنصر من  $R$  يمثل عنصر للزمرة الحرة  $FX$ ، إن زمرة القسمة لـ  $G$  من  $FX$  على الزمرة الجزئية النظامية المولدة بهذه العناصر تملك  $X$  كمولدات (generators) لها و  $R$  كعلاقات (relation) (أو كمجموعة من العلاقات المعروفة). ويقال أيضاً بأن  $(X, R)$  تقديم للزمرة  $G$ ، ونرمز لـ  $G$  بالرمز  $\langle X | R \rangle$ .

**مثال 7.2 (a)** إن لزمرة ديهيدرال  $D_n$  المولدات  $r, s$  والعلاقات المعروفة

$$r^n, s^2, srsr$$

(انظر 9.2 للبرهان)

**(b)** الزمرة الرباعية المعممة (generalized quaternion group)  $Q_n, n \geq 3$ ،

مولداتها  $a$  و  $b$  والعلاقات<sup>10</sup> هي

$$a^{2^{n-1}} = 1, a^{2^{n-2}} = b^2, bab^{-1} = a^{-1}$$

من أجل  $n = 3$  هذه الزمرة في (17.1). في الحالة العامة، رتبها  $2^n$  (للمعرفة المزيد عنها، انظر التمرين 4-2).

<sup>10</sup> بكلام أدق، سأقول بأن العلاقات  $a^{2^{n-1}}, a^{2^{n-2}}b^{-2}, bab^{-1}a$ .

(c) يتبادل العنصران  $a$  و  $b$  في الزمرة إذا وفقط إذا كان مبادلهما (commutator)  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  يساوي 1. الزمرة الحرة التبديلية (free abelian group) بالنسبة للمولدات  $a_1, \dots, a_n$  لها المولدات  $a_1, \dots, a_n$  والعلاقات  $[a_i, a_j], i \neq j$

من أجل بقية الأمثلة، انظر Massey 1967، الذي يحتوي على كمية جيدة من التداخلات بين نظرية الزمر والطوبولوجية. مثلاً، من أجل عدة أشكال من الفضاءات الطوبولوجية، توجد خوارزمية للحصول على تقديم الزمر الأساسية.

(d) الزمرة الأساسية لقرص مفتوح مع نقطة متحركة واحدة هي زمرة حرة على  $S$  حيث  $S$  دوران حول النقطة (ibid II 5.1).

(e) الزمرة الأساسية لكرة مع  $r$  نقطة متحركة لها المولدات  $s_1, \dots, s_r$  (حيث  $s_i$  هو الدوران حول  $i$  نقطة) والعلاقة الوحيدة

$$s_1 \dots s_r = 1$$

(f) الزمرة الأساسية لسطح ريمان المتراس من النوع  $g$  له  $2g$  مولد  $u_1, v_1, \dots, u_g, v_g$  والعلاقة الوحيدة  $u_1 v_1 u_1^{-1} v_1^{-1} \dots u_g v_g u_g^{-1} v_g^{-1} = 1$  (ibid IV التمرين 5.7).

**قضية 8.2** لتكن  $G$  زمرة معرفة بالتقديم  $(X, R)$ . لأي زمرة  $H$  والتطبيق  $a: X \rightarrow H$  الذي يرسل كل عنصر من  $R$  إلى 1 (في الحالة الواضحة<sup>11</sup>)، يوجد تشاكل وحيد  $G \rightarrow H$  يجعل المخطط الآتي تبادلياً:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a \ a \ a} & G \\ & \searrow a & \downarrow \text{dotted} \\ & & H \end{array}$$

**البرهان.** نعلم من الخاصة العامة للزمر الحرة (3.2) بأن  $a$  يتمدد إلى التشاكل  $FX \rightarrow H$ ، الذي نرمز له ثانياً بالرمز  $a$ . لتكن  $iR$  صورة  $R$  في  $FX$ . من الفرض  $iR \subset \text{Ker}(a)$ ، ولذلك فإن الزمرة الجزئية الناعمية  $N$  مولدة بـ  $iR$  وهي محتواة في

<sup>11</sup> كل عنصر من  $R$  يمثل بعنصر واحد من  $X$ ، وبشرط أن يكون التمديد الوحيد  $a$  لـ  $FX$  يرسل كل هذه العناصر إلى 1.

$\text{Ker}(a)$  من الخاصة العامة لزمر القسمة (42.1)، يتحلل  $a$  إلى عوامل من خلال  $FX/N = G$ . هذا يبرهن الوجود، وأما الوجدانية فتأتي من كوننا نعلم بأن التطبيق معرف على مجموعة من مولدات  $X$ .

**مثال 9.2** لتكن  $G = \langle a, b; a^n, b^2, baba \rangle$ . نبرهن بأن  $G$  تماثل زمرة ديهيدرال  $D_n$  (انظر (1.16)). لأن العنصرين  $r, s \in D_n$  تحقق هذه الشروط، يمدد التطبيق

$$\{a, b\} \rightarrow D_n, \quad a \mapsto r, \quad b \mapsto s$$

بشكل وحيد إلى التشاكل  $G \rightarrow D_n$ . إن هذا التشاكل غامر لأن  $r$  و  $s$  يولدان  $D_n$ . إن المعادلات

$$a^n = 1, \quad b^2 = 1, \quad ba = a^{n-1}b$$

تبين أن كل عنصر من  $G$  يمثل بإحدى العناصر الآتية،

$$1, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b$$

ومنه  $|G| \leq 2n = |D_n|$ . لذلك يكون التشاكل غامراً (وهذه الرموز تمثل عناصر مختلفة من  $G$ ).

بشكل مشابه،

$$G = \langle a, b; a^2, b^2, (ba)^n \rangle \quad D_n$$

بالعلاقة  $a \mapsto s, b \mapsto t$ .

### التقديم المنتهي للزمر (Finitely presented groups)

يقال بأن الزمرة منتهية التقديم إذا كان لها التقديم  $(X, R)$ ، بحيث تكون كل من  $X$  و  $R$  منتهية.

**مثال 10.2** نعتبر  $G$  زمرة منتهية. لتكن  $X = G$ ، ولتكن  $R$  مجموعة الكلمات

$$\{abc^{-1} \mid ab = c \in G\}$$

أدعي بأن  $(X, R)$  تقديم للزمرة  $G$ ، ولهذا فإن  $G$  منتهية التقديم. لتكن  $G' = \langle X \mid R \rangle$ .

إن التمديد  $\alpha: X \rightarrow G$  يرسل كل عنصر من  $R$  إلى 1، ولذلك نعرف التشاكل  $G' \rightarrow G$ ، الذي يكون غامراً بشكل واضح. لكن كل عنصر من  $G'$  يمثل بعنصر من  $X$ ، ومنه  $|G'| \leq |G|$ . لذلك فإن التشاكل غامر.

بما أنه يمكن تعريف، وبسهولة، زمرة بتقديم منته، بينما تعريف خواص الزمرة هو أمر بغاية الصعوبة - نلاحظ بأننا نعرف الزمرة، التي يمكن أن تكون صغيرة تماماً، كزمرة القسمية لزمرة حرة كبيرة بزمرة جزئية كبيرة. نستعرض بعض النتائج السلبية.

### مسألة الكلمة (The word problem)

لتكن  $G$  زمرة معرفة بالتقديم المنتهي  $(X, R)$ . مسألة الكلمة للزمرة  $G$  تسأل فيما إذا توجد خوارزمية (طريقة محكمة) للجزم فيما إذا كانت الكلمة على  $X'$  تمثل 1 في  $G$ . إن الجواب سلبي. يبين كل من Novicov و Boone بأنه توجد زمرة منتهية التقديم  $G$  والتي ليست لها خوارزمية كهذه. وبالطبع توجد زمرة أخرى يوجد لها خوارزمية. إن الأفكار نفسها قادت إلى النتيجة الآتية: لا توجد خوارزمية التي ستحدد لأي تقديم منته اختياري فيما إذا كانت الزمرة المقابلة تافهة، منتهية، تبديلية، قابلة للحل، عديمة القوى، بسيطة، قابلة للقتل، حرة القتل، حرة، أم لا، أم تحوي على مسألة الكلمة القابلة للحل. انظر Rotman 1995، الفصل 12، للبرهان على هذه الحالات.

### مسألة برنسايد (The Burnside problem)

نتذكر بأنه يقال عن الزمرة بأنها من القوة  $e$  إذا كان  $g^e = 1$  لكل  $g \in G$  و  $e$  هو أصغر عدد طبيعي يحقق هذه الخاصة. من السهل أن نكتب بعد ذلك أمثلة عن الزمر غير المنتهية المولدة بعدد منته من العناصر من رتبة منتهية (انظر التمرين 1-2)، لكن هل توجد زمرة كهذه بقوة منتهية؟ (مسألة برنسايد). في عام 1968، كانت إجابة Adjan و Novikov نعم: توجد زمرة منتهية التوليد وغير منتهية بقوة منتهية.

### مسألة برنسايد المحددة (The Restricted Burnside problem)

إن زمرة برنسايد (Burnside group) التي قوتها  $e$  على  $r$  مولد  $B(r, e)$  هي زمرة القسمية لزمرة حرة على  $r$  مولد بالزمرة الجزئية المولدة بكل قوى  $e$ . تتساءل مسألة برنسايد فيما إذا كان  $B(r, e)$  منته، ومن المعلوم لكي تكون غير منتهية باستثناء بعض القيم الصغيرة لـ  $r$  و  $e$ . إن مسألة برنسايد المحددة تتساءل فيما إذا  $B(r, e)$  يحتوي فقط على عدد منته من زمرة القسمية المنتهية، وبشكل متكافئ، تسأل فيما إذا كانت توجد زمرة قسمية واحدة منتهية من  $B(r, e)$  حاوية على كل زمرة القسمية المنتهية الأخرى كزمر قسمية.

إن تصنيف الزمر البسيطة المنتهية ( انظر p48 ) يبين أنه لكي نبرهن على أن  $B(r,e)$  يحتوي دائماً على عدد منته من زمر القسمة المنتهية، يكفي أن نبرهن بأن  $e$  هو قوة لعدد أولي. هذا ما قام به Efim Zelmanov في عام 1989 بعد عمل مبكر من Kostrikin. انظر 1995 Feit.

### خوارزمية تود - كوكستير (Todd-Coxeter algorithm)

يوجد بعض التقديرات المنتهية المنظورة السليمة تماماً والتي تكون معلومة لتعرف زمر صغيرة تماماً، لكن بالنسبة لتلك التمثيلات سيكون برهان هذا صعباً جداً. إن التقدم القياسي لزمر القسمة هذه سيكون بدراسة خوارزمية تود - كوكستير (انظر الفصل الرابع). سوف نطور طرق مختلفة لتمييز الزمر عن تقديراتها ( انظر إلى التمارين أيضاً).

### Maple

إن ما يلي نسخة لجلسة مدونة من Maple:

```
maple [This starts maple on a sun, pc, ... ]
with(group); [This loads the group package, and lists
some of the available commands.]
G:=grelgroup ({a,b},{[a,a,a,a],[b,b],[b,a,b,a]});
[This defines G to be the group with generators a , b and
relations aaaa , bb , and baba ; use 1/a for the inverse of a.]
grouporder (G);
[This attempts to find the order of the group G.]
H:=subgrel ({x=[a,a],y=[b]}, G);
[This defines H to be the subgroup of G with
generators x =aa and y = b]
pres (H); [This computes a presentation of H]
quit [This exits maple]
To go help on a command , type ? command
```

### زمر كوكستير (Coxeter groups)

إن نظام كوكستير (Coxeter system) هو الزوج  $(G,S)$  المؤلف من الزمرة  $G$  ومجموعة من المولدات  $S$  للزمرة  $G$  الموضوعة فقط لعلاقات من الشكل

$$(st)^{m(s,t)} = 1$$

حيث

$$\begin{cases} m(s,s) = 1 \text{ all } s, \\ m(s,t) \geq 2 \\ m(s,t) = m(t,s) \end{cases} \quad (13)$$

عندما لا توجد علاقة بين  $s$  و  $t$ ، نضع  $m(s,t) = \infty$ . عندئذٍ يكون نظام كوكستير معرفاً بالمجموعة  $S$  والتطبيق

$$m : S \times S \rightarrow \mathbf{U}\{\infty\}$$

محققاً (13)، عندئذٍ  $G = \langle S \mid R \rangle$  حيث

$$R = \left\{ (st)^{m(s,t)} \mid m(s,t) < \infty \right\}$$

إن زمر كوكستير هي الزمر التي تظهر كجزء من نظام كوكستير. إن قدرة المجموعة  $S$  تسمى مرتبة (rank) نظام كوكستير.

## أمثلة

**11.2** تحت سقف التماثل، إن نظام كوكستير من المرتبة 1 هو  $(C_2, \{s\})$  فقط.

**12.2** أنظمة كوكستير من المرتبة 2 يكون دليلها  $m(s,t) \geq 2$ .

(a) إذا كان  $m(s,t)$  عدداً صحيحاً  $n$ ، عندئذٍ نظام كوكستير هو  $(G, \{s,t\})$  حيث

$$G = \langle s, t; s^2, t^2, (st)^n \rangle \quad D_n$$

(انظر 2.9). بشكل خاص،  $s \neq t$  و  $st$  من المرتبة  $n$ .

(b) إذا كان  $m(s,t) = \infty$ ، عندئذٍ نظام كوكستير هو  $(G, \{s,t\})$  حيث

$$G = \langle s, t; s^2, t^2 \rangle$$

نعتبر التطبيق  $\{s,t\} \rightarrow \text{GL}_2(\quad)$

$$s \text{ a } s_s = \overset{\text{def}}{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad t \text{ a } s_t = \overset{\text{def}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

كما أن  $s_s^2 = 1 = s_t^2$ ، يمدد هذا التطبيق إلى التشاكل  $G \rightarrow \text{GL}_2(\quad)$ . الآن

$$s_s s_t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه}$$

$$s_s s_t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_s s_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي

$$(s_s s_t)^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

الذي يبين بأن  $s_s s_t$  من رتبة<sup>12</sup> غير منتهية، ومنه فإن  $st$  من رتبة غير منتهية أيضاً.

**13.2** لتكن  $V = {}^n$  مزوداً بالشكل التناظري الثنائي الموجب القانوني

$$((x_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i)_{1 \leq i \leq n}) = \sum x_i y_i$$

الانعكاس (reflection) هو التطبيق الخطي  $s: V \rightarrow V$  الذي يرسل المتجهات غير الصفرية  $a$  إلى  $-a$  ويثبت نقاط السطوح الزائدة  $H_a$  المتعامدة على  $a$ . نكتب  $s_a$  للانعكاس المعرف بـ  $a$ ، والذي يعطى بالصيغة

$$s_a v = v - \frac{2(v, a)}{(a, a)} a$$

لأن هذا يوضح  $a$  و  $H_a$  بشكل محدد، وبالتالي (بالخطية) على كل  $V = \langle a \rangle \oplus H_a$ . إن الزمرة الانعكاسية المنتهية هي زمرة مولدة بالانعكاسات. لزمر مثل  $G$ ، من الممكن أن نختار مجموعة  $S$  من الانعكاسات المولدة لتلك التي يكون فيها  $(G, S)$  نظام Coxeter (Humphreys 1990, 1.9). لهذا، فإن الزمر الانعكاسية المنتهية تكون جميع زمر كوكستير (في الحقيقة، من الواضح أنها زمر كوكستير المنتهية، 6.4، ibid.).

**14.2** لتكن  $S_n$  تؤثر على  ${}^n$  بتبديل الإحداثيات،

$$s(a_1, \dots, a_n) = (a_{s(1)}, \dots, a_{s(n)})$$

المناقلة  $(ij)$  تبادل بين  $i$  و  $j$ ، وترسل المتجه

$$a \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots \end{pmatrix}$$

إلى نظيره، ويترك نقاط السطح الزائد

$$H_a = \left( a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n \right)$$

مثبتاً. لذلك، يكون  $(ij)$  انعكاساً. كذلك  $S_n$  مولدة بالمناقلات، هذا يبين بأنها زمرة انعكاسية منتهية (وبالتالي فهي زمرة كوكستير أيضاً).

## بنية زمر كوكستير (The structure of Coxeter groups)

<sup>12</sup> علينا أن نبين بأن شكل جوردان القانوني لـ  $s_s s_t$  هو  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**مبرهنة 15.2** ليكن  $(G, S)$  نظام Coxeter المعرف بالتطبيق  $m : S \times S \rightarrow U\{\infty\}$  المحقق (13).

(a) إن التطبيق القانوني  $S \rightarrow G$  غامر.

(b) كل  $s \in S$  له الرتبة 2 في  $G$ .

(c) لكل  $s \neq t$  في  $S$ ،  $st$  من الرتبة  $m(s, t)$  في  $G$ .

سيشغل البرهان بقية هذه الفقرة. نلاحظ أن رتبة  $s$  تساوي 1 أو 2، وإن رتبة  $st$  تقسم  $m(s, t)$ ، ولذلك تنص المبرهنة على أن عناصر الزمرة  $S$  تبقى مختلفة في  $G$  وأن كل  $s$  وكل  $st$  لهما أكبر رتبة ممكنة.

ليكن  $e$  التطبيق  $\{\pm 1\} \rightarrow S$  بحيث يكون  $e(s) = -1$  لكل  $s$ . عندئذ  $e$  يرسل  $st$  إلى 1 لأي  $s, t \in S$ ، ولذلك فهو يمدد إلى تشاكل الزمر  $\{\pm 1\} \rightarrow G$  (انظر 8.2). كل  $s$  يطابق -1، وبالتالي فهو من الرتبة 2.

هذا يبرهن (b)، ولكي نبرهن الحالات الباقية سنعتبر - فضاء متجهي  $V$  مع القاعدة  $(e_s)_{s \in S}$  بدليل  $s$ . نعرف على  $V$  "هندسياً" التي يوجد لها "انعكاسات" مختلفة  $s \rightarrow s_s$ ،  $s \in S$ ، بحيث إن  $s_s s_t$  من الرتبة  $m(s, t)$  من (8.2)، يمدد التطبيق  $s \rightarrow s_s$  إلى التشاكل الزمري  $G \rightarrow GL(V)$ . كما أن  $s_s$  مختلفة، يجب أن يكون  $s$  مختلفاً في  $G$ ، و  $s_s s_t$  من الرتبة  $m(s, t)$ ، ويجب أن يكون العنصر  $st$  من الرتبة نفسها. نعرف الشكل  $B$  الثنائي الخطية التناظري على  $V$  بالقاعدة الآتية

$$B(e_s, e_t) = \begin{cases} -\cos(p/m(s, t)) & \text{if } m(s, t) \neq \infty \\ -1 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

كما أن  $B(e_s, e_t) = 1 \neq 0$ ، إن المتمم العمودي لـ  $e_s$  مع الحفاظ على  $B$  هو السطح الزائد الذي لا يحوي  $e_s$ ، و لذلك  $V = \langle e_s \rangle \oplus H_s$ . وهذا يسمح بأن نعرف "الانعكاس" بالقاعدة

$$s_s v = v - 2B(v, e_s)e_s, v \in V$$

من الواضح أن  $s_s$  هو التطبيق الخطي الذي يرسل  $e_s$  إلى نظيره ومثبت نقاط  $H_s$ ، إذاً  $s_s^2 = 1$  في  $GL(V)$ .

من الواضح بأن  $s_s$  مختلف، ومنه بقي أن نبين بأن  $s_s s_t$  من الرتبة  $m(s, t)$  لكل  $s, t \in S$ ، ليكن  $V_{s,t}$  الفضاء ذو -2 بعد  $e_s \oplus e_t$ .



**تمهيدية 16.2** إن مقصور  $B$  لـ  $V_{s,t}$  موجب تقريباً، ويكون موجب تماماً إذا كان  $m(s,t) \neq \infty$ .

**البرهان.** ليكن  $v = ae_s + be_t \in V_{s,t}$ . إذا كان  $m(s,t) \neq \infty$ ، عندئذٍ

$$B(v,v) = a^2 - 2ab \cos(p/m) + b^2$$

$$= (a - b \cos(p/m))^2 + b^2 \sin^2(p/m) > 0$$

لأن  $\sin(p/m) \neq 0$  إذا كان  $m(s,t) = \infty$ ، عندئذٍ

$$B(v,v) = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \geq 0$$

**تمهيدية 17.2** المقصور من  $st$  إلى  $V_{s,t}$  له الرتبة  $m(s,t)$ .

**البرهان.** إذا كان  $m(s,t) \neq \infty$ ، فإن الشكل  $B|_{V_{s,t}}$  موجب تماماً، ولذلك

$(V_{s,t}, B|_{V_{s,t}})$  هو فضاء إقليدي. علاوةً على ذلك،  $s_s$  و  $s_t$  انعكاسات على  $V_{s,t}$  في

حالات (13.2) معـرف بالمتجهين  $e_t$  و  $e_s$ . كما أن

$B(e_s, e_t) = -\cos(p/m(s,t)) = \cos(p - p/m(s,t))$ ، الزاوية بين المستقيمتان

المثبتة بـ  $e_s$  و  $e_t$  تساوي  $p/m(s,t)$ . من (16.1)، نرى بأن  $s_s$  و  $s_t$  تولدان زمرة

ديهيدرال  $D_{m(s,t)}$  و أن  $s_s s_t$  من الرتبة  $m(s,t)$ .

إذا كان  $m(s,t) = \infty$ ، عندئذٍ المصفوفتان لـ  $s_s$  و  $s_t$  بالنسبة إلى القاعدة

$\{e_s, e_t\}$  الموجودة في (12.2)، من ذلك ينتج بأن  $s_s s_t$  من رتبة غير منتهية.

بما أن رتبة  $st$  تقسم رتبة  $m(s,t)$ ، فالتمهيدية تبين بأنه يساوي  $m(s,t)$ .

**ملاحظة 18.2** إن التشاكل  $G \rightarrow GL(V)$  في برهان المبرهنة 2.12 غامر

(Humphreys 1990, 5.4)، ولكن من الصعب برهانه.

## تمارين

1-2 برهن أن الزمرة التي لها المولدات  $a_1, \dots, a_n$  والعلاقات  $[a_i, a_j] = 1, i \neq j$ ، هي

زمرة تبديلية حرة على  $a_1, \dots, a_n$ . [استخدم الخواص العامة Hinit].

2-2 ليكن  $a$  و  $b$  عنصرين من زمرة اختيارية حرة  $F$ . برهن أن:

(a) إذا كان  $a^n = b^n$  مع  $n > 1$ ، عندئذٍ  $a = b$ .

(b) إذا كان  $a^m b^n = b^n a^m$  مع  $mn \neq 0$ ، عندئذٍ  $ab = ba$ .

(c) إذا كان للمعادلة  $x^n = a$  الحل  $x$  لكل  $n$ ، عندئذٍ  $a = 1$ .

3-2 ليكن  $F_n$  يرمز لزمرة حرة على  $n$  مولد. برهن:

(a) إذا كان  $n < m$ ، عندئذٍ  $F_n$  تتماثل مع كل من الزمرة الجزئية وزمرة القسمة لـ  $F_m$ .

(b) برهن أن  $F_1 \times F_1$  ليست زمرة حرة.

(c) برهن أن المركز  $Z(F_n) = 1$  صحيح من أجل  $n > 1$ .

4-2 برهن أن  $Q_n$  (انظر 2.7b) تحوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 2، والتي هي  $Z(Q_n)$ . برهن بأن  $Q_n/Z(Q_n)$  متماثلة مع  $D_{2^{n-1}}$ .

5-2 (a) لتكن  $G = \langle a, b; a^2, b^2, (ab)^4 \rangle$ . برهن أن  $G$  تماثل زمرة ديهيدرال  $D_4$ .

(b) برهن أن  $G = \langle a, b; a^2, abab \rangle$  زمرة غير منتهية. (هذه تعرف عادةً بزمرة ديهيدرال غير المنتهية).

6-2 لتكن  $G = \langle a, b, c; a^3, b^3, c^4, acac^{-1}, aba^{-1}bc^{-1}b^{-1} \rangle$ . برهن أن  $G$  هي الزمرة التافهة  $\{1\}$ . [Hinit Expand  $(aba^{-1})^3 = (bcb^{-1})^3$ ]

7-2 لتكن  $F$  زمرة حرة على المجموعة  $\{x, y\}$  ولتكن  $G = C_2$ ، مع المولد  $a \neq 1$ . وليكن  $a$  التشاكل  $F \rightarrow G$  بحيث يكون  $a(x) = a = a(y)$ . أوجد المجموعة المولدة الأصغرية لنواة  $a$ . وهل النواة زمرة حرة؟

8-2 لتكن  $G = \langle s, t; t^{-1}s^3t = s^5 \rangle$ . برهن أن العنصر

$$g = s^{-1}t^{-1}s^{-1}tst^{-1}st$$

ينتمي إلى نواة كل تطبيق من الزمرة  $G$  إلى زمرة منتهية.

## الفصل الثالث

### التماثلات الذاتية والتمديدات

### Automorphisms and extensions

#### التماثلات الذاتية للزمرة (Automorphisms of groups)

إن التماثل الذاتي (Automorphism) لزمرة  $G$  هو تماثل من هذه الزمرة إلى نفسها. المجموعة  $\text{Aut}(G)$  من التماثلات الذاتية للزمرة  $G$  تصبح زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات: إن تركيب تماثلين ذاتيين هو تماثل ذاتي أيضاً، تركيب التطبيقات هو عملية تجميعية دوماً (انظر (5))، التطبيق المطابق  $g \mapsto g$  هو العنصر المحايد، التماثل الذاتي يكون تقابلاً، وبالتالي سيكون له معكوس، والذي هو أيضاً تماثل ذاتي.

لكل  $g \in G$ ، التطبيق  $i_g$  "الترافق بالنسبة لـ  $g$ "،

$$x \mapsto gxg^{-1} : G \rightarrow G$$

هو تماثل ذاتي لـ  $G$ . يسمى التماثل الذاتي من هذا الشكل بالتماثل الذاتي الداخلي (inner Automorphisms)، أما التماثل الآخر فيسمى بالتماثل الخارجي (outer Automorphisms).

نلاحظ أن

$$i_{gh}(x) = (i_g \circ i_h)(x) \text{، أي أن } (gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1}$$

ولذلك فإن التطبيق  $i_g : G \rightarrow \text{Aut}(G)$  تشاكل. يرمز لصورته بالشكل  $\text{Inn}(G)$ . نواته هي مركز  $G$ .

$$Z(G) = \{g \in G ; gx = xg, \forall x \in G\}$$

وبهذا نحصل من (1. 44) على التماثل

$$G/Z(G) \rightarrow \text{Inn}(G)$$

في الحقيقة، إن  $\text{Inn}(G)$  هو زمرة جزئية ناظمية في  $\text{Aut}(G)$  : لكل  $g \in G$  و  $a \in \text{Aut}(G)$

$$(a \circ i_g \circ a^{-1})(x) = a(g.a^{-1}(x).g^{-1}) = a(g).x.a(g)^{-1} = i_{a(g)}(x)$$

**مثال 1.3 (a)** لتكن  $G = F_n^p$ . إن التماثلات الذاتية للزمرة  $G$  كالزمر التبديلية هي تماماً التماثلات الذاتية للزمرة  $G$  كالفضاء المتجهي على  $F_p$ ، لذلك  $\text{Aut}(G) = \text{GL}_n(F_p)$ . بما أن  $G$  تبديلية، عندئذ كل التماثلات غير التافهة في  $G$  ستكون خارجية.

(b) كذلك الحالة الخاصة لـ (a)، نرى بأن

$$\text{Aut}(C_2 \times C_2) = \text{GL}_2(F_2)$$

(c) بما أن مركز الزمرة الرباعية  $Q$  هي  $\langle a^2 \rangle$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\text{Inn}(Q) \cong Q / \langle a^2 \rangle \cong C_2 \times C_2$$

في الحقيقة،  $\text{Aut}(Q) \cong S_4$ . انظر التمرين 3-5.

### الزمر التامة (Complete groups)

**تعريف 2.3** تكون الزمرة تامة (Complete) إذا كان التطبيق  $i_g: G \rightarrow \text{Aut}(G)$  تماثلاً.

لذلك، تكون الزمرة تامة إذا وفقط إذا كان (a) المركز  $Z(G)$  للزمرة  $G$  تافهاً، و (b) كل تماثل ذاتي للزمرة  $G$  يكون داخلياً.

**مثال 3.3 (a)** لكل  $n \neq 2, 6$  زمرة تامة. بما أن الزمرة  $S_2$  تبديلية وبالتالي (a) لا يتحقق،  $\text{Aut}(S_6) / \text{Inn}(S_6) \cong C_2$  وبالتالي  $S_6$  لا يحقق (b). انظر Rotman 1995، المبرهنة 7.5, 7.10.

(b) إذا كانت  $G$  زمرة تبديلية غير بسيطة، عندئذ  $\text{Aut}(G)$  تامة. انظر Rotman 1995، المبرهنة 7.14.

من التمرين 3-4،  $\text{GL}_2(F_2) \cong S_3$ ، وبالتالي فإن الزمر غير المتماثلة  $C_2 \times C_2$  و  $S_3$  تحوي على زمر متماثلة من التماثلات الذاتية.

### التماثلات الذاتية للزمر الدائرية (Automorphisms of cyclic groups)

لتكن  $G$  زمرة دائرية من الرتبة  $n$ ، ولتكن  $G = \langle a \rangle$ . ليكن  $m$  عدداً صحيحاً  $1 \leq m$ . إن المضاعف الأصغر للعدد  $m$  الذي يقبل القسمة على  $n$  هو  $\frac{n}{\gcd(m, n)}$ . لذلك،  $a^m$  من الرتبة  $\frac{n}{\gcd(m, n)}$ ، وبالتالي فإن مولدات  $G$  هي تماماً العناصر  $a^m$  و

$\gcd(m, n) = 1$ . التماثل الذاتي  $a$  للزمرة  $G$  يجب أن يرسل  $a$  إلى مولد آخر للزمرة  $G$ ، وبالتالي  $a(a) = a^m$  لمجموعة من العناصر  $m$  الأولية نسبياً مع  $n$ . التطبيق  $a \mapsto a^m$  يعرف تماثلاً

$$\text{Aut}(C_n) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

حيث

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{z/n\mathbb{Z} \mid \text{الحلقة في الوحدة}\} = \{m + n\mathbb{Z} \mid \gcd(m, n) = 1\}$$

يعتمد هذا التماثل على اختيار المولدات  $a$  للزمرة  $G$ : إذا كان  $a(a) = a^m$ ، عندئذٍ من أجل أي عنصر آخر  $b = a^i$  للزمرة  $G$ ،

$$a(b) = a(a^i) = a(a)^i = a^{mi} = (a^i)^m = (b)^m$$

بقي أن نحدد  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ . إذا كان  $n = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$  تحليل  $n$  إلى جداء قوى لأعداد أولية، عندئذٍ

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{r_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_s^{r_s}\mathbb{Z}, \quad m \bmod n \leftrightarrow (m \bmod p_1^{r_1}, \dots)$$

حسب مبرهنة البواقي الصينية. فإن هذا عبارة عن تماثل حلقات، ولذلك

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/p_1^{r_1}\mathbb{Z})^\times \times \dots \times (\mathbb{Z}/p_s^{r_s}\mathbb{Z})^\times$$

بقي أن نأخذ الحالة التي يكون فيها  $n = p^r$ ،  $p$  أولي.

نفرض أولاً أن  $p$  عدد فردي. المجموعة  $\{0, 1, \dots, p^r - 1\}$  مجموعة تامة من ممثلات

$\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ ، و  $\frac{1}{p}$  من هذه العناصر القابلة للقسمة على  $p$ . وبالتالي  $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$  من

الرتبة  $p^r - \frac{p^r}{p} = p^{r-1}(p-1)$ . لأن  $p-1$  و  $p^r$  أوليان نسبياً، نحن نعلم من (12)

بأن  $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$  متماثل مع الجداء المباشر للزمرة  $A$  من الرتبة  $p-1$  والزمرة  $B$  من الرتبة  $p^{r-1}$  من التطبيق

$$(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = F_p^\times$$

ينتج التماثل  $A \rightarrow F_p^\times$ ، و من كون  $F_p^\times$  زمرة جزئية منتهية من الزمرة الضربية للحقل،

وهي زمرة دائرية (1.55). لذلك  $A = \langle x \rangle$  من أجل مجموعة من العناصر

$x$  من الرتبة  $p-1$ . باستخدام نظرية ذي الحدين، نجد أولاً بأن  $1+p$  من الرتبة  $p^{r-1}$

في  $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ ، وبالتالي فهو يولد  $B$ . وبهذا تكون  $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$  دائرية، مع مولدها

$x \cdot (1+p)$ ، ويمكن أن يكتب كل عنصر وبشكل وحيد بالشكل

$$x^i.(1+p)^j, 0 \leq i < p-1, 0 \leq j < p^{r-1}$$

من جهة أخرى

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\} = \langle \bar{3}, \bar{5} \rangle \approx C_2 \times C_2$$

ليست دائرية.

**المخلص 4.3 (a)** لكل زمرة دائرية في  $G$  من الرتبة  $n$ ،  $\text{Aut}(G) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ،

التمائل الذاتي في  $G$  يقابل  $[m] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  يرسل العنصر  $a$  في  $G$  إلى  $a^m$ .

(b) إذا كان  $n = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$ ؛ تحليل  $n$  إلى جداء قوى لأعداد أولية  $p_i$ ، عندئذٍ

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{r_1}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_s^{r_s}\mathbb{Z}, m \bmod n \leftrightarrow (m \bmod p_1^{r_1}, \dots)$$

(c)

$$(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \approx \begin{cases} C_{(p-1)p^{r-1}} & p \text{ فردي} \\ C_2 & p^r = 2^2 \\ C_2 \times C_{2^{r-2}} & p=2, r>2 \end{cases}$$

### الزمر الجزئية المميزة (Characteristic subgroups)

**تعريف 5.3** الزمرة الجزئية المميزة (Characteristic subgroup) في الزمرة  $G$  هي

الزمرة  $H$  التي تحقق  $a(H) = H$  لكل تماثل ذاتي  $a$  من الزمرة  $G$ .

وبنفس الترتيب في (31.1) يكفي أن نبرهن بأن  $a(H) \subseteq H$  لكل  $a \in \text{Aut}(G)$ .

لهذا، تكون الزمرة الجزئية  $H$  ناظمية في  $G$  إذا كانت ثابتة بالنسبة لكل تماثل داخلي في

$G$ ، وتكون مميزة إذا كانت ثابتة بالنسبة لكل التماثلات الذاتية. بشكل خاص، إن الزمرة

الجزئية المميزة هي زمرة ناظمية.

**ملاحظة 6.3 (a)** نأخذ الزمرة  $G$  والزمرة الناظمية  $N$ . إن التماثل الذاتي الداخلي للزمرة

$G$  يحدد تماثلاً ذاتياً للزمرة  $N$ ، والذي من الممكن أن يكون خارجياً (مثال على ذلك،

انظر 15.3). لذلك الزمرة الجزئية الناظمية في  $N$  ليست بالضرورة أن تكون ناظمية في

$G$ . أيضاً الزمرة الجزئية المميزة من زمرة جزئية مميزة هي زمرة جزئية مميزة.

(b) المركز  $Z(G)$  للزمرة  $G$  هو زمرة جزئية مميزة، لأن

$$zg = gz, \forall g \in G \Rightarrow a(z)a(g) = a(g)a(z), \forall g \in G$$

وكما أن  $g$  يسمح كل  $G$ ،  $a(g)$  أيضاً يسمح كل  $G$ . باستثناء الزمر الجزئية مع تعريف نظرية الزمر العامة لكي تكون مميزة.

(c) إذا كانت  $H$  الزمرة الجزئية الوحيدة من الرتبة  $m$ ، عندئذٍ يجب أن تكون مميزة، لأن  $a(H)$  هو أيضاً زمرة جزئية في  $G$  من الرتبة  $m$ .

(d) كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية تكون ناظرية لكن ليس من الضروري أن تكون مميزة. مثلاً، الفضاء الجزئي من البعد 1 في  $G = F_p^2$  لن يكون ثابتاً بالنسبة  $GL_2(F_p)$  وبالتالي لا يكون زمرة جزئية مميزة.

### الجداءات شبه المباشرة (Semidirect products)

لنكن  $N$  زمرة جزئية ناظرية في  $G$ . عندئذٍ كل عنصر  $g \in G$  يعرف تشاكلاً ذاتياً لـ  $n, a, gng^{-1}$ ، وهذا يعرف التشاكل

$$q: G \rightarrow \text{Aut}(N), \quad g \mapsto i_g|_N$$

إذا وجدت زمرة جزئية  $Q$  في  $G$  بحيث إن  $G \rightarrow G/N$  يغمر  $Q$  تحت سقف التماثل في  $G/N$ ، عندئذٍ أدعي بأنه يمكننا أن نعيد بناء  $G$  من  $Q$  و  $N$ ، والمقصود لـ  $q$  على  $Q$ . وبالإضافة لذلك يمكن أن نكتب العنصر  $g \in G$  وبشكل وحيد بالشكل

$$g = nq, \quad n \in N, \quad q \in Q$$

يجب أن يكون  $q$  هو العنصر الوحيد في  $Q$  يطابق  $qN \in G/N$ ، و  $n$  يجب أن يساوي  $gq^{-1}$ . لهذا، يكون لدينا التطبيق التقابل

$$G \xrightarrow{1-1} N \times Q$$

إذا كان  $g = nq$  و  $g' = n'q'$ ، عندئذٍ

$$gg' = (nq)(n'q') = n(qn'q^{-1})qq' = nq(q)(n').qq'$$

**تعريف 7.3** تكون الزمرة  $G$  جداء شبه مباشر (Semidirect products) للزمرتين  $N$  و

$Q$  إذا كانت  $N$  ناظرية ومن  $G \rightarrow G/N$  ينتج التماثل  $Q \rightarrow G/N$ .

بشكل مكافئ، تكون  $G$  جداء شبه مباشر للزمرتين  $N$  و  $Q$  إذا كان

$$N < G; \quad NQ = G; \quad N \cap Q = 1$$

نلاحظ بأنه ليس من الضروري أن تكون  $Q$  زمرة جزئية ناظرية في  $G$ . عندما تكون

جداء شبه مباشر للزمرتين  $N$  و  $Q$ ، نكتب  $G = N \rtimes Q$  (حيث  $Q \rightarrow \text{Aut}(N)$ ) تعطي تأثير  $Q$  على  $N$  بتماثل ذاتي داخلي.

**مثال 8.3 (a)** في  $D_n$ ،  $n \geq 2$ ، ليكن  $C_n = \langle r \rangle$  و  $C_2 = \langle s \rangle$ ، عندئذٍ

$$D_n = \langle r \rangle \times_q \langle s \rangle = C_n \times_q C_2$$

حيث  $q(s)(r^i) = r^{-i}$  (انظر 1.16).

(b) الزمرة المتناوبة  $A_n$  زمرة جزئية ناظمية في  $S_n$  (لأن دليلها يساوي 2)، و

$$Q = \{(12)\} \text{ تغمر في } S_n/A_n \text{ (تحت سقف التماثل). بهذا تكون } S_n = A_n \times_q C_2.$$

(c) إن الزمرة الرباعية لا يمكن أن تكتب على شكل جداء شبه مباشر بأي طريقة غير

تافهة (انظر التمرين 2-3).

(d) الزمرة الدائرية من الرتبة  $p^2$ ،  $p$  أولي، لا تشكل جداء شبه مباشر (لأنها تحوي

زمرة جزئية وحيدة فقط من الرتبة  $p$ ).

(e) لتكن  $G = GL_n(F)$ . لتكن  $B$  زمرة جزئية من زمرة المصفوفات المثلثية العليا

في  $G$ ،  $T$  زمرة جزئية من زمرة المصفوفات القطرية في  $G$ ،  $U$  زمرة جزئية من

زمرة المصفوفات المثلثية العليا حيث كل معاملاتها القطرية تساوي العدد 1. عندئذٍ، بفرض

$$n = 2$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, T = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

فإن  $U$  زمرة جزئية ناظمية في  $B$ ،  $UT = B$ ، و  $U \cap T = \{1\}$ . لذلك،

$$B = U \times_q T$$

نلاحظ، عندما  $n \geq 2$ ، فإن تأثير  $T$  على  $U$  ليس تافهًا، مثلاً،

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac/b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولذلك فإن  $B$  ليس جداءً شبه مباشر لـ  $T$  و  $U$ .

لقد رأينا بأنه، من الجداء شبه المباشر  $G = N \times_q Q$ ، نحصل على الثلاثية

$$(N, Q, q: Q \rightarrow \text{Aut}(N))$$

وأن الثلاثية تحدد  $G$ . نبرهن الآن بأن كل ثلاثية  $(N, Q, q)$  تتألف من الزمرتين  $N$  و

$Q$  وعلى التشاكل  $q: Q \rightarrow \text{Aut}(N)$  الذي يأتي من الجداء شبه المباشر. كمجموعة،

لتكن  $G = N \times Q$ ، ولنعرف

$$(n, q)(n', q') = (nq(q)(n'), qq')$$

**قضية 9.3** إن قانون التركيب السابق يجعل من  $G$  زمرة وهي، في الحقيقة، الجداء شبه

المباشر للزمرتين  $N$  و  $Q$ .



البرهان. نكتب  $q_n$  بدلاً من  $q(q)(n)$ ، لذلك يصبح قانون التركيب بالشكل

$$(n, q)(n', q') = (n.q_{n'}, qq')$$

عندئذٍ

$$(n, q)(n', q')(n'', q'') = (n.q_{n'}, qq'q'') = (n, q)((n', q')(n'', q''))$$

ولهذا فإن قانون التجميع محقق. لأن  $q(1) = 1$  و  $q(q)(1) = 1$

$$(1, 1)(n, q) = (n, q) = (n, q)(1, 1)$$

ولذلك فإن  $(1, 1)$  هو العنصر المحايد. بالتالي

$$(n, q)(q_{n-1}^{-1}, q^{-1}) = (1, 1) = (q_{n-1}^{-1}, q^{-1})(n, q)$$

لذلك فإن  $(q_{n-1}^{-1}, q^{-1})$  هو معكوس العنصر  $(n, q)$ ، إذاً  $G$  زمرة، ومن الواضح أن

$N < G$ ،  $NQ = G$  و  $N \cap Q = 1$ ، وبالتالي  $G = N \times_q Q$  علاوةً على ذلك، عندما

تعتبر كل من  $N$  و  $Q$  زميرتين جزئيتين من  $G$ ، فإن تأثير  $Q$  على  $N$  معطى بـ  $q$ .

**أمثلة 10.3 الزمرة من الرتبة 12.** ليكن  $q$  التشاكل غير التافه (الوحيد)

$$C_4 \rightarrow \text{Aut}(C_3) \quad C_2$$

بالتحديد، ذلك الذي يرسل مولد  $C_4$  إلى التطبيق  $a \mapsto a^2$ . عندئذٍ  $G \stackrel{\text{def}}{=} C_3 \times_q C_4$  زمرة

غير تبديلية من الرتبة 12، ليست متماثلة مع  $A_4$ . إذا رمزنا لمولدات  $C_3$  و  $C_4$  بالرموز

$a$  و  $b$ ، عندئذٍ  $a$  و  $b$  يولدان  $G$ ، وتكون لدينا العلاقات المعرفة

$$a^3 = 1, b^4 = 1, bab^{-1} = a^2$$

**11.3 الجداءات المباشرة (Direct product).** التقابل للمجموعات

$$(n, q) \mapsto (n, q): N \times Q \rightarrow N \times_q Q$$

يكون تماثلاً من الزمر إذا وفقط إذا كان  $q$  التشاكل التافه  $(N \rightarrow \text{Aut}(N))$ ، أي أن،

$$q(q)(n) = n \quad \text{لكل } q \in Q, n \in N$$

**12.3 الزمر من الرتبة 6.** إن كلا من  $S_3$  و  $C_6$  جداء شبه مباشر للزمرة  $C_3$  على  $C_2$

$$C_2 \rightarrow C_2 \quad \text{Aut}(C_3)$$

**13.3 الزمر من الرتبة  $p^3$  (العنصر من الرتبة  $p^2$ ).** لتكن  $N = \langle a \rangle$  زمرة دائرية من

الرتبة  $p^2$ ، ولتكن  $Q = \langle b \rangle$  زمرة دائرية من الرتبة  $p$ ، حيث  $p$  عدد أولي فردي.

عندئذٍ  $\text{Aut } N \approx C_{p-1} \times C_p$  (انظر 4.3)، و  $C_p$  مولد بـ  $a \mapsto a^{1+p}$  (نلاحظ أن

... $(a^2(a) = a^{1+2p}, \dots$  نعرف  $Q \rightarrow \text{Aut}(N)$  بالشكل  $a \mapsto b$ . الزمرة

$G = N \times_q Q$  مولداتها  $a, b$  وعلاقاتها المعرفة

$$a^{p^2} = 1, b^p = 1, bab^{-1} = a^{1+p}$$

هي زمرة غير تبديلية من الرتبة  $p^3$ ، وتحتوي على عنصر من الرتبة  $p^2$ .

**14.3 الزمر من الرتبة  $p^3$  (لا تحوي على عنصر من الرتبة  $p^2$ ).** لتكن  $N = \langle a, b \rangle$

الجداء المباشر للزمرتين الدائريتين  $\langle a \rangle$  و  $\langle b \rangle$  من الرتبة  $p$ ، ولتكن  $Q = \langle c \rangle$  زمرة

دائرية من الرتبة  $p$ . نعرف  $Q \rightarrow \text{Aut}(N)$   $q$  كي يكون تشاكلاً، بحيث

$$q(c^i)(a) = ab^i, q(c^i)(b) = b$$

(إذا عينا  $N$  كزمرة جمعية  $N = F_p^2$  مع  $a, b$  عناصر القاعدة القانونية، عندئذٍ  $q(c^i)$ )

هو تماثل ذاتي على  $N$  المعرفة بالمصفوفة  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ . الزمرة  $G = N \times_q Q$  زمرة من

الرتبة  $p^3$ ، مولداتها  $a, b, c$  وعلاقاتها معرفة بالشكل

$$a^p = b^p = c^p = 1, ab = cac^{-1}, [b, a] = 1 = [b, c]$$

لأن  $b \neq 1$ ، إن المساواة الوسطى تبين بأن الزمرة ليست تبديلية. عندما يكون  $p$  فردياً، فإن

كل العناصر ستكون من الرتبة  $p$  باستثناء العنصر 1. عندما  $p = 2, G \approx D_4$ ، الذي

يحتوي على عنصر من الرتبة  $2^2$ . هذا يبين لنا بأنه يمكن أن يكون للزمرة تمثيلات مختلفة

تماماً كزمرة الجداء شبه المباشر:

$$D_4 \approx C_4 \times_q C_2 \approx (C_2 \times C_2) \times_q C_2 \quad 3.8a$$

لكل عدد أولي فردي  $p$ ، تكون الزمرة غير التبديلية من الرتبة  $p^3$  متماثلة مع الزمرة

في (13.3) إذا حوت على عنصر من الرتبة  $p^2$  وتكون متماثلة مع الزمرة في (14.3) إذا

لم تحوي على عنصر كهذا (انظر التمرين 3-4). بشكل خاص، تحت سقف التماثل، توجد

زمرتان غير تبديليتين فقط من الرتبة  $p^3$ .

**15.3 جعل التماثل الذاتي الخارجي داخلياً.** ليكن  $a$  تماثلاً ذاتياً، من الممكن أن يكون

خارجياً، للزمرة  $N$ . إن زمرة جزئية ناظرية في الزمرة  $G$  بطريقة ما بحيث يصبح

$a$  مقصوراً للتماثل الذاتي الداخلي للزمرة  $G$  على الزمرة  $N$ . ليرهان ذلك، ليكن

$q: C_\infty \rightarrow \text{Aut}(N)$ . تشاكلاً يرسل المولد  $a$  من  $C_\infty$  إلى  $a \in \text{Aut}(N)$  ولتكن

$G = N \times_q C_\infty$ . العنصر  $g = (1, a)$  من الزمرة  $G$  يحقق الخاصية

$$g(n, 1)g^{-1} = (a(n), 1), \text{ لكل } n \in N.$$

## قاعدة لتحويل الجداءات شبه المباشرة إلى تماثل (Making outer automorphisms inner)

سيكون مفيداً لنا بأن يكون لدينا قاعدة وذلك عندما تحدد الثلاثيتان  $(N, Q, q)$  و  $(N, Q, q')$  زمراً متماثلة.

**تمهيدية 16.3** إذا كان  $q$  و  $q'$  مترافقين، أي أنه يوجد  $a \in \text{Aut}(N)$ ، بحيث يكون  $q'(q) = a \circ q \circ a^{-1}$  عندئذٍ

$$N \times_q Q \approx N \times_{q'} Q$$

البرهان. نأخذ التطبيق

$$g : N \times_q Q \rightarrow N \times_{q'} Q, (n, q) \mapsto (a(n), q)$$

عندئذٍ

$$\begin{aligned} g(n, q) \cdot g(n', q') &= (a(n), q) \cdot (a(n'), q') \\ &= (a(n) \cdot q'(q)(a(n')), qq') \\ &= (a(n) \cdot (a \circ q(q) \circ a^{-1})(a(n')), qq') \\ &= (a(n) \cdot a(q(q)(n')), qq'), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g((n, q) \cdot (n', q')) &= g(n \cdot q(q)(n'), qq') \\ &= (a(n) \cdot a(q(q)(n')), qq') \end{aligned}$$

ومنه فإن  $g$  تشاكل زمري، معكوسه  $(a^{-1}(n), q) \mapsto (n, q)$ ، وبالتالي فهو تماثل زمري.

**تمهيدية 17.3** إذا كان  $q = q' \circ a$ ، حيث  $a \in \text{Aut}(Q)$ ، عندئذٍ

$$N \times_q Q \approx N \times_{q'} Q.$$

البرهان. إن التطبيق  $(n, q) \mapsto (n, a(q))$  هو تماثل  $N \times_q Q \rightarrow N \times_{q'} Q$ .

**تمهيدية 18.3** إذا كانت  $Q$  دائرية و الزمرة الجزئية  $q(Q)$  من  $\text{Aut}(N)$  مترافقة مع  $q'(Q)$ ، عندئذٍ

$$N \times_q Q \approx N \times_{q'} Q.$$

البرهان. ليكن  $a$  مولد للزمرة  $Q$ ، عندئذٍ يوجد العدد  $i$  و  $a \in \text{Aut}(N)$  بحيث يكون

$$q'(a^i) = a \cdot q(a) \cdot a^{-1}.$$

التطبيق  $(n, q) \mapsto (a(n), q^i)$  هو التماثل  $N \times_q Q \rightarrow N \times_{q'} Q$ .

## تمديدات الزمر (Extensions of groups)

إن المتتالية من الزمر و التشاكلات

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} 1$$

تكون تامة إذا كان  $i$  متبايناً، و  $p$  غامراً، و  $\text{Ker}(p) = \text{Im}(i)$ . لذلك  $i(N)$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$

(تماثل بالنسبة لـ  $i$  للزمرة  $N$ ) و  $G/i(N) \rightarrow Q$ . غالباً ما نطابق  $N$  مع الزمرة الجزئية  $i(N)$  في  $G$  و  $Q$  مع زمرة القسمة  $G/N$ .

إن المتتالية التامة السابقة تشير أيضاً بأنها تمثل تمديداً (Extension) للزمرة  $Q$  بالزمرة  $N$  (وأيضاً تشكل تمديداً للزمرة  $N$  بالزمرة  $Q$  عند بعض المؤلفين). يكون التمديد مركزياً (central) إذا كان  $i(N) \subset Z(G)$ . مثلاً، الجداء شبه المباشر  $N \times_q Q$  يتحول إلى تمديد للزمرة  $Q$  بالزمرة  $N$ ،

$$1 \rightarrow N \rightarrow N \times_q Q \rightarrow Q \rightarrow 1$$

الذي يكون مركزياً إذا وفقط إذا كان  $q$  تشاكلاً تافهاً.

يقال عن تمديد الزمرة  $Q$  بالزمرة  $N$  أنهما متماثلان إذا وجد مخططاً تبادلياً

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & N & \rightarrow & G & \rightarrow & Q \rightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \approx & & \parallel \\ 1 & \rightarrow & N & \rightarrow & G' & \rightarrow & Q \rightarrow 1 \end{array}$$

يقال بأن تمديد  $Q$  بـ  $N$ ،

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} 1$$

منفصلاً (split) إذا كان متماثلاً مع التمديد المعرف بالجداء شبه المباشر  $N \times_q Q$ . الشرطان الآتيان متكافئان:

(a) يوجد زمرة جزئية  $Q' \subset G$  بحيث إن  $p$  يعطي التماثل  $Q' \rightarrow Q$ ، أو

(b) يوجد تشاكل  $s: Q \rightarrow G$  بحيث يكون  $p \circ s = \text{id}$ .

في الحالة العامة، لن يكون التمديد منفصلاً. مثلاً، التمديد

$$1 \rightarrow N \rightarrow Q \rightarrow Q/N \rightarrow 1$$

حيث  $N$  أي زمرة جزئية من الرتبة 4 في الزمرة الرباعية  $Q$  و

$$1 \rightarrow C_p \rightarrow C_{p^2} \rightarrow C_p \rightarrow 1$$

ليس منفصلاً. نستعرض قاعدتين لكي يكون التمديد منفصلاً.

**مبرهنة 19.3 (Schur – Zassenhaus)** إن تمديد الزمر المنتهية التي رتبها أعداد أولية نسبياً يكون منفصلاً.

البرهان. Rotman 1995, 7.41.

**قضية 20.3** لتكن  $N$  زمرة جزئية ناظمية في الزمرة  $G$ ، إذا كانت  $N$  تامة، عندئذ فإن  $N$  جداء مباشر للزمرة  $N$  مع مركز  $N$  في  $G$ ،

$$C_G(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gn = ng, \forall n \in N\}$$

البرهان. لتكن  $Q = C_G(N)$ . سنبين بأن  $N$  و  $Q$  تحققان شروط القضية 50.1.

نلاحظ أولاً بأنه،  $gng^{-1}: N \rightarrow N$  لكل  $n \in N$  و  $g \in G$  تماثل ذاتي للزمرة  $N$ ، و (لأن  $N$  تامة)، يجب أن يكون التماثل الذاتي الداخلي معرفاً بعنصر  $g$  في  $N$ ، لهذا

$$n \in N \text{ لكل } gng^{-1} = gng^{-1}$$

تبين المعادلة السابقة بأن  $g^{-1}g \in Q$ ، وبالتالي  $g = g(g^{-1}g) \in NQ$ . بما أن  $g$  اختياري، نكون قد بينا بأن  $G = NQ$ .

نلاحظ فيما يلي بأن كل عنصر من  $NIQ$  ينتمي إلى مركز  $N$ ، الذي يكون تافهاً (لأن  $N$  تامة)، وبالتالي  $NIQ = 1$ .

أخيراً، لأي عنصر  $g = nq \in G$ ،

$$gQg^{-1} = n(qQq^{-1})n^{-1} = Q$$

(نتذكر بأن كل عنصر من  $N$  يتبادل مع كل عنصر من  $Q$ ). لذلك فإن  $Q$  ناظمية في  $G$ .

إن التمديد

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$$

يعطي التشاكل  $q': G \rightarrow \text{Aut}(N)$ ، وبالتحديد،

$$q'(g)(n) = gng^{-1}$$

ليكن  $q \in G$  يرسل إلى  $q$  في  $Q$  وفق التطبيق  $q$ ، عندئذ الصورة  $q'(q)$  في  $\text{Aut}(N)/\text{Inn}(N)$  تعتمد على  $q$  فقط، لذلك نحصل على التشاكل

$$q: Q \rightarrow \text{Out}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(N)/\text{Inn}(N)$$

يعتمد التطبيق  $q$  فقط على الصفوف المتماثلة للتمديدات، ونكتب  $\text{Ext}^1(Q, N)_q$  لمجموعة الصفوف المتماثلة للتمديدات مع  $q$ . لقد درست هذه المجموعات على نطاق واسع. عندما تكون  $N$  و  $Q$  تبديليتين و  $q$  تافهاً، تكون الزمرة  $G$  تبديلية أيضاً، وتوجد زمرة تبديلية تبنى فوق  $\text{Ext}^1(Q, N)$ . علاوةً على ذلك، فإن التشاكلات الذاتية للزمريتين  $N$  و  $Q$  تؤثر كتأثير التشاكلات الذاتية على  $\text{Ext}^1(Q, N)$ . كحالة خاصة، بالضرب بـ  $m$  فوق  $N$  أو  $Q$  ينتج الضرب بـ  $m$  فوق  $\text{Ext}^1(Q, N)$ . لهذا، إذا كانت  $N$  و  $Q$  مختزلتين على  $m$  و  $n$  على الترتيب، عندئذٍ  $\text{Ext}^1(Q, N)$  يكون مختزلاً على  $m$  و  $n$ ، وبالتالي يكون مختزلاً على  $\text{gcd}(m, n)$ . هذا يثبت مبرهنة Schur – Zassenhaus في هذه الحالة.

### مخطط هولدر (The Holder program).

سأولي الاهتمام الأكبر إذا كان من الممكن إعطاء نظرة عامة على مجموعة كاملة من الزمر البسيطة المنتهية.

Otto Holder, Math. Ann., 1892

نتذكر بأن  $G$  تكون زمرة بسيطة عندما لا تحوي على زمر جزئية ناظرية غير الزمريتين 1 و  $G$ . بكلمات أخرى، تكون الزمرة  $G$  بسيطة إذا لم تكن تمديداً لزمر أصغر منها. كل زمرة منتهية يمكن أن يحصل عليها بأخذ تمديدات مكررة لزمر بسيطة. لهذا يمكن أن تعتبر الزمر المنتهية البسيطة كقاعدة لبناء خلايا لجميع الزمر المنتهية.

إن مشكلة تصنيف الزمر البسيطة تقع في جزأين:

A . تصنيف جميع الزمر البسيطة المنتهية،

B . تصنيف جميع تمديدات الزمر المنتهية.

### تصنيف الزمر المنتهية البسيطة (Classification of finite simple groups)

توجد قائمة كاملة من الزمر المنتهية البسيطة. وهي

(a) الزمر الدائرية التي رتبها عدداً أولياً،

(b) الزمر المتناوبة  $A_n$  لكل  $n \geq 5$  (انظر الفصل الآتي)،

(c) مجموعات محددة غير منتهية من زمر المصفوفات، و

(d) "الزمر المتفرقة" 26

إن الصف الأكبر هو (c)، لكن "الزمر المتفرقة" 26 تأخذ اهتماماً أكثر من عددها الصغير الذي يمكن أن يكون مقترحاً. البعض ليس لديه إلا تصورات بأنها أكبر منهم، السيد Fischer-Griess، يكون قد انتقل إلى تركيب أكثر من مجموعة. وكمثال على زمرة المصفوفات، نأخذ

$$SL_m(F_q) \stackrel{\text{def}}{=} \{m \times m, A \in F_q, \det A = 1\}$$

هنا  $q = p^n$ ،  $p$  أولي، و  $F_q$  الحقل مع  $q$  عنصر. هذه الزمرة لن تكون بسيطة إذا كان

$$q \neq 2, \text{ لأن المصفوفة السلمية } x^m = 1, \begin{pmatrix} x & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & x & & 0 \\ & & \mathbf{O} & \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & x \end{pmatrix}, \text{ تكون في المركز من أجل}$$

أي  $m$  الذي يقسم  $q-1$ ، لكن هذه، هي المصفوفات التي في المركز فقط، وتكون الزمر

$$PSL_m(F_q) \stackrel{\text{def}}{=} SL_m(F_q) / \{\text{المركز}\}$$

بسيطة عندما يكون  $m \geq 3$  (Rotman 1995, 8.23) وعندما  $m = 2$  و  $q > 3$  (ibid.

8.13). من أجل الحالة التي يكون فيها  $m = 3$  و  $q = 2$ ، انظر التمرين 4-6 (نلاحظ بأن

$GL(F_2) = PSL_3(F_2)$ ). يمكن أن نحصل على زمر بسيطة منتهية أخرى من الزمر في

(8.1).

## B تصنيف كل تمديدات الزمر المنتهية

أصبح معروفاً لنا الكثير عن تمديدات الزمر المنتهية، فمثلاً، تمديد زمرة بسيطة واحدة بزمرة

أخرى. علاوة على ذلك، كتب Solomon (2001,p347):

... إن تصنيف كل الزمر المنتهية غير قابل للتطبيق بشكل تام. ولا توجد خبرات

سابقة تبين بأن معظم الزمر المنتهية التي توجد في "الطبيعة" ... تكون "مغلقة"

إما بالنسبة للزمر البسيطة أو بالنسبة لزمرة ما كزمر ديهيدرال، وزمر هيسينبيرغ،

الخ...، والتي تأتي بشكل طبيعي في دراسة الزمر البسيطة.

كما لاحظنا قبل ذلك، في عام 2001، قائمة كاملة صحيحة من الزمر المنتهية كانت متوفرة

فقط من أجل الزمر التي رتبها تصل إلى 2000 تقريباً، وعدد الزمر في القائمة غامر.

نلاحظ بأن حلم تصنيف الزمر البسيطة المنتهية يرجع على الأقل إلى 1892 Holder. لكن الإستراتيجية الواضحة لتحقيق هذه لم تبدأ بالظهور حتى عام 1950s، عندما عمل برويبر و مقترحون آخرون على أن المفتاح يكمن في دراسة ممرکزات العناصر من الرتبة 2 ( الممرکزات الالتفافية ). مثلاً، برويبر و فولبير (1995) بينا بأنه، من أجل أي زمرة منتهية  $H$ ، تكون محددات الزمر البسيطة المنتهية مع ممرکز التفافي متماثل مع  $H$  هو مسألة منتهية. فيما بعد عمل مبيناً بأن المسألة سلسلة للغاية، ولذلك أصبحت الإستراتيجية: (a) إن قائمة الزمر  $H$ ، التي يمكن أن تعتبر كممرکزات التفافية لبعض الزمر البسيطة المنتهية، و (b) لكل زمرة  $H$  في (a) قائمة الزمر البسيطة المنتهية للزمرة  $H$  التي تعتبر كممرکز التفافي. بالطبع، هذا يقترب بتطبيقه فقط على الزمر البسيطة المنتهية الحاوية على عنصر من الرتبة 2، لكن هناك تخمين قديم يقول بأن، كل زمرة بسيطة منتهية رتبته عدد زوجي وبالتالي تحوي على عنصر من الرتبة 2 وذلك حسب مبرهنة كوشي (13.4) ماعدا الزمر الدائرية التي رتبها عدداً أولياً. مع برهان هذا التخمين من قبل فيت و ثومبسون (1963)، إن الجهد الذي بذل لإكمال تصنيف الزمر البسيطة المنتهية بدأ بجدية. لقد أعلن التصنيف التام عام 1982، ولكن مازال غير موثوق به، لأن البرهان عليه اعتمد على آلاف من الصفحات في أجزاء من الصحف التي نادراً ما تقرأ، وفي الحقيقة، وأثناء صياغة البرهان، كالعادة، اكتشفت ثغرة. فتوقفوا عند هذا الحد، ومع منشورات Aschbacher و 2004 Smith أصبح بشكل عام مقبولاً لدينا بأن برهان تصنيف الزمر أمر معقد حقاً. من أجل البيان الشعبي لتاريخ التصنيف، انظر كتاب رومان 2006، و لمعرفة أكثر عن البيان التقني، انظر الجزء المعروض 2001 Solomon.

## تمارين

- 1-3 لتكن  $D_4 = \langle a, b \mid a^n, b^2, abab \rangle$  زمرة ديهيدرال. إذا كان  $n$  فردي، برهن أن  $D_{2n} \approx \langle a^n \rangle \times \langle a^2, b \rangle$ ، وبالتالي فإن  $D_{2n} \approx C_2 \times D_n$ .
- 2-3 لتكن  $G$  الزمرة الرباعية (1.17). برهن أنه لا يمكن كتابة  $G$  على شكل جداء شبه مباشر بأي طريقة غير تافهة.
- 3-3 لتكن  $G$  زمرة من الرتبة  $mn$  بحيث لا يكون لـ  $m$  و  $n$  أي عامل مشترك. إذا كانت  $G$  تحوي على زمرة جزئية واحدة فقط  $M$  من الرتبة  $m$  و على زمرة جزئية واحدة فقط  $N$  من الرتبة  $n$ ، برهن بأن  $G$  جداء مباشر للزمرتين  $M$  و  $N$ .



4-3 برهن أن  $GL_2(F_2) \approx S_3$ .

5-3 لتكن  $G$  الزمرة الرباعية (1.17). برهن أن  $Aut(G) \approx S_4$ .

6-3 لتكن  $G$  مجموعة جميع المصفوفات في  $GL_3(\mathbb{C})$  من الشكل

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, ad \neq 0.$$

أثبت أن  $G$  زمرة جزئية من  $GL_3(\mathbb{C})$ ، وبرهن أنها تشكل

جداء شبه مباشر لـ  $S_2$  (الزمرة الجمعية) على  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . وهل هي جداء مباشر لهاتين الزمرتين؟

7-3 أوجد التماثلات الذاتية للزمرتين  $C_\infty$  و  $S_3$ .

## الفصل الرابع

### تأثير زمر على مجموعات

### Groups Acting on Sets

#### تعريف و أمثلة

**تعريف 1.4** لتكن  $X$  مجموعة و لتكن  $G$  زمرة. إن التأثير اليساري (left action) للزمرة

$G$  على المجموعة  $X$  هو تطبيق  $gx: G \times X \rightarrow X$  بحيث يكون

$$(a) \quad 1x = x \text{ لكل } x \in X$$

$$(b) \quad (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) \text{ لكل } g_1, g_2 \in G, x \in X$$

إن المجموعة مع التأثير (اليساري) للزمرة  $G$  تدعى  $G$  - مجموعة من (اليسار).

تقتضي الشروط أنه، لكل  $g \in G$ ، فإن للمناقلة اليسارية وفق  $g$ ،

$$g_L: X \rightarrow X, \quad x \mapsto gx,$$

معكوس  $(g^{-1})_L$ ، ولذلك فإن  $g_L$  تقابل، أي أن،  $g_L \in \text{Sym}(X)$  من المسلمة (b)

نجد أن

$$g \mapsto g_L: G \rightarrow \text{Sym}(X) \quad (14)$$

تشاكل. لذلك، من التأثير اليساري لـ  $G$  على  $X$ ، نحصل على التشاكل

$$G \rightarrow \text{Sym}(X)$$

و بالعكس، كل تشاكل كهذا يعرف تأثيراً لـ  $G$  على  $X$ . يقال بأنه أمين (faithful) (أو دقيق (effective)) إذا كان التشاكل (14) متبايناً، أي أنه، إذا كان

$$gx = x \Rightarrow g = 1 \text{ لكل } x \in X$$

**مثال 2.4 (a)** كل زمرة جزئية من زمرة تناظرية  $S_n$  تؤثر بشكل أمين على  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

(b) كل زمرة جزئية  $H$  من الزمرة  $G$  تؤثر بشكل أمين على  $G$  بالتحويل اليساري

$$H \times G \rightarrow G, \quad (h, x) \mapsto hx$$

(c) لتكن  $H$  زمرة جزئية من  $G$ . إن الزمرة  $G$  تؤثر على مجموعة المرافقات اليسارية

لـ  $H$ ،

$$G \times G/H \rightarrow G/H, \quad (g, C) \mapsto gC$$

والتأثير يكون أميناً، إذا كان، مثلاً،  $H \neq G$  و  $G$  بسيطة.

(d) كل زمرة  $G$  تؤثر على نفسها بالترافق،

$$G \times G \rightarrow G, (g, x) \mapsto g_x \stackrel{\text{def}}{=} gxg^{-1}$$

لأي زمرة جزئية ناظمية  $N$ ،  $G$  تؤثر على  $N$  و  $G/N$  بالترافق.

(e) من أجل أي زمرة  $G$ ،  $\text{Aut}(G)$  تؤثر على  $G$ .

(f) الزمرة الحركية غير القابلة للتأثير (group of rigid motion) في  $n$  هي الزمرة

$G$  من التبادلات  $n \rightarrow n$  التي تحافظ على الأطوال. عندئذٍ  $G$  تؤثر على  $n$  من اليسار.

يعرف التأثير اليميني (right action)  $X \times G \rightarrow G$  بشكل مشابه. لتحويل التأثير اليميني إلى تأثير يساري، نضع  $g * x = xg^{-1}$ . مثلاً، يوجد تأثير طبيعي يميني لـ  $G$  على مجموعة المرافقات اليمينية للزمر الجزئية  $H$  في  $G$ ، بالتحديد،  $(C, g) \mapsto Cg$ ، الذي من الممكن أن يتحول إلى تأثير يساري  $(g, C) \mapsto gC$ .

التطبيق من  $G$  - مجموعة (أو،  $G$  - تطبيق أو  $G$  - تطبيق مكافئ) هو التطبيق  $j: X \rightarrow Y$  بحيث يكون

$$j(gx) = gj(x), \forall g \in G, x \in X.$$

التمائل لـ  $G$  - مجموعة هو  $G$  - تطبيق تقابل، عندئذٍ يكون نظيره هو أيضاً  $G$  - تطبيق.

## المدارات (Orbits)

لنكن  $G$  زمرة تؤثر على المجموعة  $X$ . يقال عن المجموعة الجزئية  $S \subset X$  أنها ثابتة (stable) بالنسبة إلى التأثير  $G$  إذا كان

$$g \in G, x \in S \Rightarrow gx \in S.$$

ينتج تأثير  $G$  على  $S$  من تأثير  $G$  على  $X$ .

نكتب  $x \sim_G y$  إذا كان  $y = gx$ ، لبعض  $g \in G$ . إن العلاقة انعكاسية لأن  $x = 1x$ ، وتناظرية لأن

$$y = gx \Rightarrow x = g^{-1}y$$

(بالضرب من اليسار بـ  $g^{-1}$  وباستخدام المسلمات)، وهي متعدية لأن

$$y = gx, z = g'y \Rightarrow z = g'(gx) = (g'g)x.$$

لذلك فهي تشكل علاقة تكافؤ. ندعو صفوف التكافؤ  $G$  - مدار. لهذا فإن  $G$  - مدار يشكل

تجزئة للمجموعة  $X$ . نكتب  $X \setminus G$  لمجموعة المدارات.

لدينا من التعريف، إن  $G$  - مدار يحوي  $x_0$  إذا كان  
 $Gx_0 = \{gx_0 \mid g \in G\}$   
وهي أصغر مجموعة جزئية  $G$  - ثابتة  $X$  تحوي  $x_0$ .

**مثال 3.4 (a)** بفرض أن  $G$  تؤثر على  $X$ ، وليكن  $a \in G$  عنصراً من الرتبة  $n$ . عندئذٍ مدارات  $\langle a \rangle$  هي مجموعات من الشكل

$$\{x_0, ax_0, \dots, a^{n-1}x_0\}$$

(ليس من الضروري أن تكون هذه العناصر مختلفة، ولذلك يمكن أن تحوي المجموعة على عدد أقل من  $n$  عنصر).

(b) إن مدارات الزمرة الجزئية  $H$  من  $G$  التي تؤثر على  $G$  بالجداء من اليسار هي المرافقات اليمينية لـ  $H$  في  $G$ . نكتب  $H \setminus G$  لمجموعة المرافقات اليمينية. بشكل مشابه، إن مدارات  $H$  التي تؤثر على  $G$  بالجداء من اليمين هي المرافقات اليسارية لـ  $H$  في  $G$ ، ونكتب  $G/H$  لمجموعة المرافقات اليسارية. نلاحظ بأن قانون الزمرة على  $G$  لن ينتج عنه قانون الزمرة على  $G/H$  باستثناء الحالة التي تكون فيها  $H$  ناظمية.

(c) من أجل الزمرة  $G$  التي تؤثر على نفسها بالترافق، تدعى المدارات بصفوف الترافق: لكل  $x \in G$ ، إن صف ترافق  $x$  هو المجموعة

$$\{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

والتي هي مرافقات  $x_0$ . إن صف ترافق  $x$  يحوي دائماً  $x_0$ ، ويتألف فقط من  $x_0$  إذا وقف فقط إذا كان  $x_0$  في مركز  $G$ . في الجبر الخطي تكون صفوف الترافق في  $G$  متساوية مع  $GL_n(k)$  والتي تسمى بصفوف التشابه، وإن نظرية الأشكال النسبية القانونية تزود بمجموعة تمثيلات لصفوف الترافق: تكون المصفوفتان متشابهتين (مترافقتين) إذا وقف فقط إذا كان لهما نفس الشكل النسبي القانوني.

نلاحظ بأنه تكون المجموعة الجزئية من  $X$  ثابتة إذا وقف فقط إذا كانت اجتماعاً لمدارات. مثلاً، تكون الزمرة الجزئية  $H$  ناظمية في  $G$  إذا وقف فقط إذا كانت اجتماعاً لصفوف الترافق. يقال بأن تأثير  $G$  على  $X$  متعدياً (transitive)، ويقال بأن  $G$  تؤثر على  $X$  بشكل متعد (transitivity)، إذا وجد مدار واحد فقط، أي أنه، لأجل أي عنصرين  $x$  و  $y$  من  $X$ ، يوجد  $g \in G$  بحيث يكون  $gx = y$ . عندئذٍ تدعى المجموعة  $X$  -  $G$  متجانسة (homogeneous). مثلاً، إن  $S_n$  تؤثر على  $\{1, 2, \dots, n\}$  بشكل متعد. لأجل أي زمرة

جزئية  $H$  من الزمرة  $G$ ، فإن  $G$  تؤثر على  $G/H$  بشكل متعدٍ، لكن تأثير  $G$  على نفسها يكون غير متعدٍ إذا كان  $G \neq 1$  لأن  $\{1\}$  هو صف ترافق دائماً.

يكون تأثير الزمرة  $G$  على  $X$  متعدياً بشكل مضاعف (doubly transitive) إذا كان لأي زوجين  $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$  من عناصر  $X$  بحيث  $x_1 \neq x_2$  و  $y_1 \neq y_2$ ، يوجد عنصر (مفرد)  $g \in G$  بحيث يكون  $gx_1 = y_1$  و  $gx_2 = y_2$ . نعرف  $k$ -مضاعفاً متعدياً (fold transitivity) لكل  $k \geq 3$  بشكل مشابه.

### المثبتات (Stabilizers)

لتكن  $G$  زمرة تؤثر على  $X$ . إن المثبت (Stabilizer) (أو موحد الخواص isotropy group) العنصر  $x \in X$  إذا كان

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

وهو زمرة جزئية، لكن ليس من الضروري أن يكون زمرة جزئية ناظرية. في الحقيقة:

**تمهيدية 4.4** لأي  $x \in X$  و  $g \in G$ ،

$$\text{Stab}(gx) = g \cdot \text{Stab}(x) \cdot g^{-1}$$

البرهان.

إذا كان  $gx = x$ ، تحديداً، عندئذٍ

$$(gg^{-1}x) = gx = x,$$

وبالتالي  $\text{Stab}(gx) \subset g \cdot \text{Stab}(x) \cdot g^{-1}$ . العكس، إذا كان  $g'(gx) = gx$ ، عندئذٍ

$$(g^{-1}g'g)x = g^{-1}g'(gx) = g^{-1}y = x,$$

ومنه  $g^{-1}g'g \in \text{Stab}(x)$ ، أي أن  $g' \in g \cdot \text{Stab}(x) \cdot g^{-1}$ .

من الواضح

$$\bigcap_{x \in X} \text{Stab}(x) = \text{Ker}(G \rightarrow \text{Sym}(X)),$$

والذي هو زمرة جزئية ناظرية في  $G$ . يكون التأثير أميناً إذا وفقط إذا كان

$$\bigcap_{x \in X} \text{Stab}(x) = \{1\}.$$

**مثال 5.4 (a)** لتكن  $G$  زمرة تؤثر على نفسها بالترافق. عندئذٍ

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$$

تسمى هذه الزمرة بمركز (centralizer)  $C_G(x)$  العنصر  $x$  في  $G$ . وهي تتألف من جميع عناصر  $G$  التي تتبادل معه، أي أنه، مركز،  $x$ . إن التقاطع

$$\bigcap_{x \in G} C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$$

هو مركز  $G$ .

(b) لتكن  $G$  زمرة تؤثر على  $G/H$  بالجداء من اليسار. عندئذٍ  $\text{Stab}(H) = H$ ، ومثبت  $gH$  هو  $gHg^{-1}$ .

(c) لتكن  $G$  زمرة من الدورانات غير المتأثرة في  $^n$  (4.2f). إن مركز مبدأ الإحداثيات هو الزمرة المتعامدة  $O_n$  للشكل المعروف الموجب القياسي على  $^n$  (Artin 1991، الفصل 4، 5.16). ليكن  $(^n, +)$  زمرة جزئية من  $G$  لتحويلات  $^n$ ، أي أنه، تطبيق من الشكل  $v \mapsto v + v_0$  لبعض  $v_0 \in ^n$ . عندئذٍ فإن  $T$  زمرة جزئية ناظرية في  $G$  وأن  $G = T \times_q O$  (cf. Artin 1991، الفصل 2، §5).

لأجل المجموعة الجزئية  $S$  من  $X$ ، نعرف مثبت  $S$  (Stabilizer) بالشكل

$$\text{Stab}(S) = \{g \in G \mid gS = S\}$$

عندئذٍ  $\text{Stab}(S)$  زمرة جزئية في  $G$ ، وبنفس الترتيب كما في برهان (4.4) نبين بأن

$$\text{Stab}(gS) = g \cdot \text{Stab}(S) \cdot g^{-1}$$

**مثال 4.6** لتكن  $G$  زمرة تؤثر على  $G$  بالترافق، ولتكن  $H$  زمرة جزئية في  $G$ . يسمى مثبت  $H$  بالمنظم (normalizer)  $N_G(H)$   $H$  في  $G$ :

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

من الواضح بأن  $N_G(H)$  هي أكبر زمرة جزئية تحوي  $H$  كما أنها زمرة جزئية ناظرية.

من المحتمل أن يكون  $gS \subset S$  لكن  $g \in \text{Stab}(S)$  (انظر (1.32).

## التأثيرات المتعدية (Transitive actions)

**قضية 7.4** إذا كانت  $G$  تؤثر على  $X$  بشكل متعدٍ، عندئذٍ لأي  $x_0 \in X$ ، يكون التطبيق

$$g \text{ Stab}(x_0) \mapsto gx_0 : G/\text{Stab}(x_0) \rightarrow X$$

تماثل على  $G$  - مجموعة.

**البرهان.** إن التطبيق معرف جيداً لأنه، إذا كان  $h \in \text{Stab}(x_0)$ ، عندئذٍ  $ghx_0 = gx_0$ .

وهو متباين لأن

$$gx_0 = g'x_0 \Rightarrow g^{-1}g'x_0 = x_0 \Rightarrow$$

$$(Stab(x_0), g')$$

وهو غامر لأن  $G$  تؤثر بشكل متعدٍ. أخيراً، يكون واضحاً لنا بأنه  $G$  - تكافؤ.

لهذا إن كل  $G$  - مجموعة متجانسة  $X$  تكون متماثلة مع  $G/H$  لبعض من الزمر الجزئية  $H$  في  $G$ ، لكن هكذا تحويل لـ  $X$  ليس قانونياً: يعتمد على اختيار  $x_0 \in X$ . لنقول ذلك بطريقة أخرى، يكون لـ  $G$  - المجموعة  $G/H$  نقطة منفصلة، وبالتحديد، المرافقة  $H$ ؛ لإعطاء  $G$  - مجموعة متجانسة  $X$  مع نقاطها المنفصلة، هي تماماً التي تعطي زمرة جزئية في  $G$ .

**نتيجة 8.4** لتكن  $G$  زمرة تؤثر على  $X$ ، وليكن  $O = Gx_0$  المدار الذي يحوي  $x_0$ .

عندئذٍ فإن عدد العناصر في  $O$  يساوي

$$|O| = (G : Stab(x_0))$$

مثلاً، إن عدد المرافقات  $gHg^{-1}$  للزمرة الجزئية  $H$  في  $G$  يساوي  $(G : N_G(H))$ .

**البرهان.** إن تأثير  $G$  على  $O$  يكون متعدياً، ولذلك فإن  $gx_0$  يعرف تطبيقاً تقابلاً  $G/Stab(x_0) \rightarrow Gx_0$ .

هذه المعادلة مفيدة دائماً لحساب  $|O|$ .

**قضية 9.4** لتكن  $G$  زمرة تؤثر على  $X$  بشكل متعدٍ، عندئذٍ، لأي  $x_0 \in X$ ، تكون

$$\text{Ker}(G \rightarrow \text{Sym}(X))$$

زمرة جزئية ناظرية عظمى محتواة في  $Stab(x_0)$ .

**البرهان.** لتكن  $x_0 \in X$  عندئذٍ

$$\text{Ker}(G \rightarrow \text{Sym}(X)) = \bigcap_{x \in X} Stab(x) = \bigcap_{g \in G} Stab(gx_0) \stackrel{4.4}{=} \bigcap_{g \in G} g.Stab(x_0)g^{-1}$$

وبالتالي، فإن هذه القضية عبارة عن متابعة للتمهيدية الآتية.

**تمهيدية 10.4** لأي زمرة جزئية  $H$  من الزمرة  $G$ ،  $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$  هي زمرة جزئية ناظرية عظمى محتواة في  $H$ .

**البرهان.** نلاحظ بأن  $N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ ، وبما أنها تقاطع لزمرة جزئية، فهي زمرة جزئية. وتكون ناظرية لأن

$$g_1 N_0 g_1^{-1} = \bigcap_{g \in G} (g_1 g) N_0 (g_1 g)^{-1} = N_0$$

- من أجل المساواة الثانية، استخدمنا،  $g$  التي تسمح كل عناصر  $G$ ، وكذلك  $g_1g$ . لهذا فإن  $N_0$  زمرة جزئية ناظرية في  $G$  محتواة في  $H = He^{-1}$ . إذا كانت  $N$  زمرة أخرى كهذه، عندئذٍ

$$N = gNg^{-1} \subset gHg^{-1}$$

لكل  $g \in G$ ، ومنه

$$N \subset \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} = N_0$$

### صفوف التكافؤ (The class equation)

إذا كانت  $X$  منتهية، فإنها عبارة عن اجتماع منفصل لعدد منته من المدارات:

$$X = \bigcup_{i=1}^m O_i \quad (\text{اجتماع منفصل})$$

وبالتالي:

**قضية 11.4** إن عدد العناصر في  $X$  يساوي

$$|X| = \sum_{i=1}^m |O_i| = \sum_{i=1}^m (G : \text{Stab}(x_i)), \quad x_i \in O_i$$

عندما تؤثر الزمرة  $G$  على نفسها بالترافق، تصبح هذه الصيغة كما يأتي:

### قضية 12.4 (صفوف التكافؤ)

$$|G| = \sum (G : C_G(x))$$

(حيث  $x$  تسمح مجموعة ممثلات صفوف الترابق).

$$|G| = |Z(G)| + \sum (G : C_G(y))$$

(إن  $y$  تسمح مجموعة ممثلات صفوف الترابق الحاوية على أكثر من عنصر واحد).

**مبرهنة 13.4 (كوشي)** إذا كان العدد الأولي  $p$  يقسم  $|G|$ ، عندئذٍ فإن  $G$  تحوي على عنصر من الرتبة  $p$ .

**البرهان.** نستخدم الاستقراء على  $|G|$ . إذا كانت مجموعة من العناصر  $y$  لا تنتمي إلى مركز  $G$ ،  $p$  لا يقسم  $\sum (G : C_G(y))$ ، عندئذٍ  $p \mid C_G(y)$  ويمكن أن نطبق الاستقراء لإيجاد عنصر من الرتبة  $p$  في  $C_G(y)$ . لذلك يمكن أن نفرض أن  $p$  يقسم كل حدود  $(G : C_G(y))$  في معادلة الصفوف (الشكل الثاني)، ولذلك فهو يقسم أيضاً



$Z(G)$ . لكن  $Z(G)$  تبديلي، و من مبرهنة البنى<sup>١٣</sup> لمثل هذه الزمر نجد بأن  $Z(G)$  يحوي عنصر من الرتبة  $p$ .

**نتيجة 14.4** تكون الزمرة المنتهية  $G$  - زمرة إذا وفقط إذا كانت رتبة كل عنصر من عناصرها قوى لعدد أولي.

**البرهان.** إذا كانت  $|G|$  قوى لـ  $p$ ، عندئذٍ (25.1) تبين مبرهنة لاغرانج بأن رتبة كل عنصر يكون قوى للعدد  $p$ . والعكس يبرهن عليه من مبرهنة كوشي.

**نتيجة (15.4)** كل زمرة من الرتبة  $2p$ ،  $p$  عدد أولي فردي، تكون دائرية أو زمرة ديهيدرال.

**البرهان.** من مبرهنة كوشي، نعلم بأن الزمرة  $G$  تحوي على عناصر  $s$  و  $r$  من الرتبة 2 و  $p$  على الترتيب. لتكن  $H = \langle r \rangle$ . عندئذٍ فإن دليل  $H$  يساوي 2، ولهذا فهي ناظمية. من الواضح أن  $s \notin H$ ، ومنه  $G = H \cup Hs$ :

$$G = \{1, r, \dots, r^{p-1}, s, rs, \dots, r^{p-1}s\}$$

وبما أن  $H$  زمرة جزئية ناظمية،  $srs^{-1} = r^i$ ، لبعض  $i$ . وذلك لأن  $s^2 = 1, r = s^2rs^{-2} = s(srs^{-1})s^{-1} = r^{i^2}$ ، تكون عناصره فقط الأعداد التي تربيعها يساوي 1 وهي  $\pm 1$ ، ولذلك  $i \equiv 1 \pmod{p}$  لأن  $Z/\mathfrak{p}Z$  حقل،  $i \equiv -1 \pmod{p}$  في الحالة الأولى، الزمرة تبديلية (أي زمرة مولدة بمجموعة من العناصر المتبادلة من الواضح أنها تبديلية)، وفي الحالة الثانية  $srs^{-1} = r^{-1}$  و نكون قد حصلنا على زمرة ديهيدرال (9.2).

## **$p$ - زمر**

**مبرهنة 4.16** لكل  $p$  - زمرة منتهية غير تافهة مركز غير تافه.

<sup>13</sup> يوجد هنا برهان مباشر هو أن المبرهنة محققة من أجل زمرة آبلية  $Z$ . نستخدم الاستقراء على رتبة الزمرة  $Z$ . يكفي أن نبين بأن  $Z$  تحوي على عنصر و التي تقبل رتبته القسمة على  $p$ ، لأنه عندئذٍ بعض قوى العناصر سيكون من الرتبة  $p$  تماماً. ليكن  $g \neq 1$  عنصر من  $Z$ . إذا كان  $p$  لا يقبل القسمة على رتبة  $g$ ، عندئذٍ سيقسم رتبة الزمرة  $\langle g \rangle$ ، في الحالة التي يوجد فيها (بالاستقراء) عنصر من  $G$  بحيث تقبل رتبته في  $\langle g \rangle$  القسمة على  $p$ . لكن رتبة مثل هذا العنصر يجب أن تقبل القسمة على  $p$ .

**البرهان.** من الفرض، بما أن  $(G:1)$  قوى لعدد أولي  $p$ ، وبالتالي فإن  $(G:C_G(y))$  قوى لعدد أولي  $p$  ( $p \neq 0$ ) لكل  $y$  في معادلة الصفوف (الشكل الثاني). بما أن  $p$  يقسم كل حد من معادلة الصفوف باستثناء (ربما)  $(Z(G):1)$ ، وبالتالي يجب أن يقسم  $(Z(G):1)$  أيضاً.

**نتيجة 17.4** الزمرة من الرتبة  $p^n$  تحوي على زمرة جزئية ناظرية من الرتبة  $p^m$  لكل  $m \leq n$ .

**البرهان.** نستخدم الاستقراء الرياضي على  $n$ . إن مركز الزمرة  $G$  يحوي عنصر من الرتبة  $p$ ، ولذلك  $N = \langle g \rangle$  زمرة جزئية ناظرية في  $G$  من الرتبة  $p$ . الآن ومن فرضية الاستقراء يمكننا أن نفرض النتيجة بالنسبة إلى  $G/N$ ، ومن ثم فإن مبرهنة التقابل (46.1) تعطينا النتيجة بالنسبة إلى  $G$ .

**قضية 18.4** كل زمرة رتبته  $p^2$  هي زمرة تبديلية، وبالتالي تكون متماثلة مع  $C_p \times C_p$  أو  $C_{p^2}$ .

**البرهان.** نعلم بأن مركز الزمرة  $Z$  ليس تافهاً، ولذلك فإن  $G/Z$  من الرتبة 1 أو من الرتبة  $p$ . في كل من الحالتين تكون دائرية، وبالتالي فإن  $G$  تبديلية.

**تمهيدية 19.4** نفرض بأن  $G$  تحتوي على الزمرة الجزئية  $H$  في مركزها (وبالتالي فهي ناظرية) بحيث يكون  $G/H$  دائرية. عندئذٍ  $G$  تبديلية.

**البرهان.** ليكن  $a$  عنصراً من الزمرة  $G$  والذي صورته في  $G/H$  يولدها. عندئذٍ كل عنصر من  $G$  يمكن أن يكتب بالشكل  $g = a^i h$  مع  $h \in H, i \in$  الآن

$$a^i h a^{i'} h' = a^i a^{i'} h h' \quad (H \subset Z(G)) \quad \text{لأن}$$

$$= a^{i'} a^i h' h$$

$$= a^{i'} h' a^i h$$

**ملاحظة 20.4** يبين البرهان السابق بأنه إذا كان  $H \subset Z(G)$  و  $G$  تحتوي على مجموعة من ممثلات  $G/H$  بحيث تكون عناصرها متبادلة، عندئذٍ فإن  $G$  تبديلية.

من أجل العدد الأولي الفردي  $p$ ، ليس من الصعب الآن أن نبين بأن أي زمرة غير تبديلية من الرتبة  $p^3$  متماثلة تماماً مع واحدة من الزمر المبنية في (3.13، 3.14) (التمرين 3-4). لهذا، تحت سقف التماثل، يوجد تماماً زمرتين غير تبديليتين من الرتبة  $p^3$ .

**مثال 21.4** لتكن  $G$  زمرة غير تبديلية من الرتبة 8. عندئذٍ يجب أن تحوي على عنصر  $a$  من الرتبة 4 (انظر التمرين 5-1). إذا كانت  $G$  تحوي على عنصر من الرتبة 2 بحيث لا ينتمي إلى  $\langle a \rangle$ ، عندئذٍ  $\langle a \rangle \times_q \langle b \rangle$  حيث  $G$  هو التماثل الوحيد  $Z/2Z \rightarrow (Z/4Z)^\times$ ، ولذلك  $G \approx D_4$ . أما إذا لم يكن كذلك، أي عنصر  $b$  من  $G$  لا يقع في  $\langle a \rangle$  يجب أن يكون من الرتبة 4، و  $a^2 = b^2$ . الآن  $bab^{-1}$  هو عنصر من الرتبة 4 في  $\langle a \rangle$ . ولا يساوي  $a$ ، لأنه من جهة أخرى  $G$  ستكون تبديلية، ولهذا فإن  $G$  هي الزمرة الرباعية (17.1, 2.7b).

### التأثيرات على المرافقات اليسارية (Action on the left cosets)

تأثير الزمرة على مجموعة المرافقات اليسارية  $G/H$  للزمرة  $H$  في  $G$  وسيلة مفيدة جداً في دراسة الزمر. سنوضح هذا مع بعض الأمثلة.

لتكن  $X = G/H$ . نتذكر بأن، لأي  $g \in G$ ،

$$\text{Stab}(gH) = g \text{Stab}(H) g^{-1} = gHg^{-1}$$

و نواة التطبيق

$$G \rightarrow \text{Sym}(X)$$

هي زمرة جزئية عظمى  $\mathbf{I}_{g \in G} gHg^{-1}$  في  $G$  محتواة في  $H$ .

**ملاحظة 22.4 (a)** لتكن  $H$  زمرة جزئية في  $G$  لا تحوي على زمرة جزئية ناظمية في  $G$  غير 1. عندئذٍ  $G \rightarrow \text{Sym}(G/H)$  متباين، ولقد تحققنا بأن  $G$  كزمرة جزئية من زمرة تناظرية ومن رتبة أقل بكثير من  $(G:1)!$ . مثلاً، إذا كانت  $G$  بسيطة، عندئذٍ تبين مبرهنات سيلو (انظر § 5) بأن  $G$  تحوي على زمرة فعلية  $H \neq 1$  (باستثناء الحالة التي تكون فيها  $G$  دائرية)، لكنها (من التعريف) لا تحوي على زمرة جزئية ناظمية كهذه.

(b) إذا كانت  $(G:1)$  لا تقسم  $(G:1)!$ ، عندئذٍ

$$G \rightarrow \text{Sym}(G/H)$$

لن يكون متبايناً (مبرهنة لاغرانج، 25.1)، ويمكن أن نستنتج بأن  $H$  تحوي على زمرة جزئية ناظمية  $\neq 1$  في  $G$ . مثلاً، إذا كانت  $G$  من الرتبة 99، عندئذٍ تحوي على زمرة جزئية ناظمية  $N$  من الرتبة 11 (مبرهنة كوشي 13.4)، والزمرة الجزئية يجب أن تكون ناظمية. في الحقيقة،  $G = N \times Q$ .

**مثال 23.4** إن النتيجة 4.15 تبين بأن كل زمرة  $G$  من الرتبة 6 إما دائرية أو زمرة ديهيدرال. نقدم هنا ترتيب مختلف وبشكل مبسط. بالعودة إلى مبرهنة كوشي (13.4)، يجب أن تحوي  $G$  على عنصر  $r$  من الرتبة 3 وعلى عنصر  $s$  من الرتبة 2. علاوةً على ذلك  $N = \langle r \rangle$  يجب أن تكون ناظرية لان 6 لا تقسم 2! (أو ببساطة لأن دليلها يساوي 2). لتكن  $H = \langle s \rangle$ . إما (a) تكون  $H$  زمرة جزئية ناظرية في  $G$ ، أو (b)  $H$  ليست زمرة جزئية ناظرية في  $G$ . في الحالة الأولى،  $rsr^{-1} = s$ ، أي أن  $rs = sr$ ، ولذلك  $\langle r \rangle \times \langle s \rangle \approx C_2 \times C_3$ . في الحالة الثانية، إن  $G \rightarrow \text{Sym}(G/H)$  متباين، وبالتالي يكون غامراً، ومنه  $G \approx S_3 \approx D_3$ .

### زمر التبديلات (Permutation groups)

نأخذ  $\text{Sym}(X)$  حيث  $X$  تحوي على  $n$  عنصر. بما أن (تحت سقف التماثل) الزمرة التناظرية  $\text{Sym}(X)$  تعتمد فقط على عدد العناصر في  $X$ ، يمكن أن نأخذ  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ، وهكذا بالنسبة للزمرة  $S_n$ . إن الرمز  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  يدل على التبديلة التي ترسل  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 7, 4 \rightarrow 4, 5 \rightarrow 3, 6 \rightarrow 1, 7 \rightarrow 6$ ، الخ ... نعتبر التبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a(1) & a(2) & a(3) & \dots & a(n) \end{pmatrix}.$$

يسمى الزوج  $(i, j)$  حيث  $i < j$  و  $a(i) > a(j)$  بمعكوس (inversions)،  $a$ ، ويقال بأن  $a$  فردي أو زوجي وذلك حسب عدد المعكوسات إن كانت فردية (odd) أو زوجية (even).. إن إشارة  $a$ ،  $\text{sign}(a)$ ، إما تساوي +1 أو -1 وذلك حسب  $a$  إن كانت زوجية أو فردية.

**ملاحظة 24.4** لحساب إشارة  $a$ ، نصل (بخط) كل عنصر  $i$  في السطر الأعلى مع عنصر  $i$  في السطر السفلي، ونحسب عدد المرات التي تقاطعت فيها الخطوط: يكون  $a$  زوجياً أو فردياً حسب هذا العدد إن كان زوجياً أو فردياً. مثلاً،

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

إنه زوجي (6 تقاطعات). هذا ممكن، بسبب وجود تقاطع واحد لكل معكوس.

من أجل التبديلة  $a$ ، نعتبر الجداء

$$V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = (2-1)(3-1)\dots(n-1) \\ (3-2)\dots(n-2) \\ \dots \\ (n-(n-1))$$

$$aV = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a(j) - a(i)) = (a(2) - a(1))(a(3) - a(1))\dots(a(n) - a(1)) \\ (a(3) - a(2))\dots(a(n) - a(2)) \\ \dots \\ (a(n) - a(n-1)).$$

إن الحدود في كل من الجداءين متساوية ما عدا الحدود التي كل معكوس فيها يعطي إشارة سالبة<sup>14</sup>. لذلك،

$$aV = \text{sign}(a)V$$

بمقارنة مشابهة نجد بأنه، من أجل أي تبديلة  $b$ ،

$$a(bV) = \text{sign}(a)(bV). \quad (16)$$

بما أن  $bV = \text{sign}(b)V$  و  $a(bV) = (ab)V = \text{sign}(ab)V$ ، هذا يبين لنا

$$\text{sign}(ab) = \text{sign}(a)\text{sign}(b)$$

لذلك، "sign" هو التشاكل  $S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ . عندما  $n \geq 2$ ، يكون غامراً، وبالتالي تكون

نواته عبارة عن زمرة جزئية ناظرية في  $S_n$  من الرتبة  $\frac{n!}{2}$ ، وتسمى بالزمرة المتناوبة

$A_n$  (alternating group).

الدورة (cycle) هي تبديلة من الشكل الآتي

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_r \rightarrow i_1$$

أما الأعداد المتتالية فهي ثابتة.

<sup>14</sup> كل منها هو جداء فوق مجموعة جزئية مؤلفة من عنصرين من  $\{1, \dots, n\}$ ، يقابل العامل للمجموعة الجزئية

$\{i, j\}$  وهو  $\text{sign}(j-i)$

يجب أن يكون  $i_j$  مختلفاً. نرمز للدورة بالرمز  $(i_1 i_2 \dots i_r)$ ، و ندعو  $r$  بطول الدورة- نلاحظ أن  $r$  أيضاً يساوي رتبة الدورة عندما تعتبر كعنصر من  $S_n$ . تسمى الدورة التي طولها يساوي 2 منقولة. إن الدورة  $(i)$  ذات الطول 1 هي التطبيق المحايد. دعامة الدورة  $(i_1 \dots i_r)$  (support of the cycle) هي مجموعة العناصر  $\{i_1, \dots, i_r\}$ ، يقال بأن الدورات منفصلة إذا كانت دعاماتها منفصلة (disjoint). نلاحظ بأنه تكون الدورات المنفصلة تبديلية. إذا كانت

$$a = (i_1 \dots i_r)(j_1 \dots j_s) \dots (l_1 \dots l_u) \text{ (دورات منفصلة)}$$

عندئذٍ

$$a^m = (i_1 \dots i_r)^m (j_1 \dots j_s)^m \dots (l_1 \dots l_u)^m \text{ (دورات منفصلة)}$$

وبالتالي فإن  $a$  من الرتبة  $\text{lcm}(r, s, \dots, u)$ .

**قضية 25.4** كل تبديلة يمكن أن تكتب (وبطريقة واحدة بشكل أساسي) كجاء دورات منفصلة.

**البرهان.** لتكن  $a \in S_n$ ، وليكن  $O \subset \{1, 2, \dots, n\}$  مدار لـ  $a$ . إذا كان  $|O| = r$ ، عندئذٍ لأي  $i \in O$

$$O = \{i, a(i), \dots, a^{r-1}(i)\}$$

لذلك فإن  $a$  و الدورة  $(i a(i) \dots a^{r-1}(i))$  لهما التأثير نفسه على أي عنصر من  $O$ .  
ليكن

$$\{1, 2, \dots, n\} = \bigcup_{j=1}^m O_j$$

تحليل (decomposition) للمجموعة  $\{1, \dots, n\}$  لاجتماع مدارات منفصلة  $\langle a \rangle$ ، ولتكن  $g_j$  دورة مرتبطة (كما سبق) بـ  $O_j$ . عندئذٍ

$$a = g_1 \dots g_m$$

هو تحليل  $a$  إلى جداء دورات منفصلة. للوحداية، نلاحظ أن تحليل  $a = g_1 \dots g_m$  إلى جداء دورات منفصلة يجب أن يقابل تحليل  $\{1, \dots, n\}$  إلى مدارات (دورات مجهولة من الطول 1 و مدارات مؤلفة من عنصر واحد). يمكن أن نتجاهل الدورات التي طولها يساوي 1، نغير رتبة الدورات، و نغير كيفية كتابة كل دورة (باختيار عناصر ابتدائية مختلفة)، لكن هذا كل شيء لأن المدارات مرتبطة بـ  $a$ .  
مثلاً،

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} = (15)(27634)(8)$$

من الرتبة  $\text{lcm}(2,5)=10$ .

**نتيجة 26.4** كل تبديلة يمكن أن تكتب على شكل جداء مناقلات، وإن عدد المناقلات في هذا الجداء يكون إما زوجياً أو فردياً وذلك حسب  $a$  إن كانت زوجية أو فردية.

**البرهان.**

نأخذ الدورة

$$(i_1 \dots i_r) = (i_1 i_2) \dots (i_{r-2} i_{r-1}) (i_{r-1} i_r),$$

ومنه فإن الحالة الأولى تأتي من التمهيدية. لأن  $\text{sign}$  هو تشاكل و إشارة المناقلة -1،

$$\text{sign}(a) = (-1)^{\# \text{مناقلات}}.$$

نلاحظ بأن صيغة البرهان تبين بأن إشارة الدورة ذو الطول  $r$  هي  $(-1)^{r-1}$ ، إن  $r$  - دورة تكون زوجية أو فردية حسب  $r$  إن كان فردياً أو زوجياً.

من المحتمل أن نعرف تبديلة ما لتكون زوجية أو فردية كما في الجداء إن كان لعدد زوجي أو فردي من المناقلات، ولكن عندها يجب أن تراعي إحدى المناقلات الترتيب كما سبق لتبين بأن هذا المفهوم معرف جيداً.

نتص النتيجة على أن  $S_n$  مولدة بالمناقلات. أما بالنسبة لـ  $A_n$  فتوجد النتيجة الآتية.

**نتيجة 27.4** الزمرة المتناوبة  $A_n$  مولدة بدورات ذات الطول 3.

**البرهان.** أي  $a \in A_n$  هو جداء (من المحتمل أن يكون خالياً) لعدد زوجي من المناقلات،  $a = t_1 t'_1 \dots t_m t'_m$ ، ولكن جداء أي مناقلتين يمكن أن يكتب دائماً كجداء لـ 3- دورة:

$$(ij)(kl) = \begin{cases} (ij)(jl), & j = k \\ (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl), & \text{مختلفة } i, j, k, l \\ 1, & (ij) = (kl). \end{cases}$$

نتذكر بأنه يقال عن العنصرين  $a$  و  $b$  أنهما مترافقان  $a$   $b$  إذا كان يوجد عنصر  $g \in G$  بحيث  $b = gag^{-1}$ ، و أن الترافق هو علاقة تكافؤ. بالنسبة للزمرة  $G$ ، من المفيد أن نحدد صفوف الترافق في  $G$ .

**مثال 28.4** في  $S_n$ ، الدورات المترافقة مع الدورة تعطى بالعلاقة:

$$g(i_1 \dots i_k)g^{-1} = (g(i_1) \dots g(i_k)).$$

بالتالي  $g(i_1 \dots i_r) \dots (l_1 \dots l_u) g^{-1} = (g(i_1) \dots g(i_r)) \dots (g(l_1) \dots g(l_u))$  (حتى لو كانت الدورات ليست منفصلة، لأن الترافق عبارة عن تشاكل). بكلمات أخرى، لنحصل على  $ga g^{-1}$ ، نستبدل كل عنصر في كل دورة في  $a$  بصورته بالنسبة لـ  $g$ .

سوف نحدد الآن صفوف الترافق في  $S_n$ . بتجزئة (partition)  $n$ ، نعني بمتتالية من الأعداد الصحيحة  $n_1, \dots, n_k$  بحيث إن

$$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k \leq n$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

مثلاً، يوجد تماماً 5 تجزئات للعدد 4 وهي بالتحديد،

$$4 = 1+1+1+1, \quad 4 = 1+1+2, \quad 4 = 1+3, \quad 4 = 2+2, \quad 4 = 4$$

و 1,121,505 تجزئة للعدد 61. نلاحظ أن تجزئة

$$\{1, 2, \dots, n\} = O_1 \cup \dots \cup O_k \text{ (اجتماع منفصل)}$$

للمجموعة  $\{1, 2, \dots, n\}$  تحدد تجزئة للعدد  $n$ ،

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k, \quad n_i = |O_i|$$

بما أن مدارات عنصر  $a$  من  $S_n$  تشكل تجزئة للمجموعة  $\{1, 2, \dots, n\}$ ، يمكن أن نصل إلى كل عنصر مثل  $a$  بتجزئة  $n$ . مثلاً، تجزئة العدد 8 مرتبطة بـ  $(8)(27634)(15)$  وهي 1,2,5 و التجزئة المرتبطة بـ  $n$  ترتبط بـ

$$a = (i_1 \dots i_{n_1}) \dots (l_1 \dots l_{n_k}), \quad 1 < n_i \leq n_{i+1}, \text{ (دورات منفصلة)}$$

$$(n - \sum n_i) \text{ مرة} \quad 1, 1, \dots, 1, n_1, \dots, n_k \text{ وهي}$$

**قضية 29.4** يكون العنصران  $a$  و  $b$  مترافقان إذا وفقط إذا كانا يعرفان التجزئة نفسها لـ  $n$ .

**البرهان.**  $\Rightarrow$ : رأينا في (28.4) أن مرافق عنصر يحافظ على شكلها المحلل إلى دورات منفصلة.

$\Leftarrow$ : بما أن  $a$  و  $b$  يعرفان التجزئة نفسها لـ  $n$ ، لذلك فإن تحليلها إلى جداء دورات منفصلة له الشكل نفسه:

$$a = (i_1 \dots i_r) (j_1 \dots j_s) \dots (l_1 \dots l_u),$$

$$b = (i'_1 \dots i'_r) (j'_1 \dots j'_s) \dots (l'_1 \dots l'_u),$$

إذا عرفنا  $g$  بالشكل



$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r & j_1 \dots j_s & l_1 \dots l_u \\ i'_1 \dots i'_r & j'_1 \dots j'_s & l'_1 \dots l'_u \end{pmatrix}$$

عندئذٍ

$$g a g^{-1} = b$$

$$\text{مثال 30.4} \quad (i j k) = \begin{pmatrix} 1234 \dots \\ i j k 4 \dots \end{pmatrix} (123) \begin{pmatrix} 1234 \dots \\ i j k 4 \dots \end{pmatrix}^{-1}$$

**ملاحظة 31.4** لكل  $1 < k \leq n$ ، يوجد  $k - \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k}$  دورة مختلفة في  $S_n$ .  
نحتاج إلى  $\frac{1}{k}$  لذلك لا يمكن أن نحسب

$$(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_k i_1 \dots i_{k-1}) = \dots$$

$k$  مرة. بشكل مشابه، من المحتمل أن نحسب عدد العناصر في أي صف ترافق في  $S_n$ ، لكن نحتاج إلى القليل من الحرص عندما تحوي التجزئة على عدة حدود متساوية. مثلاً، إن عدد التبديلات في  $S_4$  من الشكل  $(ab)(cd)$  يساوي

$$\frac{1}{2} \left( \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 1}{2} \right) = 3$$

نحن بحاجة إلى العدد  $\frac{1}{2}$  لذلك لا يمكن أن نحسب  $(ab)(cd)$  مرتين. بالنسبة لـ  $S_4$  لدينا الجدول الآتي:

| النوع | لا يقع في صف التكافؤ | العنصر     | التجزئة |
|-------|----------------------|------------|---------|
| زوجي  | 1                    | 1          | 1+1+1+1 |
| فردى  | 6                    | $(ab)$     | 1+1+2   |
| زوجي  | 8                    | $(abc)$    | 1+3     |
| زوجي  | 3                    | $(ab)(cd)$ | 2+2     |
| فردى  | 6                    | $(abcd)$   | 4       |

نلاحظ بأن  $A_4$  تحوي على 3 عناصر فقط من الرتبة 2، وهي بالتحديد العناصر التي من الشكل 2+2، و أنها تشكل مع 1 زمرة جزئية  $V$ . هذه الزمرة هي اجتماع لصفوف الترافق، ولذلك فهي زمرة جزئية من  $S_4$ .

**مبرهنة 32.4 (Galois)** إن الزمرة  $A_n$  بسيطة لكل  $n \geq 5$ .

**ملاحظة 33.4** من أجل  $n = 2$ ، تكون  $A_n$  تافهة، ومن أجل  $n = 3$ ، تكون  $A_n$  زمرة دائرية من الرتبة 3، وبالتالي فهي بسيطة، من أجل  $n = 4$  فهي ليست تبديلية وليست بسيطة - تحوي على زمرة ناظرية، و مميزة، الزمرة الجزئية  $V$  (انظر 31.4).

**تمهيدية 34.4** لتكن  $N$  زمرة جزئية ناظرية في  $A_n$  ( $n \geq 5$ )، إذا كانت  $N$  تحوي على دور طوله 3، عندئذٍ فهي تحوي على كل الدورات التي طولها 3، ولذلك فهي تساوي  $A_n$  (من 27.4).

**البرهان.** لتكن  $g$  دورة طولها 3 في  $A_n$ ، ولتكن  $a$  دورة أخرى طولها 3 في  $A_n$ . نعلم من (29.4) بأن  $a = gg g^{-1}$  لبعض العناصر  $g \in S_n$ . إذا كان  $g \in A_n$ ، هذا يبين بأن  $a$  تنتمي أيضاً إلى  $N$ . إذا لم يكن كذلك، لأن  $n \geq 5$ ، توجد مناقلة  $t \in S_n$  منفصلة عن  $a$ . عندئذٍ  $tg \in A_n$  و

$$a = t a t^{-1} = t g g g^{-1} t^{-1},$$

و منه فإن  $a \in A_n$  ثانيةً.

التمهيدية الآتية تكمل برهان المبرهنة.

**تمهيدية 35.4** كل زمرة جزئية ناظرية  $N$  في  $A_n$ ،  $n \geq 5$ ،  $N \neq 1$ ، تحوي دورة طولها 3.

**البرهان.** لتكن  $a \in N$ ،  $a \neq 1$ . إذا لم يكن  $a$  عبارة عن 3-دورة، سنبنى عنصراً آخر  $a' \in N$ ،  $a' \neq 1$ ، بحيث تثبت عناصر  $\{1, 2, \dots, n\}$  أكثر مما تثبته  $a$ . إذا لم يكن  $a'$  عبارة عن 3-دورة، عندئذٍ يمكن أن نطبق البناء نفسه. بعد عدد منتهى من الخطوات، نصل إلى 3-دورة.

بفرض أن  $a$  ليست عبارة عن 3-دورة. عندئذٍ نعبّر عنها كجداء لدورات منفصلة، إما تحوي على دورة طولها  $3 \leq$  أو تكون على الأقل على شكل جداء مناقلات، نقول

$$(i) \quad a = (i_1 i_2 i_3 \dots) \dots$$

$$(ii) \quad a = (i_1 i_2)(i_3 i_4) \dots$$

في الحالة الأولى،  $a$  تحرك عددين، نقول بأنهما  $i_4, i_5$ ، ما عدا  $i_1, i_2, i_3$ ، لأن  $(i_1 i_2 i_3 \dots) \dots \in N$  لتكن  $a \neq (i_1 i_2 i_3), (i_1 \dots i_4)$   $a_1 = g a g^{-1} = (i_1 i_2 i_4 \dots) \dots$  <sup>def</sup> وهي مختلفة عن  $a$  (لأن تؤثر بشكل مختلف على  $i_2$ ). لهذا  $a_1^{-1} a \neq 1$  لكن  $a_1^{-1} a = g a g^{-1} a^{-1}$  <sup>def</sup>  $a'$  تثبت  $i_2$  و كل العناصر ما عدا  $i_1, \dots, i_5$  تكون مثبتة بـ  $a$  - ولذلك فهي تثبت عناصر أكثر من  $a$ .

في الحالة الثانية، نشكل  $g, a_1, a'$  كما في الحالة الأولى مع  $i_4$  كما في (ii) و  $i_5$  أي عنصر مختلف عن  $i_1, i_2, i_3, i_4$ . عندئذٍ  $a_1 = (i_1 i_2)(i_4 i_5) \dots$  تكون مختلفة عن  $a$  لأنها تؤثر بشكل مختلف على  $i_4$ . لهذا  $a' = a_1 a^{-1} \neq 1$ ، لكن  $a'$  يثبت  $i_1$  و  $i_2$ ، و كل العناصر  $i_1, \dots, i_5 \neq a$  لا تثبت من قبل  $a$  - ولذلك فهي تثبت عناصر أكثر من  $a$  بواحد على الأقل.

**نتيجة 36.4** من أجل  $n \geq 5$ ، إن الزمر الجزئية النظامية في  $S_n$  هي  $1, A_n$ ، و  $S_n$  فقط. **البرهان.** إذا كانت  $N$  نظامية في  $S_n$ ، عندئذٍ  $N \cap A_n$  نظامية في  $A_n$ . لذلك إما  $N \cap A_n = A_n$  أو  $N \cap A_n = \{1\}$ . في الحالة الأولى،  $N \supset A_n$ ، التي دليلها يساوي 2 في  $S_n$ ، ولذلك فإن  $N = A_n$  أو  $S_n$ . في الحالة الثانية، يكون التطبيق  $x A_n : N \rightarrow S_n / A_n$  غامراً، ومنه فإن  $N$  من الرتبة 1 أو 2، لكن لا يمكن أن تكون رتبته 2 لأنه لا يوجد صف ترافق في  $S_n$  (ما عدا  $\{1\}$ ) يتألف من عنصر واحد.

**37.4** يوجد وصف لصفوف الترافق في  $A_n$ ، التي من المحتمل أن تستنتج ببساطة من أجل  $n \geq 5$ .

**38.4** يقال عن الزمرة  $G$  أنها قابلة للحل إذا وجدت زمراً جزئية

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_{i-1} \supset G_i \supset \dots \supset G_r = \{1\}$$

بحيث تكون كل من  $G_i$  نظامية في  $G_{i-1}$  و كل زمرة قسمة  $G_{i-1}/G_i$  تكون تبديلية. لهذا فإن  $A_n$  (وأيضاً  $S_n$ ) ليست قابلة للحل إذا كان  $n \geq 5$ . ليكن  $x \in [x]$  من الدرجة  $n$ .

في نظرية جالوا، ترتبط بـ  $f$  زمرة جزئية  $G_f$  من زمر تبديلات جذور  $f$ ، ويبين بان جذور  $f$  يمكن الحصول عليها من معاملات  $f$  بالعمليات الجبرية من الجمع، الطرح، الضرب، القسمة، و الاستنتاج للجذر  $m$  إذا وفقط إذا كان  $G_f$  قابلاً للحل (نظرية غالوا). لكل  $n$ ، يوجد على الأقل كثيرة حدود  $f$  من الدرجة  $n$  بحيث  $G_f \approx S_n$  وبالتالي فإن (عندما  $n \geq 5$ ) الكثير من كثيرات الحدود تكون غير قابلة للحل بدلالة الجذور.

## خوارزمية Tood – Coxeter

لتكن  $G$  زمرة تمثل بشكل منته، ولتكن  $H$  زمرة جزئية مولدة بمجموعة . إن خوارزمية Tood- Coxeter<sup>15</sup> هي استراتيجية لكتابة فيما بعد مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة  $H$  في  $G$  مع تأثير  $G$  على المجموعة. لقد وضحتها مع مثال (من 6.9, 1991, Artin الذي يزودنا بتفاصيل أكثر، لكن نلاحظ بأنه يركب التبديلات في الاتجاه المعاكس لتركيبنا).

لتكن  $G = \langle a, b, c \mid a^3, b^2, c^2, cba \rangle$  و لتكن  $H$  زمرة جزئية مولدة بـ  $c$  (بكلام أدق،  $H$  زمرة جزئية مولدة بعنصر من  $G$  الممثلة بالكلمة المختزلة  $c$ ). تتصف عملية  $G$  على مجموعة المرافقات بتأثير المولدات، التي يمكن أن تحقق القوانين الآتية:

- (i) كل مولد  $(a, b, c$  في مثالنا) يؤثر كتبديلة.
- (ii) العلاقات  $(a^3, b^2, c^2, cba$  في مثالنا) تؤثر بشكل تافه.
- (iii) مولدات  $H$  ( $c$  في مثالنا) تثبت المرافقة  $1H$ .
- (iv) العملية على المرافقات متعدية.

إن الاستراتيجية المتبعة لاستنتاج المرافقات، يرمز لها  $1, 2, \dots$  حيث  $1H = 1$ ، يكون ضرورياً.

القانون (iii) يخبرنا ببساطة أن  $c1 = c$ . سنطبق الآن القانونين الأول و الثاني. بما أنه لا نعلم من هو  $a1$ ، لرمز بما يلي  $a1 = 2$ . و بشكل مشابه، ليكن  $a2 = 3$ . الآن  $a3 = a^3 1$ ، ومن (ii) يجب أن يساوي 1. لهذا، نكون قد استنتجنا المرافقات الثلاثة  $1, 2, 3$ ، التبديل وفق  $a$  كما يلي:

$$1 \overset{a}{a} \overset{a}{2} \overset{a}{a} 3 \overset{a}{a} 1.$$

ما هي  $b1$ ؟ لا نعلم، نستج بحذر مرافقة أخرى  $b1 = 4$ . الآن  $b4 = 1$  لأن  $b^2 = 1$ ، وبالتالي يكون لدينا

$$1 \overset{b}{a} \overset{b}{4} \overset{b}{a} 1.$$

بقي لدينا العلاقة  $cba$ . نعلم بأن  $a1 = 2$ ، لكن لا نعلم ما  $b2$ ، ومنه نضع  $b2 = 5$ :

<sup>15</sup> لحل المسألة، يجب أن تنتهي الخوارزمية دائماً في زمن منته مع الجواب صحيحاً المسألة. إن خوارزمية Tood – Coxeter لن تحل المسألة المحددة فيما إذا كان التمثيل المنتهي يعرف زمرة منتهية (في الحقيقة، لا توجد خوارزميات كهذه). إنها تقوم، على أي حال، بحل مسألة تحديد رتبة الزمرة المنتهية من التمثيل المنتهي للزمرة (نستخدم الخوارزمية مع  $H$  الزمرة الجزئية النافهة 1).

$$1 \overset{a}{a} \overset{b}{2} \overset{a}{5}$$

من (iii)  $c1=1$ ، و بتطبيق (ii) على  $cba$  يكون لدينا  $c5=1$ . لذلك، بالعودة إلى (i) سيكون لدينا  $5=1$ ،

نسقط 5، وبهذا يكون الآن  $b2=1$ . بما أن  $b4=1$  سيكون لدينا  $4=2$ ، ولذلك يمكننا أن نسقط 4 أيضاً.

يمكن أن نمثل ما عرفناه في القائمة الآتية:

| a | a | a | b | b | c | c | a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |   | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 |   | 3 |   | 3 | 1 | 2 |

الزاوية السفلية اليمنى، المطبقة من (ii)، تبين لنا بأن  $c2=3$ . وبالتالي يكون أيضاً  $c3=2$ ، وعندئذٍ يحدد هذا بقية القائمة:

| a | a | a | b | b | c | c | a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 |

نكون بذلك قد حصلنا على ثلاث مرافقات والتي يؤثر عليها  $a, b, c$  كما يلي

$$a = (123) \quad b = (12) \quad c = (23)$$

وبدقة أكثر، يمكننا أن نكتب فيما بعد التطبيق  $G \rightarrow S_3$  و المؤلف بالقرانين السابقة. من مبرهنة (Artin 1991, 9.10) التي تنص على أن هذا في الحقيقة يصف تأثير  $G$  على  $G/H$ . بما أن العناصر الثلاثة (123)، (12)، و (23) تولد  $S_3$ ، هذا يبين بأن تأثير  $G$  على  $G/H$  يؤدي إلى التماثل  $G \rightarrow S_3$ ، وإن  $H$  زمرة جزئية من الرتبة 2.

في Artin 1991, 6.9، اكتشف كيفية تحويل هذه الطريقة إلى خوارزمية بحيث، عندما تنجح في استخراج قائمة الثوابت، ستكون في الحقيقة قد استنتجت القائمة الصحيحة، هذه الخوارزمية منجزة في Maple، باستثناء تلك التي تحسب التأثيرات على المرافقات اليسارية. يوجد هنا نسخة عن ذلك:

```
>with (group) ; [loads the group theory package . ]
>G:=grelgroup ({a,b,c},{[a,a,a],[b,b],[c,c],[a,b,c]}) ; [defines G to have
generators a,b,c and relations aaa, bb, cc, abc]
>H:=subgrel ({x=[c]},G) ; [defines H to be the subgroup generated by c]
>permrep (H) ;
```

Permgrou (3, a=[[1,2,3],b=[1,2],c=[2,3]])  
[computes the action of G on the set of right cosets of H in G].

### التأثيرات الابتدائية (Primitive action)

لتكن  $G$  زمرة التأثير على المجموعة  $X$ ، وليكن  $p$  تجزئة لـ  $X$ . نقول بأن  $p$  مثبتة (stabilized)  $G$  إذا كان

$$A \in p \Rightarrow g A \in p$$

**مثال 39.4 (a)** الزمرة الجزئية  $G = \langle (1234) \rangle$  من  $S_4$  تثبت التجزئة  $\{\{1,3\}, \{2,4\}\}$  من  $\{1,2,3,4\}$ .

(b) نفرض أن  $X = \{1,2,3,4\}$  مع مجموعة رؤوس المربع على  $D_4$  التي تؤثر بالطريقة الاعتيادية، بالتحديد، مع  $r = (1234), s = (24)$ . عندئذٍ  $D_4$  يثبت التجزئة  $\{\{1,3\}, \{2,4\}\}$ .

(c) لتكن  $X$  مجموعة تجزئات  $\{1,2,3,4\}$  إلى مجموعتين، كل منهما مؤلف من عنصرين. عندئذٍ فإن  $S_4$  تؤثر على  $X$ ، و  $\text{Ker}(S_4 \rightarrow \text{Sym}(X))$  هي الزمرة الجزئية  $V$  المعرفة في (31.4).

إن الزمرة  $G$  تثبت دائماً التجزئات التافهة لـ  $X$ ، وبالتحديد، مجموعة كل المجموعات الجزئية في  $X$  والمؤلفة من عنصر واحد، و  $\{X\}$ . عندما نثبت فقط هذه التجزئات، نقول بأن التأثير ابتدائي (primitive)، وفي الحالة الأخرى يكون غير ابتدائي (primitive)، يقال بأن الزمرة الجزئية في  $\text{Sym}(X)$  (مثلاً، في  $S_n$ ) ابتدائية إذا أثرت بشكل ابتدائي على  $X$ . من الواضح، بأن  $S_n$  هي زمرة تأثير ابتدائية على نفسها، لكن المثال 39.4b يبين بأن  $D_4$ ، تعتبر كزمرة جزئية في  $S_4$  بالطريقة المبينة، ليس ابتدائياً.

**مثال 40.4** إن التأثير المتعدي المضاعف يكون ابتدائياً: إذا ثبت

$$\{\{x, x', \dots\}, \{y, \dots\} \dots\},$$

عندئذٍ لن يكون هناك عنصراً يرسل  $(x, x')$  إلى  $(x, y)$ .

**ملاحظة 41.4** إن  $G$  - مدار يشكل تجزئة لـ  $X$  التي تكون مثبتة بـ  $G$ . إذا كان التأثير ابتدائياً، عندئذٍ يجب أن تكون التجزئة إلى مدارات هي إحدى التجزئات التافهة. بالتالي إذا كان التأثير ابتدائياً  $\Leftarrow$  التأثير متعدي أو تافه ( $gx = x$  لكل  $g, x$ )

بالنسبة لباقي هذه التأثيرات، تكون  $G$  زمرة منتهية تؤثر على المجموعة  $X$  بشكل متعدٍ ومؤلفة من عنصرين على الأقل.

**قضية 42.4** تؤثر الزمرة  $G$  بشكل غير ابتدائي إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئية  $A$  من  $X$  ومؤلفة من عنصرين على الأقل بحيث يكون،

$$(18) \quad \text{لكل } g \in G, \text{ إما } gA = A \text{ أو } gA \cap A = f.$$

**البرهان.**  $\Leftarrow$  : إن التجزئة  $p$  المثبتة بالزمرة  $G$  تحتوي على مجموعة مثل  $A$ .

$\Rightarrow$  : من  $A$ ، يمكن أن تشكل تجزئة  $\{A, g_1A, g_2A, \dots\}$ ، المثبتة بـ  $G$ .

تسمى المجموعة الجزئية  $A$  من المجموعة  $X$  والتي تحقق العلاقة (18) بالخلية (block).

**قضية 4.43** لتكن  $A$  خلية في  $X$  مع  $|A| \geq 2$  و  $A \neq X$ . عندئذٍ لأي  $x \in A$ ،

$$\text{Stab}(x) \subsetneq \text{Stab}(A) \subsetneq G$$

**البرهان.** لدينا  $\text{Stab}(A) \supset \text{Stab}(x)$  لأن

$$gx = x \Rightarrow gA \cap A \neq f \Rightarrow gA = A$$

ليكن  $y \in A, y \neq x$ . بما أن  $G$  تؤثر بشكل متعدٍ على  $X$ ، يوجد  $g \in G$  بحيث يكون  $gx = y$ . عندئذٍ  $g \in \text{Stab}(A)$ ، لكن  $g \notin \text{Stab}(x)$ .

لتكن  $y \notin A$ . يوجد  $g \in G$  بحيث إن  $gx = y$ ، و عندئذٍ  $g \notin \text{Stab}(A)$ .

**مبرهنة 44.4** تؤثر الزمرة  $G$  بشكل ابتدائي على  $X$  إذا وفقط إذا كانت، من أجل عنصر واحد (وبالتالي للكل)  $x$  من  $X$ ،  $\text{Stab}(x)$  الزمرة الجزئية الأعظمية في  $G$ .

**البرهان.** إذا لم تؤثر  $G$  بشكل ابتدائي على  $X$ ، عندئذٍ (انظر 42.4) توجد الخلية  $A \subsetneq X$

والمؤلفة من عنصرين على الأقل، ومن (43.4) نبين بأن  $\text{Stab}(x)$  لن تكون أعظمية لأي  $x \in A$ .

العكس، بفرض أنه يوجد  $x$  من  $X$  وزمرة جزئية  $H$  بحيث يكون

$$\text{Stab}(x) \subsetneq H \subsetneq G$$

عندئذٍ ادعي بأن  $A = Hx$  خلية  $A \neq X$  مؤلفة من عنصرين على الأقل.

لأن  $H \neq \text{Stab}(x)$ ،  $Hx \neq \{x\}$ ، ومنه  $\{x\} \subsetneq A \subsetneq X$ .

إذا كان  $g \in H$ ، عندئذٍ  $gA = A$ . أما إذا كان  $g \notin H$ ، عندئذٍ  $gA$  تكون منفصلة عن  $A$ : لذلك نفرض  $ghx = h'x$  لبعض عناصر  $h' \in H$ ، عندئذٍ  $h'^{-1}gh \in \text{Stab}(x) \subset H$  ونقول بأن  $h'^{-1}gh = h''$  و  $g = h'h''h^{-1} \in H$ .

## تمارين

1-4 لتكن  $H_1$  و  $H_2$  زميرتين جزئيتين في الزمرة  $G$ . بين بأن تطبيقات  $G$  - مجموعة  $G/H_1 \rightarrow G/H_2$  تكون تطبيقات التقابل القانونية مع العناصر  $gH_2$  من  $G/H_2$  بحيث إن  $H_1 \subset gH_2g^{-1}$ .

2-4 (a) برهن بأن الزمرة المنتهية لا يمكن أن تساوي اجتماعاً لصفوف الترافق لزمر جزئية فعلية.

(b) أعط مثلاً عن مجموعة جزئية فعلية  $S$  من زمرة منتهية  $G$  بحيث يكون  $G = \bigcup_{g \in G} gsg^{-1}$ .

3-4 برهن أن أي زمرة غير تبديلية من الرتبة  $p^3$ ،  $p$  عدد أولي فردي، متماثلة مع إحدى الزمرتين المبينيتين في (3.13, 3.14).

4-4 ليكن  $p$  أصغر عدد أولي يقسم  $(G:1)$  (بفرضه منته). بين بأن أي زمرة جزئية في  $G$  دليلها  $p$  تكون ناظمية.

5-4 بين بأن أي زمرة من الرتبة  $2m$ ،  $m$  عدد فردي، تحتوي على زمرة جزئية دليلها 2. (باستخدام مبرهنة كايلي 1.21)

6-4 لتكن  $G = \text{GL}_3(F_2)$ .

(a) بين بأن  $(G:1) = 168$ .

(b) لتكن  $X$  مجموعة من المستقيمات المارة من مبدأ الإحداثيات لـ  $F_2^3$ ، بين بأن  $X$  تحوي على 7 عناصر، وأنه يوجد تشاكل متباين قانوني  $G \rightarrow \text{Sym}(X) = S_7$ .

(c) استخدم أشكال جوردان القانونية لتبين بأن  $G$  تحوي على ست صفوف ترافق، مع 1, 21, 42, 56, 24، و 24 عنصر على الترتيب. [نلاحظ بأنه إذا كانت  $M$  حرة

$F_2[a]$ -module من المرتبة واحد، عندئذٍ  $\text{End}_{F_2[a]}(M) = F_2[a]$ .

(d) استنتج بأن  $G$  بسيطة.



7-4 لتكن  $G$  زمرة. إذا كان  $\text{Aut}(G)$  دائرية، برهن بأن  $G$  تبديلية، وأنه، إذا كانت  $G$  منتهية، برهن بأن  $G$  دائرية.

8-4 بيّن بأن  $S_n$  مولدة بالعناصر  $(1n), \dots, (13), (12)$ ، و بالعناصر  $(n-1n), \dots, (23), (12)$  أيضاً.

4-9 لتكن  $K$  صف ترافق من زمرة منتهية  $G$  محتواة في زمرة جزئية ناظرية  $H$  في  $G$ . برهن أن  $K$  اجتماع لـ  $k$  صف ترافق بحجوم متساوية في  $H$ ، حيث  $(x) : H.C_G(x) = k$  لأي  $x \in K$ .

10-4 (a) ليكن  $s \in A_n$ . من التمرين 4-9 نعلم بأن صفوف الترافق لـ  $s$  في  $S_n$  إما تبقى صف ترافق واحد في  $A_n$  أو ينهي كاجتماع صفي ترافق لهما نفس الحجم. بيّن بأن الحالة الثانية محققة  $\Leftrightarrow s$  لا تتبادل مع أي تبديلة فردية  $\Leftrightarrow$  تعرف تجزئة  $n$  بـ  $s$  المؤلف من أعداد صحيحة فردية مختلفة.

(b) لكل صف ترافق  $K$  في  $A_7$ ، أعط شكل  $K$ ، وحدد  $|K|$ .

11-4 لتكن  $G$  زمرة مع المولدات  $a, b$  والعلاقات  $a^4 = 1 = b^2, aba = bab$ .

(a) (4 pts) استخدم خوارزمية Todd-Coxeter (مع  $H = 1$ ) لتعرف صورة  $G$  بالنسبة للتشاكل  $(G : 1) = S_n, n = G \rightarrow G$ ، المعطى بمبرهنة كايلي 1.11. [لا نحتاج إلى أن تتضمن كل الخطوات، سنعمل بشكل ملخص فقط].

(b) (1.pt) استخدم Maple لتأكد من إجابتك.

12-4 بيّن بأنه إذا كان تأثير  $G$  على  $X$  ابتدائياً وفعالاً، عندئذٍ تأثير أي زمرة جزئية ناظرية  $H \neq 1$  من  $G$  يكون متعدياً.

13-4 (a) تأكد من أن  $A_4$  تحوي على 8 عناصر من الرتبة 3، و 3 عناصر من الرتبة 2. وبالتالي لا يحوي أي عنصر من الرتبة 6.

(b) برهن بأن  $A_4$  لا تحوي على زمرة جزئية من الرتبة 6 (cf. 1.29). (استخدم 4.23).

(c) برهن بأن  $A_4$  هي الزمرة الجزئية الوحيدة من  $S_4$  من الرتبة 12.

14-4 لتكن  $G$  زمرة مع زمرة جزئية دليلها  $r$ . برهن أن

(a) إذا كانت  $G$  بسيطة، عندئذٍ  $(G : 1)$  يقسم  $r!$ .

(b) إذا كان  $r = 2, 3$ ، أو 4، عندئذٍ لا يمكن أن تكون  $G$  بسيطة.

(c) يوجد زمرة بسيطة غير تبديلية مع زمرة جزئية دليلها 5.

15-4 برهن أن  $S_n$  متماثلة مع زمرة جزئية من  $A_{n+2}$ .

16-4 لتكن  $H$  و  $K$  زميرتين جزئيتين من الزمرة  $G$ . إن المرافقة الثنائية الجانب لـ

$H$  و  $K$  في  $G$  هي مجموعة من الشكل

$$HaK = \{hak \mid h \in H, k \in K\}$$

لبعض من العناصر  $a \in G$ .

(a) بيّن بأن المرافقة الثنائية الجانب لـ  $H$  و  $K$  في  $G$  تشكل تجزئة للزمرة  $G$ .

(b) لتكن  $H \mathbf{I} aKa^{-1}$  تؤثر على  $H \times K$  بالشكل  $b(h, k) = (hb, a^{-1}b^{-1}ak)$ .

بيّن بأن مدارات هذا التأثير هي بالضبط تركيبات التطبيق

$$(h, k) \mathbf{a} hak : H \times K \rightarrow HaK.$$

(c) (يحسب عدد المرافقات الثنائية الجانب بالصيغة). باستخدام (b) بيّن بأن

$$|HaK| = \frac{|H| |K|}{|H \mathbf{I} aKa^{-1}|}$$

## الفصل الخامس

### مبرهنات سيلو؛ تطبيقات

### The Sylow Theorems; Application

في هذا الفصل، ستكون كل الزمر منتهية.

لنكن  $G$  زمرة وليكن  $p$  عدداً أولياً يقسم  $(G:1)$ . تدعى كل زمرة جزئية من  $G$  بـ  $p$ -زمرة سيلو الجزئية في  $G$  إذا كانت رتبته أكبر قوة للعدد  $p$  بحيث تقسم  $(G:1)$ . تنص مبرهنات سيلو على أنه يوجد  $p$ -زمر سيلو الجزئية لكل عدد أولي يقسم  $(G:1)$ ، بحيث تكون  $p$ -زمر سيلو الجزئية مترافقة بالنسبة للعدد المثبت  $p$ ، وأن كل  $p$ -زمرة جزئية في  $G$  محتواة في زمرة جزئية كهذه، على أي حال، تحدد المبرهنات عدد  $p$ -زمر سيلو الجزئية المحتملة في  $G$ .

### مبرهنات سيلو

في البراهين، نستخدم دائماً: إذا كان  $O$  مداراً للزمرة الجزئية  $H$  التي تؤثر على المجموعة  $X$ ، و  $x_0 \in O$ ، عندئذٍ من التطبيق  $h \mapsto hx_0$ ،  $h \in H$  ينتج التطبيق التقابل  $H/\text{Stab}(x_0) \rightarrow O$ ;

انظر (7.4). لذلك

$$(H : \text{Stab}(x_0)) = |O|$$

بشكل خاص، عندما تكون  $H$  -  $p$  زمرة،  $|O|$  قوى لعدد أولي  $p$ : فإن  $O$  يتألف من عنصر واحد، أو  $|O|$  تقبل القسمة على  $p$ . بما أن  $X$  اجتماع منفصل من المدارات، نستنتج:

**تمهيدية 1.5** لنكن  $H$  -  $p$  زمرة تؤثر على مجموعة منتهية  $X$ ، و لنكن  $X^H$  مجموعة النقاط المثبتة بـ  $H$ ، عندئذٍ

$$|X| \equiv |X^H| \pmod{p}$$

عندما تطبق التمهيدية على  $p$ -زمرة  $H$  تؤثر على نفسها بالترافق، نجد بأن

$$(Z(H):1) \equiv (H:1) \pmod{p}$$

وبالتالي

$$p \mid (Z(H):1). \text{ (انظر برهان 16.4).}$$

**مبرهنة 2.5** (سيلو 1) لتكن  $G$  زمرة منتهية، وليكن  $p$  عدداً أولياً. إذا كان  $(G:1) \mid p^r$ ، عندئذٍ فإن  $G$  تحوي على زمرة جزئية من الرتبة  $p^r$ .

**البرهان.** بالعودة إلى (17.4)، يكفي أن نبرهن أن  $p^r$  أكبر قوى  $p$  تقسم  $(G:1)$ ، ومن الآن فصاعداً سنفرض بأن  $(G:1) = p^r m$  حيث  $m$  لا تقبل القسمة على  $p$ .  
لتكن

$$X = \{ \text{مجموعة جزئية في } G \text{ مع العناصر } p^r \}$$

مع تأثير  $G$  المعرف بالشكل

$$G \times X \rightarrow X, (g, A) \mapsto gA \stackrel{\text{def}}{=} \{ga \mid a \in A\}$$

لأي  $a_0 \in A, h \in A$  يكون غامراً (قانون الاختزال)، ولذلك  $(H:1) \leq A = p^r$  في المعادلة

$(G:1) = p^r m, (H:1) \leq p^r$ ، وأن  $(G:H)$  عدد العناصر في مدار  $A$ . إذا أمكننا إيجاد  $A$  بحيث لا يقسم  $p$  عدد العناصر في مداره، عندئذٍ يمكن أن نستنتج بأن (بالنسبة إلى مجموعة مثل  $A$ )،  $H = \text{Stab } A$  من الرتبة  $p^r$ .

إن عدد العناصر في  $X$  هي

$$|X| = \binom{p^r m}{p^r} = \frac{(p^r m)(p^r m - 1) \dots (p^r m - i) \dots (p^r m - p^r + 1)}{p^r (p^r - 1) \dots (p^r - i) \dots (p^r - p^r + 1)}$$

نلاحظ بأن، ولأن  $i < p^r$ ، قوى  $p$  التي تقسم  $p^r m - i$  هي قوى  $p$  التي تقسم  $i$ . نفس الحالة تكون صحيحة من أجل  $p^r - i$ . لذلك الحدود المتقابلة في الأعلى والأسفل قابلة للقسمة على القوى نفسها لـ  $p$ ، وبهذا  $p$  لا يقسم  $|X|$ . لأن المدار يشكل تجزئة لـ  $X$ ،

$$|X| = \sum |O_i|, \text{ مدارات مختلفة } O_i$$

ومنه فإن أحد  $|O_i|$  على الأقل لا يقبل القسمة على  $p$ .

**مثال 3.5** ليكن  $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ، الحقل مع  $p$  عنصر، وليكن  $G = \text{GL}_n(F_p)$ . المصفوفات من النوع  $n \times n$  في  $G$ ، وهي بدقة أكثر تلك التي تأخذ عناصر أعمدها من قاعدة  $F_p^n$ . لهذا، يمكن أن يكون العمود الأول أي متجه غير معدوم في  $F_p^n$ ، يوجد  $p^n - 1$

منها، يمكن أن يكون العمود الثاني أي متجه لا يقع في مجال المتجه الأول، يوجد  $p^n - p$  منها، وهكذا. لذلك، إن رتبة  $G$  تساوي

$$(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{n-1})$$

وبالتالي فإن قوى  $p$  التي تقسم  $(G:1)$  هي  $p^{1+2+\dots+(n-1)}$ . نعتبر المصفوفات من الشكل

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \mathbf{L} & * \\ 0 & 1 & \mathbf{L} & * \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & * \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & 1 \end{pmatrix}$$

إنها تشكل زمرة جزئية  $U$  من الرتبة  $p^{n-1} p^{n-2} \dots p$ ، التي تكون  $p$  - زمرة سيلو الجزئية  $G$ .

**ملاحظة 4.5** تعطي المبرهنة برهاناً آخر لمبرهنة كوشي (13.4). إذا كان  $p$  عدداً أولياً يقسم  $(G:1)$ ، عندئذٍ ستحتوي  $G$  على زمرة جزئية  $H$  من الرتبة  $p$ ، و أي  $g \in H, g \neq 1$  هو عنصر من  $G$  من الرتبة  $p$ .

**ملاحظة 5.5** يمكن تعديل برهان المبرهنة 5.2 ليظهر بشكل مباشر بأن يكون لكل قوة  $p^r$  للعدد  $p$  التي تقسم  $(G:1)$  توجد زمرة جزئية  $H$  في  $G$  من الرتبة  $p^r$ . مرة أخرى نكتب  $(G:1) = p^r m$  و نعتبر المجموعة  $X$  المؤلفة من جميع المجموعات الجزئية من الرتبة  $p^r$ . في هذه الحالة،  $p^{r0}$  أكبر قوة للعدد  $p$  والقاسم لـ  $|X|$  هو أكبر قوى  $p$  يقسم  $m$ ، وبالتالي يوجد مدار في  $X$  بحيث تكون رتبته لا تقبل القسمة على  $p^{r0+1}$ . من أجل  $A$  في ذلك المدار، يبين الحساب نفسه بأن  $\text{Stab}(A)$  يحوي  $p^r$  عنصر. ننصح القارئ بأن يكتب التفاصيل.

**مبرهنة 6.5 (سيلو II)** لتكن  $G$  زمرة منتهية، ولتكن  $|G| = p^r m$  حيث  $m$  لا تقبل القسمة على  $p$ .

(a) أي  $p$  - زمرة سيلو جزئيتين تكونان مترافقتين.

(b) ليكن  $s_p$  عدد  $p$  - زمر سيلو الجزئية في  $G$ ، عندئذٍ  $s_p \equiv 1 \pmod{p}$  و  $s_p \mid m$ .

(c) كل  $p$  - زمرة جزئية تكون محتواة في  $p$  - زمرة سيلو الجزئية.

لتكن  $H$  زمرة جزئية في  $G$ . نتذكر من (4.6, 4.8) بأن منظم  $H$  في  $G$  هو

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\},$$

و إن عدد مرافقات  $H$  في  $G$  هو  $(G:N_G(H))$ .

**تمهيدية 7.5** لتكن  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في  $G$ ، ولتكن  $H$  - زمرة جزئية. إذا كان  $H$  منظم  $P$ ، أي أن، إذا كان  $H \subset N_G(P)$ ، عندئذٍ  $H \subset P$ . وبشكل خاص، لا توجد  $P$  - زمرة سيلو جزئية في  $G$  تنظم  $P$  غير الزمرة  $P$ .

**البرهان.** بما أن  $P$  و  $H$  زمرتان جزئيتان من  $N_G(P)$  و  $P$  ناظرية في  $N_G(P)$ ، يكون  $HP$  زمرة جزئية، و  $HP/P \cong H/H \cap P$  (بتطبيق 1.45). لذلك فإن  $(HP:P)$  قوة للعدد  $p$  (حيث إننا نستخدم هنا  $H$  - زمرة)، لكن

$$(HP:1) = (HP:P)(P:1),$$

و  $(P:1)$  هي أكبر قوة لـ  $p$  تقسم  $(G:1)$ ، وبالتالي ستكون أكبر قوة تقسم  $(HP:1)$ ، لهذا  $(HP:P) = p^0 = 1$ ، و  $H \subset P$ .

**برهان (سيلو II) (a)** لتكن  $X$  مجموعة  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في  $G$ ، ولتكن  $G$  تؤثر على  $X$  بالترافق،

$$(g, P) \mapsto gPg^{-1}: G \times X \rightarrow X$$

ليكن  $O$  أحد مدارات  $G$  - مدار: علينا أن نبرهن بأن  $O$  هو كل  $X$ .  
لتكن  $P \in O$ ، وليكن  $P$  يؤثر على  $O$  من خلال تأثير  $G$ . إن هذه  $G$  - مدار واحدة من الممكن أن تتجزأ إلى العديد من  $P$  - مدار، إحداها ستكون  $\{P\}$ . في الحقيقة إن هذا المدار المؤلف من نقطة واحدة هو المدار الوحيد لأن

$$P \text{ ينظم } Q \Leftrightarrow \{Q\} \text{ هو } P - \text{مدار}$$

حيث نعلم بأن (7.5) تحققت فقط عندما  $Q = P$ . وبالتالي فإن عدد العناصر في كل  $P$  - مدار باستثناء  $\{P\}$  قابل للقسمة على  $p$ ، و يكون لدينا  $|O| \equiv 1 \pmod{p}$ .

بفرض أنه يوجد  $P \notin O$ . وليكن  $P$  يؤثر على  $O$  مرة أخرى، لكن هذه المرة المناقشة ستبين بأنه لا يوجد مدارات مؤلفة من نقطة واحدة، ولذلك فإن عدد العناصر في كل  $P$  - مدار يقبل القسمة على  $p$ . وبالتالي ينتج بأنه  $O \neq \{P\}$  قابل للقسمة على  $p$ ، الذي يناقض ما برهن في الفقرة الأخيرة. لا يمكن أن يوجد كالزمرة  $P$ ، ولذلك فإن  $O$  هي كل  $X$ .

(b) بما أن  $s_p$  هو الآن عدد العناصر في  $O$ ، يمكن أن نبين أيضاً بأن  $s_p \equiv 1 \pmod{p}$ .  
ليكن  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في  $G$ . بالعودة إلى (a)، يكون  $s_p$  عدد مرافقات  $P$ ، و التي تساوي

$$(G:N_G(P)) = \frac{(G:1)}{(N_G(P):1)} = \frac{(G:1)}{(N_G(P):P)(P:1)} = \frac{m}{(N_G(P):P)}$$

هذا تحليل  $m$ .

(c) لتكن  $H$  - زمرة جزئية في  $G$ ، و لتكن  $H$  تؤثر على المجموعة  $X$  المؤلفة من  $p$  - زمرة سيلو الجزئية بالترافق. لأن  $|X| = s_p$  لا تقبل القسمة على  $p$ ، يجب أن تكون  $X^H$  غير خالية (التمهيدية 1.5)، أي أن، أحد  $H$  - مدار على الأقل يتألف من  $p$  - زمرة سيلو جزئية واحدة. لكن عندئذٍ  $H$  تنظم  $P$  ومن التمهيدية 7.5 ينتج بأن  $H \subset P$ .  
**نتيجة 8.5** تكون  $p$  - زمرة سيلو الجزئية ناظمية إذا وفقط إذا كانت  $p$  - زمرة سيلو الجزئية الوحيدة.

**البرهان.** لتكن  $p$  - زمرة سيلو الجزئية  $P$  في  $G$ . إذا كانت  $P$  ناظمية، عندئذٍ (a) من سيلو II ينتج بأن  $p$  - زمرة سيلو الجزئية الوحيدة. الحالة المعاكسة تنتج من (6.3c) (حيث تبين، في الحقيقة، بأن  $P$  مميزة أيضاً).

**نتيجة 9.5** بفرض أن  $G$  زمرة تحوي فقط على  $p$  - زمرة سيلو جزئية لكل عدد أولي يقسم رتبته. عندئذٍ فإن  $G$  جداء مباشر لـ  $p$  - زمرة سيلو الجزئية.  
**البرهان.** لتكن  $P_1, \dots, P_k$  زمرة سيلو الجزئية في  $G$ ، ولتكن  $|P_i| = p_i^{r_i}$ ، أعداد أولية مختلفة. لأن كل من  $P_i$  تكون ناظمية في  $G$ ، يكون الجداء  $P_1 \dots P_k$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$ . سنبرهن بالاستقراء على  $k$  بأنها من الرتبة  $p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ . إذا كان  $k = 1$ ، عندها لا يوجد شيء لبرهانه، ولذلك يمكن أن نفرض بأن  $k \geq 2$  وأن  $P_1 \dots P_{k-1}$  من الرتبة  $p_1^{r_1} \dots p_{k-1}^{r_{k-1}}$ . عندئذٍ  $P_1 \dots P_{k-1} \mathbf{I} P_k = 1$  (50.1) لأن  $(P_1 \dots P_{k-1}) P_k$  هو جداء مباشر للزمرتين  $P_1 \dots P_{k-1}$  و  $P_k$ ، وبالتالي فهي من الرتبة  $p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ . بتطبيق الآن (51.1) على كامل مجموعة زمرة سيلو الجزئية في  $G$  يتبين بأن  $G$  هي جداؤها المباشر.

**مثال 10.5** لتكن  $G = GL(V)$  حيث  $V$  فضاء متجهي من البعد  $n$  على  $F_p$ . يوجد وصف هندسي لزمرة سيلو الجزئية في  $G$ . إن المعلم التام (full flag)  $F$  في  $V$  هو متتالية من الفضاءات الجزئية

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_i \supset \dots \supset V_1 \supset \{0\}$$

حيث  $\dim(V_i) = i$ . بإعطاء مثل المعلم  $F$ ، لتكن  $U(F)$  مجموعة كل التطبيقات الخطية  $V \rightarrow V$  بحيث إن  $a(V_i) \subset V_i$  لكل  $i$ ، و  
 (b) التشاكلات الذاتية على  $V_i/V_{i-1}$  تنتج التطبيق المحايد بالنسبة لـ  $a$ .

أدعي بأن  $U(F)$  - زمرة سيلو الجزئية في  $G$ . يمكن أن نبني القاعدة  $\{e_1, \dots, e_n\}$  لـ  $V$  بحيث  $\{e_1\}$  قاعدة  $V_1$ ،  $\{e_1, e_2\}$  قاعدة  $V_2$ ، وهكذا. بالنسبة لهذه القواعد، إن مصفوفات عناصر  $U(F)$  هي بالضبط عناصر الزمرة  $U$  في (5.3).

لتكن  $g \in GL_n(F)$ .  $gF \stackrel{def}{=} \{gV_n, gV_{n-1}, \dots\}$  هو معلم تام أيضاً، وليكن  $U(gF) = gU(F).g^{-1}$ . من (a) في سيلو II، نرى بأن  $p$  - زمرة سيلو الجزئية في  $G$ . هي وبدقة زمرة من الشكل  $U(F)$  لبعض من المعلم التام  $F$ .

**11.5** نستخدم بعض الكتب ترقيمات مختلفة لزمرة سيلو. لقد اعتمدت على الترقيمات الأصلية (سيلو 1872) بشكل أساسي.

### التقريبات البديلة لمبرهنات سيلو

ننسى بأننا برهنا على مبرهنات سيلو.

**مبرهنة 12.5** لتكن  $G$  زمرة، ولتكن  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في  $G$ . لكل زمرة جزئية  $H$  في  $G$ ، يوجد  $a \in G$  بحيث يكون  $H \mathbf{I} aPa^{-1}$  - زمرة سيلو الجزئية في  $H$ . **البرهان.** نتذكر من (من التمرين 4-16) بأن  $G$  عبارة عن اجتماع منفصل لمرافقات ثنائية الجانب لـ  $H$  و  $P$ . ولذلك

$$|G| = \sum_a |H_a P| = \sum_a \frac{|H| |P|}{|H \mathbf{I} aPa^{-1}|}$$

بحيث يكون المجموع على مجموعة ممثلات المرافقات الثنائية الجانب. بالقسمة على  $|P|$  نجد بأن

$$\frac{|G|}{|P|} = \sum_a \frac{|H|}{|H \mathbf{I} aPa^{-1}|}$$

و لذلك يوجد  $a$  بحيث يكون  $(H : H \mathbf{I} aPa^{-1})$  لا تقبل القسمة على  $p$ . من أجل عنصر مثل  $a$ ، تكون  $H \mathbf{I} aPa^{-1}$  - زمرة سيلو الجزئية في  $G$ . **برهان (سيلو I)** من مبرهنة كايلى (21.1)، تكون  $G$  مغمورة في  $S_n$ ، و  $S_n$  مغمورة في  $GL_n(F_p)$  (انظر 1.7). كما أن  $GL_n(F_p)$  يحوي على  $p$  - زمرة سيلو الجزئية (انظر 5.3)، وكذلك أيضاً  $G$ .

**برهان (سيلو II(a,c))** لتكن  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في  $G$ ، ولتكن  $P'$  - زمرة سيلو الجزئية الوحيدة في  $G$  عندئذٍ  $P'$  تكون  $p$  - زمرة سيلو الوحيدة من  $P'$ ، ولذلك فإن



المبرهنة تبين بأن  $aPa^{-1} \supset P'$  لبعض  $a$  حيث  $H = P'$ . وهذا ينتج (a) و (c) من سيلو II.

### أمثلة

نطبق ما تعلمناه لنحصل على معلومات جديدة عن الزمر برتب مختلفة.

**13.5** (الزمر من الرتبة 99) لتكن  $G$  من الرتبة 99. من مبرهنات سيلو نستنتج بأن  $G$  تحوي على زمرة جزئية واحدة  $H$  على الأقل من الرتبة 11، وفي الحقيقة  $s_{11} \mid \frac{99}{11}$  و  $s_{11} \equiv 1 \pmod{11}$  و بالتالي فإن  $s_{11} = 1$ ، و  $H$  ناظرية. بشكل مشابه،  $s_3 \mid 9$  و  $s_3 \equiv 1 \pmod{3}$ ، ومنه 3- زمرة سيلو الجزئية تكون أيضاً ناظرية. وبالتالي فإن  $G$  متماثلة مع الجداء المباشر لـ  $p$  - زمر سيلو الجزئية لها (9.5)، والتي كل منهما تبديلية (18.4)، ومنه فإن  $G$  تبديلية.

هنا برهان بديل. نثبت كما سبق بأن 11- زمرة سيلو الجزئية  $N$  في  $G$  تكون ناظرية. إن 3- زمرة سيلو الجزئية  $Q$  عبارة عن تطبيقات تقابل على  $G/N$ ، و بالتالي  $G = N \times Q$ . بقي أن نحدد تأثير  $Q$  على  $N$  بالترافق. لكن  $\text{Aut}(N)$  دائرية من الرتبة 10 (انظر 3.4)، و بهذا يوجد تشاكل تافه واحد فقط  $Q \rightarrow \text{Aut}(N)$ . وبالتالي فإن  $G$  جداء مباشر لـ  $N$  و  $Q$ .

**14.5** (الزمر من الرتب  $pq$ ،  $p$ ،  $q$  أعداد أولية،  $p < q$ ) لتكن الزمرة  $G$ ، و لتكن  $P$  و  $Q$   $p$  - زمر سيلو الجزئية و  $q$  - زمر سيلو الجزئية. عندئذ  $(G:Q) = p$  الذي يكون أصغر عدد أولي يقسم  $(G:1)$ ، ومنه (انظر التمرين 4-4) فإن  $Q$  ناظرية. لأن  $P$  تطبيق تقابل على  $G/Q$ ، ويكون لدينا

$$G = Q \times_q P,$$

وبقي أن نحدد تأثير  $P$  على  $Q$  بالترافق.

إن الزمرة  $\text{Aut}(Q)$  دائرية من الرتبة  $q-1$  (انظر 3.4)، ومنه، باستثناء  $p \mid q-1$ ،  $G = Q \times P$ .

إذا كان  $p \mid q-1$ ، عندئذ فإن  $\text{Aut}(Q)$  (كونها دائرية) تحوي على زمرة جزئية وحيدة  $P'$  من الرتبة  $p$ . في الحقيقة تتألف  $P'$  من التطبيقات

$$x \mapsto a x^i, \{i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \mid i^p = 1\}$$

لتكن  $a$  و  $b$  مولدات للزمرتين  $P$  و  $Q$  على الترتيب، وبفرض أن تأثير  $a$  على  $Q$  بالترافق هو  $i_0, i_0 \neq 1, x \mathbf{a} x^{i_0}$  (في  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ). عندئذٍ فإن للزمرة  $G$  المولدة  $a$  و  $b$  والعلاقات

$$a^p, b^q, aba^{-1} = b^{i_0}$$

باختيار  $i_0$  مختلف يتوافق مع اختيار مولد مختلف  $a$  لـ  $P$ ، وبالتالي يعطي زمرة متماثلة مع  $G$ .

والخلاصة: إذا كان  $p$  لا تقسم  $q-1$ ، عندئذٍ فإن الزمرة الوحيدة من الرتبة  $pq$  هي الزمرة الدائرية  $C_{pq}$ ، إذا كان  $p \mid q-1$ ، عندئذٍ توجد أيضاً زمرة غير تبديلية تعطى بالمولدات والعلاقات كما سبق.

**15.5** (الزمر من الرتبة 30) لتكن  $G$  زمرة من الرتبة 30. عندئذٍ

$$s_3 = 1, 4, 7, 10, \dots \text{ وتقسم } 10,$$

$$s_5 = 1, 6, 11, \dots \text{ وتقسم } 6.$$

وبالتالي  $s_3 = 1$  أو  $10$ ، و  $s_5 = 1$  أو  $6$ . في الحقيقة، أحدها يساوي 1 على الأقل، ومن جهة أخرى نكون قد أوجدنا 20 عنصراً من الرتبة 3 و 24 عنصراً من الرتبة 5، والذي يكون مستحيلًا. لذلك، 3 - زمرة سيلو الجزئية  $P$  أو 5 - زمرة سيلو الجزئية  $Q$  تكون ناظرية، ومنه  $H = PQ$  زمرة جزئية في  $G$ . لأن 3 لا يقسم  $5-1=4$ ، تبين (5.14) بأن  $H$  تبديلية،  $H \approx C_3 \times C_5$ . وبالتالي

$$G = (C_3 \times C_5) \rtimes_q C_2,$$

وبقي أن نحدد التشاكلات المحتملة  $q: C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_3 \times C_5)$ . لكن التشاكل  $q$  يكون محدداً بصورة العنصر الذي لا يساوي المحايد في  $C_2$ ، والذي يجب أن يكون عنصراً من الرتبة 2. لتكن  $a, b, c$  تولد  $C_3, C_5, C_2$ . عندئذٍ

$$\text{Aut}(C_3 \times C_5) = \text{Aut}(C_3) \times \text{Aut}(C_5),$$

و عناصر  $\text{Aut}(C_3)$  و  $\text{Aut}(C_5)$  من الرتبة 2 هي فقط  $a \mathbf{a} a^{-1}$  و  $b \mathbf{a} b^{-1}$ . لهذا يوجد بالضبط 4 تشاكلات  $q$ ، و  $q(c)$  هو أحد العناصر الآتية:

$$\begin{pmatrix} a \mathbf{a} a \\ b \mathbf{a} b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \mathbf{a} a \\ b \mathbf{a} b^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \mathbf{a} a^{-1} \\ b \mathbf{a} b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \mathbf{a} a^{-1} \\ b \mathbf{a} b^{-1} \end{pmatrix}$$

و الزمر المقابلة لهذه التشاكلات لها مراكز من الرتبة 30، 3 (مولدة بـ  $a$ )، 5 (مولدة بـ  $b$ )، و 1 على الترتيب، وبالتالي تكون غير متماثلة. علينا أن نبين بأنه (تحت سقف التماثل)

يوجد بالضبط 4 زمر من الرتبة 30. مثلاً، الزمرة الثالثة في قائمتنا لها المولدات  $a, b, c$  و العلاقات

$$a^3, b^5, c^2, ab=ba, cac^{-1}=a^{-1}, cbc^{-1}=b$$

**16.5** (الزمر من الرتبة 12) لتكن  $G$  زمرة من الرتبة 12، ولتكن  $P$  3- زمرة سيلو الجزئية لها. إذا كانت  $P$  ناظرية، عندئذ لا تحوي  $P$  على زمرة جزئية ناظرية غير تافهة في  $G$ ، ومنه التطبيق (4.2)، التأثير على المرافقات اليسارية)

$$j: G \rightarrow \text{Sym}(G/P) \approx S_4$$

متباين، وصورته عبارة عن زمرة جزئية من  $S_4$  من الرتبة 12. من سيلو II نرى بأن  $G$  تحوي على 4 من 3- زمرة سيلو الجزئية، وبالتالي تحوي بالضبط على 8 عناصر من الرتبة 3. لكن جميع عناصر  $S_4$  التي تكون من الرتبة 3 محتواة في  $A_4$  (انظر إلى الجدول في (4.31)، ومنه فإن  $j(G)$  تتقاطع مع  $A_4$  بزمرة جزئية تحوي على الأقل على 8 عناصر. من مبرهنة لاغرانج نجد  $j(G) = A_4$ ، ومنه  $G \approx A_4$ .

نفرض الآن بأن  $P$  ناظرية. عندئذ  $G = P \times Q$  حيث  $Q$  4- زمرة سيلو الجزئية. إذا كانت  $Q$  دائرية من الرتبة 4، عندئذ يوجد تطبيق وحيد غير تافه  $Q (= C_4) \rightarrow \text{Aut}(P) (= C_2)$ ، وبالتالي نحصل على زمرة غير تبديلية وحيدة  $C_3 \times C_4$ . إذا كان  $Q = C_2 \times C_2$ ، يوجد تماماً 3 تشاكلات غير تافهة  $Q \rightarrow \text{Aut}(P)$ ، لكن ثلاثاً من الزمر الناتجة تكون متماثلة مع  $S_3 \times C_2$  —  $C_2 = \text{Ker } q$ . (التشاكلات تختلف بالتماثلات الذاتية لـ  $Q$ ، وبالتالي يمكن أن نطبق أيضاً التمهيدية (17.3).

وبالتالي، توجد 3 زمر غير تبديلية من الرتبة 12 و زمريتان تبديليتان.

**17.5** (الزمر من الرتبة  $p^3$ ) لتكن  $G$  زمرة من الرتبة  $p^3$ ،  $p$  عدد أولي فردي، ولنفرض بأن  $G$  غير تبديلية. نعلم من (17.4) بأن  $G$  تحوي على زمرة جزئية ناظرية  $N$  من الرتبة  $p^2$ .

إذا كان كل عنصر في  $G$  من الرتبة  $p$  (ما عدا 1)، عندئذ  $N \approx C_p \times C_p$  و يوجد زمرة جزئية  $Q$  في  $G$  من الرتبة  $p$  بحيث يكون  $Q \cap N = \{1\}$ . بالتالي

$$G = N \rtimes Q$$

بالنسبة لبعض التشاكلات  $q: Q \rightarrow \text{Aut}(N) \approx \text{GL}_2(F_p)$ . إن رتبة  $(p^2 - 1)(p^2 - p)$  (انظر (3.5)، وبالتالي فإن  $p$  - زمرة سيلو الجزئية فيها من الرتبة

$p$  . من مبرهنات سيلو، تكون مترافقة، ومن التمهيدية 18.3 نرى بأنه يوجد بالضبط زمرة غير تبديلية واحدة في هذه الحالة.

بفرض أن  $G$  تحوي على عنصر من الرتبة  $p^2$ ، ولتكن  $N$  زمرة جزئية مولدة بعنصر مثل  $a$ ، لأن  $(G : N) = p$  أصغر (والوحيد) عدد أولي يقسم  $(G : 1)$ ،  $N$  ناظمية في  $G$  (التمرين 4-4). نبين فيما بعد بأن  $G$  تحوي على عنصر من الرتبة  $p$  ولا ينتمي إلى  $N$ .

نعلم بأن  $Z(G) \neq 1$ ، ولأن  $G$  غير تبديلية،  $G/Z(G)$  ليست دائرية (4.19). لذلك  $(Z(G) : 1) = p$  و  $G/Z(G) \approx C_p \times C_p$ . بشكل خاص، نرى بأنه لكل  $x \in G$ ،  $x^p \in Z(G)$ . لأن  $G/Z(G)$  تبديلية، يكون المبادل لأي زوج من عناصر  $G$  ينتمي إلى  $Z(G)$ ، و بتطبيق الفرض الاستقرائي البسيط نرى بأن

$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}}, n \geq 1$$

لذلك يكون  $(xy)^p = x^p y^p$ ، ومنه  $x \mapsto x^p : G \rightarrow G$  تشاكل . صورته محتواة في  $Z(G)$ ، وبالتالي فإن نواته من الرتبة  $p^2$  على الأقل. بما أن  $N$  تحتوي فقط على  $p-1$  عنصر من الرتبة  $p$ ، نرى بأنه يوجد عنصر  $b$  من الرتبة  $p$  خارج  $N$ . بالتالي  $G = \langle a \rangle \times_q \langle b \rangle \approx C_{p^2} \times_q C_p$ ، وبقي أن نبرهن بملاحظة (3.18) بأن التشاكلات غير التافهة  $C_p \rightarrow \text{Aut}(C_{p^2}) \approx C_p \times C_{p-1}$  تعطي زمراً متماثلة.

لهذا، تحت سقف التماثل، إن الزمر غير التبديلية الوحيدة من الرتبة  $p^3$  هي تلك الزمر في (13.3, 14.3).

**18.5** (الزمر من الرتب  $2p^n$ ،  $4p^n$ ، و  $8p^n$ ،  $p$  فردي) لتكن  $G$  زمرة من الرتبة  $2^m p^n$ ،  $1 \leq m \leq 3$ ،  $p$  عدد أولي فردي،  $1 \leq n$ . سنرى بأن  $G$  ليست بسيطة. لتكن  $P = p$  - زمرة سيلو الجزئية ولتكن  $N = N_G(P)$ ، ومنه  $s_p = (G : N)$ . من سيلو II، نرى بأن  $s_p = 1, p+1, 2p+1, \dots$  إذا كان  $s_p = 1$ ، تكون  $P$  ناظمية. إذا لم يكن كذلك، عندها توجد حالتان:

$$(i) \quad s_p = 4 \quad \text{و} \quad p = 3$$

$$(ii) \quad s_p = 8 \quad \text{و} \quad p = 7.$$

في الحالة الأولى، التأثير بالترافق للزمرة  $G$  على مجموعة 3-زمر سيلو الجزئية<sup>16</sup> تعرف التشاكل  $G \rightarrow S_4$ ، الذي، إذا كانت  $G$  بسيطة، يجب أن يكون متبايناً. لذلك  $4! \mid (G:1)$ ، ومنه  $n=1$ ، لدينا  $3 \cdot 2^m = (G:1)$ . الآن إن دليل 2-زمر سيلو الجزئية يساوي 3، ومنه نحصل على التشاكل  $G \rightarrow S_3$ . نواته عبارة عن زمرة جزئية ناظمية غير تافهة في  $G$ .

في الحالة الثانية، النقاش نفسه يبين بأن  $8! \mid (G:1)$ ، وبالتالي  $n=1$  أيضاً. لهذا  $(G:1)=56$  و  $s_7=8$ . لذلك فإن  $G$  تحوي على 48 عنصراً من الرتبة 7، وبالتالي يمكن أن توجد 2-زمرة سيلو الجزئية واحدة فقط، والتي تكون ناظمية. نلاحظ أن الزمر من الرتب  $pq^r$ ،  $p$ ،  $q$  عدداً أوليان،  $p < q$  ليست بسيطة، لأن التمرين 4-4 يبين بأن  $p$  - زمر سيلو الجزئية ناظمية. لتفحص هذه الحالات نبين بأن  $A_5$  أصغر زمرة بسيطة غير دائرية.

**19.5** (الزمر من الرتبة 60) لنكن  $G$  زمرة بسيطة من الرتبة 60. سنبين الآن بأن  $G$  متماثلة مع  $A_5$ .

نلاحظ بأن، ولأن  $G$  بسيطة،  $s_2=3,5$  أو 15. إذا كانت  $P$  2-زمرة سيلو الجزئية و  $N = N_G(P)$ ، عندئذٍ  $(G:N) = s_2$ . الحالة  $s_2=3$  تكون غير ممكنة، لأن نواة  $(G/N) \rightarrow \text{Sym}(G/N)$  ستكون زمرة جزئية غير تافهة في  $G$ .

في الحالة  $s_2=5$ ، نحصل على تطبيق الاحتواء  $G \rightarrow \text{Sym}(G/N) = S_5$ ، حيث نعتبر  $G$  كزمرة جزئية دليلها 2 في  $S_5$ ، لكن من (36.4) نرى بأن، لكل  $n \geq 5$ ،  $A_n$  هي الزمرة الجزئية الوحيدة التي دليلها 2 في  $S_n$ .

في الحالة  $s_2=15$ ، النقاش ذاته (باستخدام  $s_2=6$ ) نرى بأنه توجد زمرة من 2-زمرة سيلو الجزئية  $P$  و  $Q$  تتقاطعان بزمرة من الرتبة 2. إن المنظم  $N$  للزمرة  $P \cap Q$  تحتوي على  $P$  و  $Q$ ، وبالتالي فهو من الرتبة 12، 20، أو 60. في الحالة الأولى، النقاش السابق يبين بأن  $G \approx A_5$ ، والحالات المتبقية تناقض ببساطة لـ  $G$ .

## تمارين

<sup>16</sup> بشكل مكافئ، التطبيق العادي  $G \rightarrow \text{Sym}(G/N)$ .

1-5 بين أن كل زمرة منتهية (ليست بالضرورة أن تكون تبديلية) بـ  $n$  عنصر على الأكثر ومن رتبة تقسم  $n$  لكل  $n$  يجب أن تكون دائرية.

## الفصل السادس

### المتسلسلات تحت الناقمية؛ الزمر القابلة للحل وعديمة القوى

## Subnormal Series; Solvable and Nilpotent Groups

### المتسلسلات تحت الناقمية (Subnormal Series)

لتكن  $G$  زمرة. تسمى المتسلسلة من الزمر الجزئية

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \dots \supset G_n = \{1\}$$

متسلسلة تحت ناظمية (Subnormal Series) إذا كانت  $G_i$  ناظمية في  $G_{i-1}$  لكل  $i$ ، وتسمى متسلسلة ناظمية (normal Series) إذا كانت  $G_i$  ناظمية في  $G$  لكل  $i$ .<sup>17</sup> يقال بأن المتسلسلة غير تكرارية (without repetition) إذا كانت كل الاحتواءات  $G_{i-1} \supset G_i$  فعلية. (أي أن،  $G_{i-1} \neq G_i$ ). عندئذ ندعو  $n$  طول المتسلسلة. ندعو زمر القسمة (quotient groups) أو (factor groups)  $G_{i-1}/G_i$  بزمر القسمة للمتسلسلة.

يقال عن المتسلسلة تحت الناقمية أنها متسلسلة تركيبية (composition Series) إذا لم تحو على متسلسلة مكررة والتي تكون بدورها متسلسلة تحت ناظمية أيضاً. وبكلمات أخرى، تكون متسلسلة تركيبية إذا كانت  $G_i$  أعظمية بين الزمر الجزئية الناقمية الفعلية  $G_{i-1}$  لكل  $i$ . لهذا تكون المتسلسلة تحت الناقمية متسلسلة تركيبية إذا وفقط إذا كانت كل زمرة قسمة لها بسيطة وغير تافهة. من الواضح، أنه لكل زمرة جزئية منتهية في  $G$  توجد متسلسلة تركيبية (عادة كثير): نختار  $G_1$  لتكون زمرة جزئية أعظمية فعلية في  $G$ ، ومن ثم نختار  $G_2$  لتكون زمرة جزئية أعظمية فعلية في  $G_1$ ، الخ .. يمكن أن تكون زمرة غير منتهية أو لا يمكن أن تحوي على متسلسلة تركيبية منتهية.

نحصل من المتسلسلة تحت الناقمية

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_i > G_{i+1} > \dots > G_n = \{1\}$$

على متتالية من المتتاليات التامة

<sup>17</sup> بعض المؤلفين يكتبون "متسلسلة ناظمية" حيث كتبنا "سلسلة تحت ناظمية" و "سلسلة لا متغيرة" حيث كتبنا "سلسلة ناظمية".

$$1 \rightarrow G_{n-1} \rightarrow G_{n-2} \rightarrow G_{n-1}/G_{n-2} \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow G_{n-1} \rightarrow G_{n-2} \rightarrow G_{n-2}/G_{n-1} \rightarrow 1$$

...

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow G_0/G_1 \rightarrow 1$$

لذلك فإن  $G$  تبني وحتى زمر القسم  $G_0/G_1, G_1/G_2, \dots, G_{n-1}$  بتشكيل تمديدات بشكل متتالي. بشكل خاص،

بما أن لكل زمرة منتهية متسلسلة تركيبية، يمكن أن نعتبرها كأنها تبني خارج زمر بسيطة. مبرهنة جوردان - هولدر، والتي هي الموضوع الرئيسي لهذه الفقرة، نقول بأن هذه الزمر البسيطة مستقلة عن المتسلسلة التركيبية (تحت سقف التماثل والرتبة).

نلاحظ بأنه إذا كان للزمرة  $G$  متسلسلة تحت ناظرية

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_n = \{1\} \text{، عندئذ}$$

$$(G : 1) = \prod_{1 \leq i \leq n} (G_{i-1} : G_i) = \prod_{1 \leq i \leq n} (G_{i-1}/G_i : 1)$$

**مثال 1.6 (a)** للزمرة التناظرية  $S_3$  المتسلسلة التركيبية

$$S_3 > A_3 > 1$$

مع زمر القسم  $C_2$  و  $C_3$ .

**(b)** للزمرة التناظرية  $S_4$  المتسلسلة التركيبية

$$S_4 > A_4 > V > \langle (13)(24) \rangle > 1,$$

حيث  $V \approx C_2 \times C_2$  وتتألف من كل العناصر من الرتبة 2 في  $A_4$  (انظر 31.4). وزمر القسم هي  $C_2, C_3, C_2, C_2$ .

(c) أي معلم تام في  $F_n^p$ ، عدد أولي،  $p$  هو متسلسلة تركيبية. طولها  $n$ ، وزمر القسم

لها هي  $C_p, C_p, \dots, C_p$ .

(d) نأخذ الزمرة الدائرية  $\langle a \rangle = C_m$ . من أجل أي تحليل  $m = p_1 \dots p_r$  إلى

جداً أعداد أولية (ليس من الضروري أن تكون مختلفة)، توجد المتسلسلة التركيبية

$$C_m > C_{\frac{m}{p_1}} > C_{\frac{m}{p_1 p_2}} > \dots$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ \langle a \rangle & \langle a^{p_1} \rangle & \langle a^{p_1 p_2} \rangle \end{array}$$

الطول يساوي  $r$ ، وزمر القسم هي  $C_{p_1}, C_{p_2}, \dots, C_{p_r}$ .



(e) بفرض أن  $G$  جداء مباشر لزمر بسيطة،  $G = H_1 \times \dots \times H_r$ . عندئذ يكون للزمرة  $G$  المتسلسلة التركيبية

$$G > H_2 \times \dots \times H_r > H_3 \times \dots \times H_r > \dots$$

من الطول  $r$  مع زمرة القسمة  $H_1, H_2, \dots, H_r$ . نلاحظ بأنه لأي تبديلة  $p$  للمجموعة  $\{1, 2, \dots, r\}$ ، توجد متسلسلة تركيبية أخرى مع زمرة القسمة  $H_{p(1)}, H_{p(2)}, \dots, H_{p(r)}$ .  
(f) لقد رأينا في (36.4) بأنه لأجل  $n \geq 5$ ، إن الزمر الجزئية النظامية في  $S_n$  هي  $S_n$  و  $A_n$  و  $\{1\}$ ، وفي (32.4) أن  $A_n$  بسيطة. وبالتالي  $S_n > A_n > \{1\}$  هي المتسلسلة التركيبية الوحيدة لـ  $S_n$ .

**مبرهنة (2.6) (جوردان - هولدر) (Jordan - Holder)** لتكن  $G$  زمرة منتهية. إذا كانت

$$G = G_0 > G_1 > \dots > G_s = \{1\}$$

$$G = H_0 > H_2 > \dots > H_t = \{1\}$$

سلسلتين تركيبيتين للزمرة  $G$ ، عندئذ  $s = t$  و يوجد تبديلة  $p$  للمجموعة  $\{1, 2, \dots, r\}$  بحيث يكون  $G_i / G_{i+1} \approx H_{p(i)} / H_{p(i)+1}$ .<sup>18</sup>  
البرهان. نستخدم الاستقراء على رتبة  $G$ .

الحالة I:  $H_1 = G_1$ . في هذه الحالة، لدينا سلسلتان تركيبيتان للزمرة  $G_1$ ، والتي يمكن أن نطبق عليها الفرض الاستقرائي.

الحالة II:  $H_1 \neq G_1$ . بما أن  $H_1$  و  $G_1$  زمرتان جزئيتان ناظميتان في  $G$ ، فإن  $G_1 H_1$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$ . وبشكل خاص تحوي كل من  $H_1$  و  $G_1$ ، اللتين تكونان أعظميتين في  $G$ ، و منه  $G_1 H_1 = G$ . لذلك

$$G/G_1 = G_1 H_1 / G_1 \quad H_1 / G_1 \quad \mathbf{I} \quad H_1 \quad \text{(انظر (1.45))}$$

بشكل مشابه  $G/H_1 \quad G_1/G_1 \quad \mathbf{I} \quad H_1$ . لتكن  $K_2 = G_1 \mathbf{I} H_1$ ، عندئذ  $K_2$  زمرة جزئية ناظمية أعظمية في كل من  $H_1$  و  $G_1$ ، و

$$G/G_1 \quad H_1/K_2, \quad G/H_1 \quad G_1/K_2 \quad (19)$$

نختار المتسلسلة التركيبية

$$K_2 > K_3 > \dots > K_u$$

يكون لدينا الشكل

<sup>18</sup> يبين جوردان بأن زمرة القسمة المتقابلة لها نفس الرتبة، ويبين هولدر بأنها متماثلة.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & G_1 & & G_2 & & \dots & & G_s \\
 & \swarrow & & \searrow & & & & \\
 G & & & & & K_2 & & \dots & & K_u \\
 & \searrow & & \swarrow & & & & \\
 & H_1 & & H_2 & & \dots & & H_t
 \end{array}$$

بتطبيق الفرض الاستقرائي على  $G_1$  و  $H_1$  و على متسلسلاتها التركيبية في المخطط، نجد

(التعريف)  $\{G/G_1, G_1/G_2, G_2/G_3, \dots\}$   $(G > G_1 > G_2 > \dots)$  زمر القسمة

(الاستقراء)  $\{G/G_1, G_1/K_2, K_2/K_3, \dots\}$

(بتطبيق (19))  $\{H_1/K_2, G/H_1, K_2/K_3, \dots\}$

(من الرتبة)  $\{G/H_1, H_1/K_2, K_2/K_3, \dots\}$

(الاستقراء)  $\{G/H_1, H_1/H_2, H_2/H_3, \dots\}$

(التعريف)  $(G > H_1 > H_2 > \dots)$  زمر القسمة =

نلاحظ بأنه إذا طبقت هذه المبرهنة على الزمرة الدائرية  $C_m$  ينتج بأن تحليل العدد الصحيح إلى جداء أعداد أولية يكون وحيداً.

**ملاحظة 3.6** توجد زمر غير منتهية تكون متسلسلاتها التركيبية منتهية (حتى أنه يوجد زمر بسيطة غير منتهية). لمثل هذه الزمرة، لتكن  $(G)$  أصغر طول للمتسلسلات التركيبية. عندئذ ولأن مبرهنة جوردان - هولدر تتوسع لتبين بأن كل المتسلسلات التركيبية لها الطول  $(G)$   $d$  وتحتوي على زمر قسمة متماثلة.

يصلح البرهان نفسه عدا أنه عليك استخدام الاستقراء على  $(G)$  بدلاً من  $|G|$  وبرهان بأنها زمرة جزئية من زمرة مع متسلسلة تركيبية منتهية ولها أيضاً متسلسلة تركيبية منتهية (التمرين 1-6).

تسمى أحياناً زمر القسمة للمتسلسلات التركيبية بالعوامل التركيبية (composition factor).

## الزمر القابلة للحل (Solvable groups)

إن المتسلسلات تحت النازمية والتي تكون فيها زمر القسمة تبديلية تسمى بالمتسلسلات القابلة للحل (solvable series). وتكون الزمرة قابلة للحل (solvable) أو (soluble) إذا حوت على متسلسلة قابلة للحل. وبشكل آخر، يمكن أن نقول بأن الزمرة قابلة للحل إذا أمكن الحصول عليها بتشكيل تمديدات متتالية لزمر تبديلية. وبما أن: تكون الزمرة التبديلية بسيطة إذا وفقط إذا كانت دائرية رتبته عدد أولي، نرى بأنه تكون الزمرة  $G$  قابلة للحل إذا وفقط

إذا كان لإحداها (وبالتالي لكل واحدة) متسلسلة تركيبية وكل زمر القسمة فيها هي زمر دائرية رتبته عدد أولي.

كل زمرة تبديلية تكون قابلة للحل، كذلك كل زمرة ديهيدرال. ولقد بينت النتائج في الفصل الخامس أن كل زمرة من رتبة  $60 >$  تكون قابلة للحل. وبالعكس، زمرة غير تبديلية بسيطة، مثلاً،  $A_n$  لكل  $n \geq 5$ ، لن تكون زمرة قابلة للحل.

**مبرهنة 4.6 (فيت - طمبسون) (Feit – Thompson)** كل زمرة منتهية رتبته عدد فردي تكون قابلة للحل<sup>19</sup>.

**البرهان.** يشغل البرهان الإصدارات الكاملة لمجلة Pacific للرياضيات (فيت - طومبسون 1963).

بكلمات أخرى، كل زمرة بسيطة غير تبديلية منتهية تكون من رتبة زوجية، ولذلك فهي تحوي على عنصر من الرتبة 2. إن هذه المبرهنة تلعب دوراً في تصنيف الزمر البسيطة المنتهية، انظر p49.

**مثال 5.6** نأخذ الزمر الجزئية  $B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$  و  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  من الزمرة  $GL_2(F)$ ، لحقل ما. عندئذ تكون  $U$  زمرة جزئية ناظمية في  $B$ ، و  $(F, +)$   $U \cong F^\times \times F^\times$ . وبالتالي فإن  $B$  قابلة للحل.

**قضية 6.6 (a)** كل زمرة جزئية من زمرة قسمة لزمرة قابلة للحل هي زمرة قابلة للحل.  
**(b)** إن تمديد الزمر القابلة للحل هو زمرة قابلة للحل.

<sup>19</sup> كتب برنسايد (1897, p379):

لا توجد زمر بسيطة رتبته عدد فردي تكون في الوقت الحاضر معروفة حتى تتواجد. و التحري لوجود أو عدم وجود

مثل هذه الزمر سيقودنا بشكل أكيد، مهما تكن الاحتواءات، إلى نتائج في غاية من الأهمية، يمكن أن ننصح القارئ بأنه

يستحق تركيز انتباهه. أيضاً، لا توجد زمر بسيطة معلومة بحيث تحوي رتبته على أقل من ثلاث أعداد أولية مختلفة. ...

تطور هام في المسألة الأولى لم تحل إلا في المرجع Suzuki, M. عدم وجود نمط معين لزمرة بسيطة من رتبة منتهية، 1957. على أي حال، حلت المسألة الثانية من قبل برنسايد نفسه، الذي برهن باستخدام المميزات أن أي زمرة تحوي رتبته على أقل من ثلاث أعداد أولية مختلفة هي زمرة قابلة للحل (انظر ألبيرن وويل 1955, p182).

البرهان. (a) لتكن  $G > G_1 > \dots > G_n$  متسلسلة قابلة للحل للزمرة  $G$ ، ولتكن  $H$  زمرة جزئية من  $G$ . إن التشاكل

$$x \mapsto xG_{i+1} : H \cap G_i \rightarrow G_i/G_{i+1}$$

نواته  $(H \cap G_i) \cap G_{i+1} = H \cap G_{i+1}$ ، لذلك  $H \cap G_{i+1}$  زمرة جزئية ناظمية في  $H \cap G_i$  و زمر القسمة  $H \cap G_i / H \cap G_{i+1}$  تشكل تطبيقاً متبايناً إلى  $G_i/G_{i+1}$ ، التي تكون تبديلية. نكون قد بينا بأن

$$H > H \cap G_1 > \dots > H \cap G_n$$

متسلسلة قابلة للحل للزمرة  $H$ .

لتكن  $\bar{G}$  زمرة القسمة للزمرة  $G$ ، وليكن  $\bar{G}_i$  صورة  $G_i$  في  $\bar{G}$ . عندئذٍ

$$\bar{G} > \bar{G}_1 > \dots > \bar{G}_n = \{1\}$$

متسلسلة قابلة للحل في  $\bar{G}$ .

(b) لتكن  $N$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$ ، ولتكن  $\bar{G} = G/N$ . علينا أن نبين بأنه إذا كانت  $N$  و  $\bar{G}$  قابلتين للحل، فإن  $G$  أيضاً زمرة قابلة للحل. لتكن

$$\bar{G} > \bar{G}_1 > \dots > \bar{G}_n = \{1\}$$

$$N > N_1 > \dots > N_m = \{1\}$$

متسلسلتين قابلتين للحل لـ  $\bar{G}$  و  $N$ ، ولتكن  $G_i$  الصورة العكسية لـ  $\bar{G}_i$  في  $G$ . عندئذٍ

$$G/G_{i+1} \cong \bar{G}_i/\bar{G}_{i+1} \quad (47.1) \text{، و لذلك}$$

$$G > G_1 > \dots > G_n = (N) > N_1 > \dots > N_m$$

هي متسلسلة قابلة للحل في  $G$ .

**نتيجة 7.6** كل  $p$  - زمرة منتهية تكون قابلة للحل.

البرهان. نستخدم الاستقراء على رتبة الزمرة  $G$ . بالعودة إلى (4.16)، يكون المركز  $Z(G)$  للزمرة  $G$  غير تافه، ومن الفرض الاستقرائي ينتج بأن  $Z(G)$  قابلة للحل. لأن  $Z(G)$  تبديلية، ويبين (b) في القضية بأن  $G$  قابلة للحل.

لتكن  $G$  زمرة. نتذكر بأن مبادل العنصرين  $x, y \in G$  هو

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = xy(yx)^{-1}$$

لذلك

$$[x, y] = 1 \Leftrightarrow xy = yx,$$

وتكون  $G$  تبديلية إذا وفقط إذا كان كل مبادل يساوي 1.

**مثال 8.6** لأي فضاء متجهي ذو بعد منته  $V$  على الحقل  $K$  و أي معلم تام  $F = \{V_n, V_{n-1}, \dots\}$  في  $V$ ، تكون الزمرة

$$B(F) = \{a \in \text{Aut}(V) \mid a(V_j) \subset V_j, \forall j\}$$

قابلة للحل.

لتكن  $U(F)$  الزمرة المعرفة في المثال 5.10. عندئذٍ  $B(F)/U(F)$  تبديلية، و، عندما  $K = F_p$ ،  $U(F)$  تكون  $p$ -زمرة. هذا يبرهن بأن  $B(F)$  قابلة للحل في حالة  $K = F_p$ ، وفي الحالة العامة تعرف واحدة منها الزمر الجزئية  $B_0 \supset B_1 \supset \dots$  في  $B(F)$  مع

$$B_i = \{a \in B(F) \mid a(V_j) \subset V_{j-i}, \forall j\}$$

و نلاحظ بأن مبادل عنصرين في  $B_i$  يقع في  $B_{i+1}$ .

لأي تشاكل  $j: G \rightarrow H$

$$j([x, y]) = j(xy x^{-1} y^{-1}) = [j(x), j(y)],$$

أي أن،  $j$  ينقل مبادل العنصرين  $x, y$  إلى مبادل العنصرين  $j(x), j(y)$ . بشكل خاص، نرى بأن  $H$  تبديلية، عندئذٍ فإن  $j$  ينقل كل المبادلات في  $G$  إلى 1. إن الزمرة  $G' = G^{(1)}$  المولدة بالمبادلات في  $G$  تسمى الزمرة المبادلة (commutator) أو الزمرة الجزئية المشتقة من الدرجة الأولى (first derived subgroup) في  $G$ .

**قضية 9.6** الزمرة الجزئية المبادلة  $G'$  هي زمرة جزئية مميزة في  $G$ ، وهي أصغر زمرة ناظمية في  $G$  بحيث تكون  $G/G'$  تبديلية.

**البرهان.** التماثل الذاتي للزمرة  $G$  ينقل المجموعة المولدة لـ  $G'$  إلى  $G'$ ، وبالتالي تنتقل  $G'$  إلى  $G'$ . وبما أن هذا صحيح لكل التماثلات الذاتية لـ  $G$ ، فإن زمرة مميزة. نكتب  $g \bar{a} g$  للتشاكل  $g: G' \rightarrow G/G'$ . عندئذٍ  $[g, h] = [\bar{g}, \bar{h}]$ ، الذي يساوي 1 لأن  $[g, h] \in G'$ . وبالتالي  $[\bar{g}, \bar{h}] = 1$  لكل  $\bar{g}, \bar{h} \in G/G'$ ، الذي يبين بأن  $G/G'$  تبديلية.

لتكن  $N$  الزمرة الجزئية الناظمية الثانية في الزمرة  $G$  بحيث تكون  $G/N$  تبديلية، ومنه  $[g, h] \in N$ . بما أن هذه العناصر تولد  $G'$ ،  $G' \subset N$ .

لكل  $n \geq 5$ ،  $A_n$  هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في  $S_n$  تعطي زمرة قسمة تبديلية.  
بالتالي  $(S_n)' = A_n$ .

الزمرة الجزئية المشتقة من الدرجة الثانية (second derived subgroup) للزمرة  $G$  هي  $(G')'$ ، والثالثة (third) هي  $(G'')' = G^{(3)}$ ، وهكذا. بما أن الزمرة الجزئية المميزة لزمرة جزئية مميزة تكون مميزة (6.3a)، تكون كل زمرة جزئية مشتقة زمرة مميزة في  $G$ . وبالتالي نحصل على المتسلسلة الناظمية

$$G \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \dots$$

و التي تدعى بالمتسلسلة المشتقة (derived series) في  $G$ . مثلاً، عندما  $n \geq 5$ ، تكون المتسلسلة المشتقة للزمرة  $S_n$

$$S_n \supset A_n \supset A_n \supset A_n \supset \dots$$

**قضية 10.6** تكون الزمرة  $G$  قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت الزمرة الجزئية المشتقة  $G^{(k)}$  تساوي 1 لبعض الأعداد  $k$ .  
البرهان. إذا كان  $G^{(k)} = 1$ ، عندئذ فإن المتسلسلة المشتقة هي متسلسلة قابلة للحل للزمرة  $G$ . وبالعكس، لتكن

$$G = G > G > G > \dots > G_s = 1$$

متسلسلة قابلة للحل للزمرة  $G$ . بما أن  $G/G_1$  تبديلية،  $G_1 \supset G'$ . الآن إن  $G'G_2$  زمرة جزئية في  $G_1$ ، ومن

$$G'/G' \mathbf{I} G_2 \longrightarrow G'G_2/G_2 \subset G_1/G_2$$

نرى بأن

$$G_1/G_2 \text{ تبديلية} \iff G'/G' \mathbf{I} G_2 \text{ تبديلية} \iff G'' \subset G' \mathbf{I} G_2 \subset G_2$$

بالتابعة بهذه الطريقة، نجد بأن  $G^{(i)} \subset G_i$  لكل  $i$ ، وبالتالي  $G^{(s)} = 1$ .

لهذا، فإن الزمرة  $G$  القابلة للحل تحوي على متسلسلة قابلة للحل قانونية، بالتحديد المتسلسلة المشتقة، والتي فيها كل الزمر ناظمية في  $G$ . إن برهان القضية يبين بأن المتسلسلة المشتقة هي أقصر متسلسلة قابلة للحل للزمرة  $G$ . يسمى طولها بالطول القابل للحل للزمرة  $G$ .

## الزمر عديمة القوى (Nilpotent groups)

لتكن  $G$  زمرة. نتذكر بأن  $Z(G)$  هي مركز الزمرة  $G$ . لتكن  $Z^2(G) \subset G$  زمرة جزئية في  $G$  المقابل لـ  $G/Z(G) \subset G/Z(G)$ . لهذا

$$x \in G \quad g \in Z^2(G) \Leftrightarrow [g, x] \in Z(G)$$

بالمتابعة بهذه الطريقة، نحصل على متتالية من الزمر الجزئية (متسلسلة مركزية متزايدة) (ascending central series)

$$\{1\} \subset Z(G) \subset Z^2(G) \subset \dots$$

حيث

$$x \in G \quad g \in Z^i(G) \Leftrightarrow [g, x] \in Z^{i-1}(G)$$

إذا كان  $Z^m(G) = G$  لبعض  $m$ ، عندئذٍ يقال بأن  $G$  عديمة القوى (nilpotent)، ويسمى أصغر عدد مثل  $m$  صف (الانعدام) (nilpotency) للزمرة  $G$ . مثلاً، كل  $p$ -زمرة منتهية تكون عديمة القوى (بتطبيق 16.4).

$\{1\}$  هي الزمرة الوحيدة التي لها الصف 0، و الزمر التي من الصف 1 هي الزمر التبديلية تماماً. تكون الزمرة من الرتبة 2 إذا وفقط إذا كانت  $G/Z(G)$  تبديلية - كما يقال بأن الزمرة فوق آبلية (metabelian).

**مثال 11.6 (a)** من الواضح أن الزمرة عديمة القوى هي زمرة قابلة للحل، لكن العكس ليس صحيحاً. مثلاً، من أجل الحقل  $F$ ، ليكن

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F, ac \neq 0 \right\}$$

عندئذٍ  $Z(B) = \{aI \mid a \neq 0\}$ ، و يكون مركز  $B/Z(B)$  تافهاً. لذلك  $B/Z(B)$  ليست عديمة القوى، لكن نقول في (5.6) أنها قابلة للحل.

(b) الزمرة  $G = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  فوق آبلية: مركزها  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  و  $G/Z(G)$  تبديلية.

(c) أي زمرة غير آبلية  $G$  من الرتبة  $p^3$  تكون فوق آبلية. في الحقيقة،  $G' = Z(G)$  من الرتبة  $p$  (انظر 17.5)، و  $G/G'$  تبديلية (18.4). بشكل خاص، زمر ديهيدرال وزمر القسمة من الرتبة 8،  $Q$  و  $D_4$ ، فوق آبلية. زمرة ديهيدرال  $D_{2n}$  عديمة القوى من الصف  $n$  - يمكن أن يبرهن هذا بالاستقراء، باستخدام أن  $Z(D_{2n})$  من الرتبة 2، و  $D_{2n}/Z(D_{2n}) \approx D_{2n-1}$ . إذا لم يكن  $n$  قوى للعدد 2، عندئذٍ  $D_n$  ليست عديمة القوى (باستخدام المبرهنة 17.6 القادمة).

**قضية 12.6 (a)** الزمرة الجزئية من زمرة عديمة القوى هي زمرة عديمة القوى.

(b) زمرة القسمة لزمرة عديمة القوى هي زمرة عديمة القوى.

**البرهان.** (a) لتكن  $H$  زمرة جزئية من الزمرة عديمة القوى  $G$ . من الواضح أن،

$$Z(H) \supset Z(G) \text{ I } H \text{ بفرض (بالاستقراء) أن } Z^i(H) \supset Z^i(G) \text{ I } H \text{ عندئذٍ}$$

$$(h \in H \text{ لكل } Z^{i+1}(H) \supset Z^{i+1}(G) \text{ I } H$$

$$. h \in Z^{i+1}(G) \Rightarrow [h, x] \in Z^i(G), x \in G \Rightarrow [h, x] \in Z^i(H), x \in H$$

(b) بشكل مباشر.

**ملاحظة 13.6** علينا أن نلاحظ بأن زمرة جزئية في  $G$ ، عندئذٍ من الممكن أن يكون

$Z(H)$  أكبر من  $Z(G)$ . مثلاً، إن مركز

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid ab \neq 0 \right\} \subset GL_2(F)$$

هي  $H$  نفسها، لكن مركز  $GL_2(F)$  يحوي فقط على المصفوفة السلمية.

**قضية 14.6** تكون الزمرة  $G$  عديمة القوى من الصف  $m \geq$  إذا وفقط إذا كان

$$[\dots [g_1, g_2], g_3], \dots, g_{m+1}] = 1$$

لكل  $g_1, g_2, \dots, g_{m+1} \in G$ .

**البرهان.** نتذكر بأن،  $g \in Z^i(G) \Leftrightarrow [g, x] \in Z^{i-1}(G)$  لكل  $x \in G$ .

بفرض أن  $G$  عديمة القوى من الصف  $m \geq$ ، عندئذٍ

$$G = Z^m(G) \Rightarrow [g_1, g_2] \in Z^{m-1}(G), g_1, g_2 \in G$$

$$\Rightarrow [[g_1, g_2], g_3] \in Z^{m-2}(G), g_1, g_2, g_3 \in G$$

.....

$$\Rightarrow [\dots [g_1, g_2], g_3], \dots, g_m \in Z(G), g_1, \dots, g_m \in G$$

$$\Rightarrow [\dots [g_1, g_2], g_3], \dots, g_{m+1}] = 1, g_1, \dots, g_m \in G$$

من أجل العكس، ليكن  $g_1 \in G$ . عندئذٍ



$$\begin{aligned}
& [[\dots[[g_1, g_2], g_3], \dots, g_m], g_{m+1}] = 1, g_1, g_2, \dots, g_{m+1} \in G \\
& \Rightarrow [\dots[[g_1, g_2], g_3], \dots, g_m] \in Z(G), g_1, \dots, g_m \in G \\
& \Rightarrow [\dots[[g_1, g_2], g_3], \dots, g_{m-1}] \in Z^2(G), g_1, \dots, g_{m-1} \in G \\
& \dots\dots \\
& \Rightarrow g_1 \in Z^m(G), g_1 \in G
\end{aligned}$$

ليس بالضرورة أن يكون التمديد لزمر عديمة القوى تمديداً عديم القوى، أي أن،

$$(20) \quad N \text{ و } G/N \text{ عديم القوى} \not\Rightarrow G \text{ عديمة القوى.}$$

مثلاً، الزمرة الجزئية  $U$  في الزمرة  $B$  في الأمثلة 5.6 و 11.6 تبديلية و  $B/U$  تبديلية، لكن  $B$  ليست عديمة القوى.

على أي حال، الاقتضاء (20) محقق عندما تكون  $N$  محتواة في مركز الزمرة  $G$ . في الحقيقة، لدينا النتيجة الأكثر تفصيلاً الآتية.

**نتيجة 15.6** لكل زمرة جزئية  $N$  من مركز الزمرة  $G$ ،

$$G \text{ عديمة القوى من الصف } m+1 \geq \Rightarrow G/N \text{ عديمة القوى من الصف } m.$$

**البرهان.** نكتب  $p$  للتطبيق  $G \rightarrow G/N$ . عندئذٍ

$$\begin{aligned}
& p \left( [\dots[[g_1, g_2], g_3], \dots, g_m], g_{m+1} \right) = \\
& [\dots[[p g_1, p g_2], p g_3], \dots, p g_m], p g_{m+1}] = 1, \\
& [ \dots[[g_1, g_2], g_3], \dots, g_m], g_{m+1} ] \in N \subset Z(G) \text{ بالتالي } g_1, g_2, \dots, g_{m+1} \in G \\
& \text{ومنه } [ \dots[[g_1, g_2], g_3], \dots, g_{m+1}], g_{m+2} ] = 1 \text{ لكل } g_1, \dots, g_{m+2} \in G.
\end{aligned}$$

**نتيجة 16.6** كل  $p$  - زمرة منتهية تكون عديمة القوى.

**البرهان.** نستخدم الاستقراء على رتبة الزمرة  $G$ . لأن  $Z(G) \neq 1$ ،  $G/Z(G)$  عديمة القوى، والتي تقتضي بأن  $G$  عديمة القوى.

نتذكر بأن التمديد

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q \rightarrow 1$$

يكون مركزياً إذا كان  $i(N) \subset Z(G)$ . عندئذٍ:

إن الزمر عديمة القوى هي تلك الزمر التي يمكن الحصول عليها بتمديدات مركزية متتالية.

بالمقابل:

إن الزمر القابلة للحل هي تلك الزمر التي يمكن الحصول عليها من زمر تبديلية بتمديدات متتالية (ليس بالضرورة أن تكون مركزية).

**مبرهنة 17.6** تكون الزمرة المنتهية عديمة القوى إذا وفقط إذا كانت تساوي الجداء المباشر لزمر سيلو الجزئية فيها.

**البرهان.** من الواضح أن الجداء المباشر لزمر عديمة القوى هو زمرة عديمة القوى، ولذلك فإن الاتجاه الأول يأتي من النتيجة السابقة. العكس، لتكن  $G$  زمرة منتهية عديمة القوى. بالعودة إلى (9.5) يكفي أن نبرهن بأن كل زمر سيلو الجزئية ناظمية. لتكن  $P$  زمرة جزئية ما من  $G$ ، و لتكن  $N = N_G(P)$ . تبين التمهيدية الآتية بأن  $N_G(N) = N$ ، وتبين الثانية بأن  $N = G$ ، أي أن،  $P$  ناظمية في  $G$ .

**تمهيدية 18.6** لتكن  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في الزمرة المنتهية  $G$ . لأي زمرة جزئية  $H$  في  $G$  تحتوي على  $N_G(P)$ ، يكون لدينا  $N_G(H) = H$ . **البرهان.** لتكن  $g \in N_G(H)$ ، ومنه  $gHg^{-1} = H$ . عندئذٍ  $gPg^{-1} = P'$ ، والتي هي عبارة عن  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في الزمرة  $H$ . من سيلو II،  $hPh^{-1} = P$  لبعض  $h \in H$ ، ومنه  $hgPg^{-1}h^{-1} \subset P$  بالتالي  $hg \in N_G(P) \subset H$ ، ومنه  $g \in H$ .

**تمهيدية 19.6** لتكن  $H$  زمرة جزئية فعلية من زمرة منتهية عديمة القوى  $G$ ، عندئذٍ  $H \neq N_G(H)$ .

**البرهان.** إن الحالة تكون بشكل واضح صحيحة بالنسبة للزمر التبديلية، ولذلك يمكن أن نفرض بأن  $G$  غير تبديلية. نستخدم الاستقراء على رتبة الزمرة  $G$ . لأن  $G$  عديمة القوى،  $Z(G) \neq 1$ . إن عناصر الزمرة  $Z(G)$  تنظم  $H$  بشكل معين، ومنه إذا كان  $H \not\subseteq Z(G)$ ، يكون لدينا  $H \subset N_G(H)$ . لهذا يمكن أن نفرض بأن  $Z(G) \subset H$ . عندئذٍ فإن منظم الزمرة  $H$  في  $G$  يتطابق بالنسبة (46.1) مع منظم  $H/Z(G)$  في  $G/Z(G)$ ، و يمكننا أن نطبق الفروض الاستقرائية.

**ملاحظة 20.6** من أجل الزمرة التبادلية المنتهية  $G$  نستنتج الحقيقة بأن  $G$  جداء مباشر لـ  $p$  - زمرة جزئية أولية فيها.

**قضية 21.6** (مناقشة فراينين) لتكن  $H$  زمرة جزئية ناظمية من زمرة منتهية  $G$ ، ولتكن  $p$  - زمرة سيلو الجزئية  $P$  في الزمرة  $H$ . عندئذٍ  $G = H.N_G(P)$ .  
**البرهان.** لتكن  $g \in G$ . عندئذٍ  $gPg^{-1} \subset gHg^{-1} = H$ ، و كل من  $gPg^{-1}$  و  $P$  عبارة عن  $p$  - زمرة سيلو الجزئية في الزمرة  $H$ . بالعودة إلى سيلو II، يوجد  $h \in H$  بحيث يكون  $gPg^{-1} = hPh^{-1}$ ، وبالتالي  $h^{-1}g \in N_G(P)$  ومنه  $g \in H.N_G(P)$ .

**مبرهنة 22.6** تكون الزمرة عديمة القوى إذا وفقط إذا كانت كل زمرة جزئية أعظمية فعلية ناظمية.

**البرهان.** قلنا في التمهيدية 6.19 بأن لأي زمرة جزئية فعلية  $H$  من زمرة عديمة القوى  $G$ ،  $H \subseteq N_G(H)$ ، بالتالي،

$$N_G(H) = G \iff H \text{ أعظمية}$$

أي أن،  $H$  ناظمية في  $G$ .

العكس، بفرض أن كل زمرة جزئية أعظمية فعلية في  $G$  تكون ناظمية. سنتحقق من شروط المبرهنة 17.6. لهذا، لتكن  $P$  عبارة عن  $p$  - زمرة سيلو الجزئية في الزمرة  $G$ . إذا لم تكن  $P$  ناظمية في  $G$ ، عندئذٍ توجد زمرة جزئية أعظمية فعلية  $H$  في  $G$  تحوي  $N_G(P)$ . وكونها أعظمية، فإن  $H$  ناظمية، ومنه تبين مناقشة فراينين بأن  $G = H.N_G(P) = H$  وهذا تناقض.

### الزمر بمؤثرات (Groups with operators)

نتذكر بأن مجموعة التماثلات الذاتية  $\text{Aut}(G)$  للزمرة  $G$  هي أيضاً زمرة. لتكن  $A$  زمرة. يدعى الزوج  $(G, j)$  المؤلف من الزمرة  $G$  مع التشاكل  $j : A \rightarrow \text{Aut}(G)$  بـ  $A$  - زمرة، أو يقال بأن الزمرة  $G$  مع  $A$  كزمرة من المؤثرات (Groups with operators)

لتكن  $G$  هي  $A$  - زمرة، ولنكتب  ${}^a x$  للحد  $j(a)x$  عندئذٍ

$$({}^a x)^{(ab)} = {}^a ({}^b x) \quad (j \text{ تشاكل})$$

$$({}^a (xy))^b = ({}^a x)^b ({}^a y)^b \quad (j(a) \text{ تشاكل})$$

$$({}^1 x)^j = x \quad (j \text{ تشاكل})$$

بالعكس، إن التطبيق  $a^x : A \times G \rightarrow G$  يحقق (a) ، (b) ، (c) وينتج من التشاكل  $A \rightarrow \text{Aut}(G)$ . يبين الشرطان (a) و (c) أن  $a^x$  هو التطبيق العكسي لـ  $a^{(x^{-1})}$  ، وبالتالي يكون  $a^x$  تقابلاً  $G \rightarrow G$ . عندئذٍ يبين الشرط (b) بأنه تماثل ذاتي على  $G$ . أخيراً، يبين (a) بأن التطبيق  $a^x = x(a)$  تشاكل  $A \rightarrow \text{Aut}(G)$ .

لتكن  $G$  زمرة مع المؤثرات المعرفة  $A$ . تكون الزمرة الجزئية  $H$  من الزمرة  $G$  ثابتة (admissible) أو لا متغيرة (invariant) إذا كان

$$x \in H \Rightarrow {}^a x \in H, a \in A$$

إن تقاطع الزمر الثابتة هو زمرة ثابتة. إذا كانت  $H$  ثابتة، فإن كل من منظمها و مركزها زمرة ثابتة أيضاً.

$A$  - تشاكل (أو تشاكل ثابت) (admissible homomorphism) لـ  $A$  - زمر هو تشاكل  $g : G \rightarrow G'$  بحيث يكون  $g({}^a g) = {}^a g(g)$  لكل  $a \in A, g \in G$ .

**مثال 23.6 (a)** يمكن أن نعتبر زمرة  $G$  كزمرة مع  $\{1\}$  كزمرة للمؤثرات. في هذه الحالة تكون كل الزمر الجزئية و التشاكلات ثابتة، ومنه فإن نظرية الزمر مع المؤثرات تحوي نظرية الزمر بدون مؤثرات.

(b) نعتبر  $G$  زمرة التأثير على نفسها بالترافق، أي ، باعتبار  $G$  مع التشاكل

$$g \mapsto i_g : G \rightarrow \text{Aut}(G)$$

في هذه الحالة، الزمر الجزئية الثابتة هي الزمر الجزئية الناعمة.

(c) نعتبر  $G$  مع  $A = \text{Aut}(G)$  كزمرة من للمؤثرات. في هذه الحالة، الزمر الجزئية الثابتة هي الزمر الجزئية المميزة.

لقد برهن كل شيء تقريباً بالنسبة للزمر وتحقق أيضاً بالنسبة للزمر مع المؤثرات. بحالة خاصة، إن المبرهنات 44.1، 45.1 و 46.1 تتحقق بالنسبة للزمر بمؤثرات. في كل حالة، يكون البرهان نفسه كما سبق غير أنه يجب التأكد من قابلية الثبات.

**مبرهنة 24.6** لأي تشاكل ثابت  $g : G \rightarrow G'$  من  $A$  - زمر،  $N = \text{Ker}(g)$  زمرة جزئية ناعمة ثابتة في  $G$ ،  $g(G)$  زمرة جزئية ثابتة في  $G'$ ، ويتحلل  $g$  بطريقة طبيعية إلى تركيب من تطبيق غامر ثابت، تماثل ثابت، و تطبيق متباين ثابت:

$$G \rightarrow G/N \xrightarrow{\text{def}} g(G) \rightarrow G'$$

**مبرهنة 25.6** لتكن  $G$  زمرة بمؤثرات  $A$ ، و لتكن  $H$  و  $N$  زمرتين جزئيتين ثابتتين، حيث  $N$  ناظمية. عندئذٍ  $H \mathbf{I} N$  زمرة جزئية ثابتة ناظمية في  $H$ ،  $HN$  زمرة جزئية ثابتة في  $G$ ، و  $h(H \mathbf{I} N) \mathbf{a} hH$  تماثل ثابت  $HN/N \rightarrow H/H \mathbf{I} N$ .

**مبرهنة 26.6** ليكن  $G \rightarrow G'$ :  $j$  تشاكلاً ثابتاً غامراً من  $A$  - زمر. بالنسبة للتطبيق التقابل  $H \leftrightarrow \bar{H}$  بين مجموعة الزمر الجزئية في  $G$  الحاوية على  $\text{Ker}(j)$  و مجموعة الزمر الجزئية في  $\bar{G}$  (انظر 64.1)، الزمر الجزئية الثابتة تقابل الزمر الجزئية الثابتة.

ليكن  $j: A \rightarrow \text{Aut}(G)$  زمرة بالمؤثر  $A$ . إن المتسلسلة تحت الناظمية الثابتة (admissible subnormal series) هي متسلسلة من الزمر الجزئية الثابتة في  $G$

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_r$$

حيث كل  $G_i$  ناظمية في  $G_{i-1}$ . نعرف بشكل مشابه المتسلسلة التركيبية الثابتة. تكون زمر القسمة في المتسلسلة تحت الناظمية الثابتة  $A$  - زمراً، وزمر القسمة في المتسلسلة التركيبية الثابتة  $A$  - زمراً بسيطة، أي أنه، لا يوجد زمر جزئية ثابتة ناظمية غير الزمرتين التافهتين. إن مبرهنة جوردان - هولدر مستمر للتحقق من أجل  $A$  - زمر. في هذه الحالة تكون التماثلات بين زمر القسمة المقابلة لمتسلسلتين تركيبيتين ثابتة. البرهان نفسه كما في المبرهنة العامة، لأنه استخدم التماثلات فقط، التي قد لاحظنا بأنها محققة أيضاً بالنسبة لـ  $A$  - زمر.

**مثال 27.6 (a)** باعتبار الزمرة  $G$  زمرة كمؤثر على نفسها بالترافق. في هذه الحالة إن المتسلسلة تحت الناظمية الثابتة هي متتالية من الزمر الجزئية

$$G \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_s = \{1\}$$

حيث إن كل  $G_i$  ناظمية في  $G$ ، أي أنها، متسلسلة ناظمية. إن تأثير  $G$  على  $G_i$  بالترافق ينفذ إلى زمر القسمة، ليعطي تأثير  $G$  على  $G_i/G_{i+1}$ . إن زمرتي القسمة لمتسلسلتين تركيبيتين ثابتتين تكونان متماثلتين كما في  $G$  - زمر.

(b) باعتبار  $G$  مع  $A = \text{Aut}(G)$  كزمرة من مؤثرات. في هذه الحالة، إن المتسلسلة تحت الناظمية الثابتة هي المتتالية

$$G \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_s = \{1\}$$

حيث كل  $G_i$  زمرة جزئية مميزة في  $G$ ، وزمر القسمة لمتسلسلتين تركيبيتين ثابتتين متماثلتين كما في  $\text{Aut}(G)$  - زمر.

**مبرهنة كرول — سشميدت (Krull- Schmidt theorem)**

تكون الزمرة  $G$  غير قابلة للتحويل إذا كان  $G \neq 1$  و  $G$  لا تماثل جداء مباشر لزمريتين غير تافهتين، أي أنه، إذا كان

$$G \approx H \times H' \Rightarrow H = 1 \text{ أو } H' = 1$$

**مثال 28.6 (a)** إن الزمرة البسيطة غير قابلة للتحويل، لكن الزمرة غير القابلة للتحويل ليست بالضرورة أن تكون بسيطة. يمكن أن تحوي على زمرة جزئية ناظمية. مثلاً، زمرة  $S_3$  غير قابلة للتحويل لكنها تحوي على  $C_3$  كزمرة جزئية ناظمية.

(b) تكون الزمرة التبديلية المنتهية غير قابلة للتحويل إذا وفقط إذا كانت دائرية رتبتهما قوى لعدد أولي.

بالطبع، يكون هذا واضحاً من التصنيف، لكن ليس من الصعب برهانه مباشرة. لتكن  $G$  دائرية من الرتبة  $p^n$ ، وبفرض أن  $G \approx H \times H'$ . عندئذٍ يجب أن تكون كل من  $H$  و  $H'$  - زمرة  $p$ ، ولا يمكن أن يكونا كلاهما من الرتبة  $p^m$ ،  $m < n$ . وبالتالي فإنه يجب أن تكون إحداهما دائرية من الرتبة  $p^n$ ، والثانية تافهة. بالعكس، بفرض أن  $G$  تبديلية وغير قابلة للتحويل. بما أن كل زمرة تبديلية منتهية (من الواضح) عبارة عن جداء مباشر لـ  $p$  - زمرة حيث  $p$  يسمح كل الأعداد الأولية، تكون  $G$  - زمرة. إذا كان العنصر  $g$  هو العنصر ذو الرتبة الأعلى في  $G$ ، إحداها تبين بأن  $\langle g \rangle$  هو عامل مباشر في  $G$ ،  $G \approx \langle g \rangle \times H$  وهذا تناقض.

(c) كل زمرة منتهية يمكن أن تكتب كجداء مباشر لزمرة جزئية غير قابلة للتحويل (واضح).

**مبرهنة 29.6 (Krull-Schmidt)** بفرض أن  $G$  جداءً مباشراً لزمرة جزئية غير قابلة للتحويل  $G_1, \dots, G_s$  و جداءً مباشراً لزمرة جزئية غير قابلة للتحويل  $H_1, \dots, H_t$ :

$$G = G_1 \times \dots \times G_s, \quad G = H_1 \times \dots \times H_t$$

عندئذٍ  $s = t$ ، و هنا نعيد الدليل بحيث يكون  $G_i \approx H_i$ . وأكثر من ذلك، بإعطاء عدد ما  $r$  يمكن ترتيب الترفيم بحيث يكون

$$G = G_1 \times \dots \times G_r \times H_{r+1} \times \dots \times H_t$$

**البرهان.** انظر روتمان 1995, 6.36.

**مثال 30.6** لتكن  $G = F_p \times F_p$ ، و نعتبره فضاءً متجهياً من البعد 2 فوق الحقل  $F_p$ . لتكن

$$G_1 = \langle (1, 0) \rangle, \quad G_2 = \langle (0, 1) \rangle; \quad H_1 = \langle (1, 1) \rangle, \quad H_1 = \langle (1, -1) \rangle,$$

$$G = G_1 \times G_2, \quad G = H_1 \times H_2, \quad G = G_1 \times H_2$$

**ملاحظة 31.6 (a)** إن مبرهنة Krull- Schmidt تحققت أيضاً بالنسبة لزمرة غير منتهية وقد برهنت محققاً شرطي المتسلسلة بالنسبة الزمر الجزئية، أي أن، المتتاليات المتزايدة والمتناقصة للزمر الجزئية في  $G$  تصبح ثابتة.

**(b)** إن مبرهنة Krull- Schmidt تحققت أيضاً بالنسبة لزمرة بمؤثرات. مثلاً، ليكن  $\text{Aut}(G)$  مؤثراً على  $G$ ، فإن الزمر الجزئية في حالة المبرهنة ستكون جميعها مميزة.

**(c)** إذا طبقنا على الزمرة المنتهية الأبلية، تبين المبرهنة أن الزمر  $C_{m_i}$  في التحليل  $G = C_{m_1} \times \dots \times C_{m_r}$  حيث كل  $m_i$  عبارة عن قوى لعدد أولي محددة بشكل وحيد تحت سقف التماثل (والرتبة).

## تمارين

1-6 لتكن  $G$  زمرة (ليست بالضرورة أن تكون منتهية) مع المتسلسلة التركيبية المنتهية

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n = 1$$

ولتكن  $N$  زمرة جزئية ناظمية في  $G$ . بين أن

$$N = N \cap G_0 \supset N \cap G_1 \supset \dots \supset N \cap G_n = 1$$

تتحول إلى متسلسلة تركيبية للزمرة  $N$  إذا لم يوجد تكرارات.

## الفصل السابع

### تمثيلات الزمر المنتهية

### Representations of finite groups

في هذا الفصل، نعتبر  $G$  زمرة منتهية و  $F$  حقلاً. جميع الفضاءات المتجهية تكون ذات بعد منته.  $F$  - جبر هو حلقة  $A$  تحوي  $F$  في مركزها وذات بعد منته كما في  $F$  - فضاء متجهي. لن نعتبر  $A$  تبديلية.<sup>20</sup> كل  $A$  - مودولات تكون أبعادها منتهية عندئذٍ تعتبر و كأنها  $F$  - فضاء متجهي. بالنسبة لـ  $A$  - مودول  $V$ ، يرمز  $mV$  للمجموع المباشر  $m$  مرة من  $V$ .

إن المقابل (opposite)  $A^{\text{opp}}$  لـ  $F$  - الجبر  $A$  هو نفسه كما في  $A$  ما عدا المقلوب بالنسبة للضرب، أي أنه، يوجد تطبيق تقابل  $A^{\text{opp}} \leftrightarrow A : a' \mapsto a$  الذي يكون متماثلاً مع  $F$  - فضاء متجهي و يحقق الخاصة  $(ba)' = a'b'$  إذا كان  $a, b \in A$ .  
إن  $A$  - مودول غير المعدوم يكون بسيطاً (simple) إذا لم يحو على مودولات جزئية فعلية باستثناء المودول الصفري، و يكون نصف بسيط (semisimple) إذا كان متماثلاً مع المجموع المباشر لمودولات بسيطة.

### التمثيلات المصفوفية (Matrix representations)

إن التمثيلات المصفوفية من الدرجة  $n$  للزمرة  $G$  على الحقل  $F$  هو تشاكل  $G \rightarrow \text{GL}_n(F)$ . يقال بأن التمثيل أمين (faithful) إذا كان التشاكل متبايناً. لذلك فإن التمثيل الأمين يعرف  $G$  بزمرة من المصفوفات من النوع  $n \times n$ .

**مثال 1.7 (a)** يوجد تمثيل  $(\ ) \rightarrow \text{GL}_2(Q)$  لزمرة القسمة  $Q = \langle a, b \rangle$  التي ترسل  $a$  إلى  $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$  و  $b$  إلى  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . في الحقيقة، كما عرفنا  $Q$  بشكل أساسي كما في (1.17).

<sup>20</sup> لنكن  $e_1, \dots, e_n$  قاعدة لـ  $A$  مثل  $F$  - فضاء متجهي، عندئذٍ  $\sum_k a_{ij}^k e_k = e_i e_j$  لبعض  $a_{ij}^k \in F$ ، تدعى

ثوابت البنية على  $A$  بالنسبة للقاعدة  $(e_i)_i$ ، أحياناً تكون القاعدة قد اختيرت، إن الجبر  $A$  يكون محدداً بشكل وحيد بثوابت البنية فيه.



(b) لتكن  $G = S_n$ . لكل  $s \in S_n$ ، لتكن  $I(s)$  المصفوفة الحاصلة من المصفوفة المحايدة باستخدام  $s$  لتبديل الأسطر. عندئذٍ، لأي مصفوفة  $A$  من النوع  $n \times n$ ، نحصل على  $I(s)A$  من  $A$  وذلك باستخدام  $s$  لتبديل الأسطر. بشكل خاص،  $I(s)I(s') = I(ss')$ ، ومنه فإن  $s \mathbf{a} I(s)$  تمثيل لـ  $S_n$ . من الواضح، أنه أمين. كما أن كل زمرة منتهية ترسل إلى  $S_n$  من أجل مجموعة من العناصر  $n$  (مبرهنة كايلي انظر 21.1)، هذا يبين بأن كل زمرة منتهية تحوي على تمثيل مصفوفي أمين.

(c) لتكن  $G = C_n = \langle s \rangle$ . إذا كان  $F$  يحوي على  $n$  جذر لـ 1، وليكن  $x$ ، عندئذٍ يوجد التمثيل  $C_n \rightarrow GL_1(F) = F^\times$  :  $s^i \mathbf{a} x^i$ . يكون التمثيل أميناً إذا وفقط إذا كان  $x$  من الرتبة  $n$  تماماً. إذا كان  $n = p$  عدداً ابتدائياً و كان  $F$  يحوي على مميز  $p$ ، عندئذٍ  $X^p - 1 = (X - 1)^p$ ، ومنه فإن 1 هو الجذر الوحيد لـ 1 من الدرجة  $p$  في  $F$ . في هذه الحالة، التمثيل يكون تافهاً، ولكن يوجد التمثيل الأمين

$$s^i \mathbf{a} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : C_p \rightarrow GL_2(F)$$

2.7 برهن برنسايد على أن لمسألة برنسايد (انظر p33) جواب إيجابي للزمر الجزئية في  $GL_n(\mathbb{C})$ ، أي أن، كل زمرة جزئية منتهية التوليد في  $GL_n(\mathbb{C})$  بدليل منته تكون منتهية. لذلك، لا توجد زمرة منتهية التوليد غير منتهية بدليل منته ممثلة بشكل أمين على  $\mathbb{C}$ .

## جذور 1 في الحقول

كما بين المثال الأخير، إن تمثيل الزمرة على الحقل  $F$  يعتمد على جذور 1 في الحقل.  $n$  جذر لـ 1 يشكل زمرة جزئية  $m_n(F)$  في  $F^\times$ ، التي تكون دائرية (انظر 55.1). إذا كان مميز  $F$  يقسم  $n$ ، عندئذٍ  $|m_n(F)| < n$  من جهة أخرى،  $X^n - 1$  لها جذور مختلفة (سيكون الجذر المضاعف جذراً لمشتقها  $nX^{n-1}$ )، ويمكننا دائماً أن نرتب  $|m_n(F)| = n$  بتمديد  $F$ ، مثلاً، بتبديل الحقل الجزئي  $F$  في  $F[x]$  حيث  $x = e^{2\pi i/n}$ ، أو بتبديل  $F$  بـ  $F[X]/(g(X))$  حيث  $g(X)$  عامل غير قابل للتحليل لـ  $X^n - 1$  لا يقسم  $X^m - 1$  لأي قاسم فعلي  $m$  لـ  $n$ . يدعى العنصر من الرتبة  $n$  في  $F^\times$  بالجذر الابتدائي (primitive) لـ 1. لكي نقول بأن  $F$  تحوي على  $n$  جذر ابتدائي لـ 1،  $x$ ، نعني بأن الزمرة دائرية من الرتبة  $n$  و  $x$  يولدها (وبالتالي فإن مميز  $F$  يساوي 0 أو مميز ابتدائي لا يقسم  $n$ ).

## التمثيلات الخطية (Linear representations)

نتذكر من (1.4) أننا عرفنا مفهوم تأثير الزمرة  $G$  على مجموعة. عندما تكون المجموعة عبارة عن  $F$  - فضاء متجهي  $V$ ، نقول بأن التأثير خطي (linear) إذا كان التطبيق

$$gv = V \rightarrow V, x \text{ a } gx,$$

خطياً لكل  $g \in G$ . عندئذ فإن معكوس  $gV$  هو التطبيق الخطي  $(g^{-1})V$ ، و  $g \text{ a } gv : G \rightarrow GL(V)$  تشاكل. لهذا، من التأثير الخطي  $G$  على  $V$ ، نحصل على التشاكل الزمري  $G \rightarrow GL(V)$ ، وبالعكس، كل تشاكل كهذا يعرف تأثيراً خطياً للزمرة  $G$  على  $V$ . ندعو التشاكل  $G \rightarrow GL(V)$  التمثيل الخطي (Linear-representation) للزمرة  $G$  على  $V$ . نلاحظ بأن التمثيل الخطي للزمرة  $G$  على  $F^n$  هو تماماً تمثيل مصفوفي من الدرجة  $n$ .

**مثال 3.7 (a)** ليكن  $G = C_n = \langle s \rangle$ ، ولنفرض بأن  $F$  يحوي على  $n$  جذر ابتدائي لـ 1، وليكن  $x$ . ليكن  $G \rightarrow GL(V)$  تمثيلاً خطياً للزمرة  $G$ . عندئذ  $(s_L)^n = (s^n)_L = 1$  وبالتالي فإن كثيرة الحدود الأصغرية لـ  $s_L$  تقسم  $X^n - 1$ . كما أن  $X^n - 1$  لها  $n$  جذر مختلف  $x^0, \dots, x^{n-1}$  في  $F$ ، يتحلل الفضاء المتجهي إلى مجموع مباشر للفضاءات الذاتية

$$V = \bigoplus_{0 \leq i \leq n-1} V_i, \quad V_i \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid s^i v = x^i v\}$$

بالعكس، كل تحليل إلى مجموع مباشر كهذا للزمرة  $G$  ينجم عن تمثيل  $G$ .

(b) لتكن  $G$  زمرة تبديلية من الأس  $n$ ، ولنفرض بأن  $F$  تحوي على  $n$  جذر ابتدائي

لـ 1. لتكن

$$G^\vee = \text{Hom}(G, F^\times) = \text{Hom}(G, m_n(F))$$

إن تمثيل للزمرة  $G$  على الفضاء المتجهي  $V$  هو نفسه التحليل إلى مجموع مباشر

$$V = \bigoplus_{c \in G^\vee} V_c, \quad V_c \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid sv = c(s)v\}.$$

عندما تكون  $G$  دائرية، وهذه إعادة للحالة (a)، والحالة العامة تأتي بسهولة (يتحلل  $V$  مع الحفاظ على تأثير العامل الدائري الأول في  $G$ ، عندئذ يتحلل كل مجموع مع الحفاظ على تأثير العامل الدائري الثاني في  $G$ ، وهكذا).

## مبرهنة Maschke

ليكن  $G \rightarrow GL(V)$  تمثيلاً خطياً للزمرة  $G$  على  $F$  - فضاء متجهي  $V$ . يقال بأن الفضاء الجزئي  $W$  في  $V$  يكون  $G$  - لا متغيراً (invariant) إذا كان  $gW \subset W$  لكل  $g \in G$ . يقال عن  $F$  - التطبيق الخطي  $a : V \rightarrow V'$  للفضاءات المتجهية على الزمرة  $G$  التي تؤثر على بخطية أنه  $G$  - لا متغير إذا كان

$$a(gv) = g(av) \quad \text{لكل } g \in G, v \in V$$

أخيراً، يقال عن الشكل ثنائي الخطية  $f : V \times V \rightarrow F$  أنه  $G$  - لا متغير إذا كان

$$f(gv, gv') = f(v, v') \quad \text{لكل } g \in G, v, v' \in V$$

**مبرهنة 4.7 (Maschke)** ليكن  $G \rightarrow GL(V)$  تمثيلاً خطياً للزمرة  $G$ . إذا كان مميز  $F$  لا يقسم  $|G|$ ، عندئذٍ كل فضاء جزئي  $G$  - لا متغير  $W$  في  $V$  يحوي على متممة  $G$  - لا متغير، أي أنه، يوجد فضاء جزئي  $G$  - لا متغير  $W'$  بحيث يكون  $V = W \oplus W'$ .

نلاحظ بأنه تطبق المبرهنة دائماً عندما يكون مميز  $F$  هو المميز الصفري. إن الشرط على المميز تحديداً ضروري. إذا كانت  $G = \langle s \rangle$  زمرة دائرية من الرتبة  $p$  تؤثر على  $V = F^2$  كما المصفوفة  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (انظر 3.7b)، عندئذٍ يكون الفضاء الجزئي  $\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$   $G$  - لا متغير، لكن لا يوجد فضاء جزئي متمم  $F$   $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, b \neq 0$ ، يكون  $G$  - لا متغير. ولأهمية الفكرة المتضمنة، نقدم برهانين لمبرهنة Maschke.

**برهان مبرهنة Maschke (في الحالة  $F = \mathbb{C}$  أو  $\mathbb{R}$ )**

**تمهيدية 5.7** لتكن  $f$  تطبيقاً متناظراً ثنائي الخطية على  $V$ ، وليكن  $W$  فضاءً جزئياً على  $V$ . إذا كان كل من  $f$  و  $W$   $G$  - لا متغير، عندئذٍ يكون أيضاً

$$W^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(w, v) = 0, w \in W\}$$

**البرهان.** ليكن  $v \in W^\perp$  وليكن  $g \in G$ .  $f(w, gw) = f(g^{-1}w, v)$ ، لأي  $w \in W$  لأن  $f$   $G$  - لا متغير، و  $f(g^{-1}w, v) = 0$  لأن  $W$  أيضاً  $G$  - لا متغير. هذا يبين بأن  $gv \in W^\perp$ .

نتذكر من الجبر الخطي أنه إذا كان  $f$  ليس شاذاً، عندئذٍ  $V = W \oplus W^\perp$  وبالتالي لكي نبرهن على مبرهنة Maschke، يكفي أن نبين بأنه يوجد  $G$  - لا متغير تطبيق ثنائي الخطية متناظر  $f: V \times V \rightarrow F$ .

**تمهيدية 6.7** تطبيق ثنائي الخطية متناظر  $f$  على  $V$ ،

$$\bar{f}(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} f(gv, gw)$$

يكون  $G$  - لا متغير تطبيقاً ثنائي الخطية متناظر على  $V$ .

**البرهان.** من الواضح بأن  $f$  تطبيق ثنائي الخطية ومتناظر، ومن أجل  $g_0 \in G$ ،

$$\bar{f}(g_0v, g_0w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} f(gg_0v, gg_0w),$$

الذي يساوي  $\sum_{g \in G} f(gv, gw)$  لأن  $g$  تسمح كل  $G$ ، وبالتالي فإن  $g_0g$  تسمح كل  $G$ .

لسوء الحظ، لا يمكن أن نتوقع بأن  $\bar{f}$  ليس شاذاً عندما يكون  $f$  كذلك (من جهة أخرى استطعنا أن نبرهن بأن جميع  $[F[G] - \text{مودولات نصف بسيطة، دون التحديد على } F \text{ أو } G]$ ).

**تمهيدية 7.7** ليكن  $F =$  إذا كان  $f$  تطبيقاً ثنائي الخطية معرفاً موجباً على  $V$ ، عندئذٍ يكون  $\bar{f}$  كذلك أيضاً.

**البرهان.** إذا كان  $\bar{f}$  معرفاً موجباً، عندئذٍ من أجل أي  $v$  غير صفري في  $V$ ،

$$\bar{f}(v, v) = \sum_{g \in G} f(gv, gv) > 0$$

هذا يكمل برهان مبرهنة Maschke عندما  $F =$ ، لأن يوجد تحديداً تطبيق خطي معرف موجب على  $V$ . بالنقاش نفسه وباستخدام أشكال هرمية عندما  $F =$  (أو عندما يكون  $F$  أي حقل في).

**برهان مبرهنة Maschke (في الحالة العامة)**

يدعى التشاكل الذاتي  $p$  لـ  $F$  - الفضاء المتجهي  $V$  إسقاطاً إذا كان  $p^2 = p$ . إن كثيرة الحدود الأصغرية للإسقاط (projector)  $p$  تقسم  $X^2 - X = X(X - 1)$ ، ومنه فإن  $V$  يتحلل إلى مجموع مباشر للحقول الذاتية،

$$\begin{cases} V_0(p) = \{v \in V \mid pv = 0\} = \text{Ker}(p) \\ V_1(p) = \{v \in V \mid pv = v\} = \text{Im}(p) \end{cases} \quad \text{حيث } V = V_0(p) \oplus V_1(p)$$

بالعكس، إن التحليل  $V = V_0 \oplus V_1$  نجم عن المسقط  $(0, v_1) \mathbf{a} (v_0, v_1)$ .

نفرض الآن بأن  $G$  تؤثر بخطية على  $V$ . إذا كان الإسقاط  $p$  يكون  $G$  - لا متغيراً. فإنه، لكي نبرهن المبرهنة يكفي أن نبين بأن  $W$  هي صورة الإسقاط  $p$  -  $G$  لا متغير. باختيار مرة أخرى الإسقاط  $p$  -  $F$  خطي مع الصورة  $W$ ، الذي يوجد بشكل محدد، وعدل لنحصل على المسقط  $\bar{p}$  -  $G$  لا متغير مع الصورة نفسها. لكل  $v \in V$ ، ليكن

$$\bar{p}(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(p(g^{-1}v))$$

الذي يحول اتجاهه لأن  $1 \in F^\times$ ،  $|G|$ ، ويعرف  $F$  - تطبيقاً خطياً  $\bar{p}: V \rightarrow V$ . لأي  $w \in W$ ، لأي  $g^{-1}w \in W$  ومنه

$$\bar{p}(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(g^{-1}w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = w \quad (21)$$

إن صورة  $\bar{p}$  جزئية في  $W$ ، لأن  $\text{Im}(p) \subset W$  و  $W$  عبارة عن  $G$  - لا متغير، ومنه

$$\bar{p}^2(v) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{p}(\bar{p}(v)) \stackrel{(21)}{=} \bar{p}(v)$$

لأي  $v \in V$ . لهذا، يكون  $\bar{p}$  إسقاطاً، وتبين العلاقة (21) بأن  $\text{Im}(\bar{p}) \supset W$ ، وبالتالي

$$\text{Im}(\bar{p}) = W$$

بقي أن نبين بأن  $\bar{p}$  يكون  $G$  - لا متغير. لكل  $g_0 \in V$

$$\bar{p}(g_0 v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(p(g^{-1}g_0 v)) = g_0 \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g_0^{-1}g)(p(g^{-1}g_0 v)),$$

الذي يساوي  $g_0 \bar{p}(v)$ ، لأن  $g$  يمسح كل  $G$ ، وبالتالي فإن  $g_0^{-1}g$  يمسح كل  $G$ .

### جبر الزمر؛ نصف البسيطة (The group algebra; semisimplicity)

إن جبر الزمر (group algebra)  $F[G]$  معرف ليكون  $F[G]$  - فضاء متجهي بقاعدة من عناصر  $G$  مع الجداءات التي تكون على  $G$ . لهذا،

- أي عنصر في  $F[G]$  هو المجموع  $\sum_{g \in G} c_g g$ ،  $c_g \in F$
- يكون العنصران  $\sum_{g \in G} c_g g$  و  $\sum_{g \in G} c'_g g$  في  $F[G]$  متساويين إذا وفقط إذا كان  $c_g = c'_g$  لكل  $g$  و

$$\left( \sum_{g \in G} c_g g \right) \left( \sum_{g \in G} c'_g g \right) = \sum_{g \in G} c''_g g, \quad c''_g = \sum_{g_1 g_2 = g} c_{g_1} c'_{g_2} \quad \bullet$$

التأثير الخطي

$$g, v \mapsto gv : G \times V \rightarrow V$$

للزمرة  $G$  على  $F$  - الفضاء المتجهي يتحدد بشكل وحيد إلى تأثير  $F[G]$  على  $V$ ،

$$\sum_{g \in G} c_g g, v \mapsto \sum_{g \in G} c_g gv : F[G] \times V \rightarrow V,$$

الذي يحول  $V$  إلى  $F[G]$  - مودول. المودولات الجزئية لهذا التأثير هي تماماً الفضاءات الجزئية  $G$  - لا متغيرة.

ليكن  $G \rightarrow GL(V)$  تمثيلاً خطياً للزمرة  $G$ . عندما يكون  $V$  بسيطاً (نصف بسيط) وكذلك  $F[G]$  - مودول، يقال عادةً بأن التمثيل غير خزل (irreducible) (قابل للتحليل بشكل تام completely reducible). على أي حال، سوف نسميهم تمثيلاً بسيطاً (نصف بسيط).

**قضية 8.7** إذا كان ممیز  $F$  لا يقسم  $|G|$ ، عندئذٍ كل  $F[G]$  - مودول هو مجموع مباشر لمودولات جزئية بسيطة.

**البرهان.** ليكن  $V$   $F[G]$  - مودول. إذا كان  $V$  بسيطاً، عندئذٍ لا يوجد أي شيء لبرهانه. من جهة أخرى، يحوي على مودول جزئي فعلي غير معدوم  $W$ . من مبرهنة Maschke ،  $V = W \oplus W'$  حيث  $W$  عبارة عن  $F[G]$  - مودول. إذا كان كل من  $W$  و  $W'$  بسيطاً، عندئذٍ يتم البرهان، ومن جهة أخرى، يمكن أن نتابع النقاش، الذي ينتهي بعدد منته من الخطوات لأن  $V$  يبعد منته كما أنه  $F$  - فضاء متجهي.

كما أنه نكون قد لاحظنا، بأن التمثيل الخطي للزمرة  $G$  يمكن أن يعتبر  $F[G]$  - مودول. لهذا، حتى نفهم التمثيل الخطي للزمرة  $G$ ، يجب أن نفهم  $F[G]$  - مودولات، و لهذا يجب أن نفهم بنية  $F$  - الجبر  $F[G]$ . في المقطع الثالث التالي ندرس  $F$  - الجبر و مودولاتها، بشكل خاص، نبرهن مبرهنات ويدربورن المشهورة المتعلقة بـ  $F$  - الجبر التي تكون مودولاتها نصف بسيطة.

### المودولات نصف البسيطة (Semisimple modules)

في هذا الفقرة، نعتبر  $A$ ،  $F$  - جبراً.

**قضية 9.7** كل  $A$  - مودول  $V$  يمكن أن يكون كعلاقة الاحتواء

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_s = \{0\}$$

بحيث تكون زمر القسمة  $V_i/V_{i+1}$   $A$  - مودولات بسيطة. إذا كان

$$V = W_0 \supset W_1 \supset \dots \supset W_t = \{0\}$$

علاقة الاحتواء الثانية عندئذٍ  $s = t$  و توجد تبديلة  $s$  للمجموعة  $\{1, \dots, s\}$  بحيث يكون

$$V_i/V_{i+1} \approx W_{s(i)}/W_{s(i)+1} \text{ لكل } i.$$

**البرهان.** إن هذا مختلف عن مبرهنة جوردان - هولدر (2.6)، والذي يبرهن بنفس الطريقة.

## تمهيدية 10.7 بفرض

$$V \approx V_1 \oplus \dots \oplus V_s \approx V = W_1 \oplus \dots \oplus W_t$$

مع كل  $A$  - مودولات  $V_i$  و  $W_j$  البسيطة. عندئذٍ  $s = t$  و يوجد تبديلة  $s$  للمجموعة  $\{1, \dots, s\}$  بحيث يكون  $V_i \approx W_{s(i)}$ .

البرهان. كل تحليل يعرف علاقة احتواء، والتي من الممكن تطبيق القضية عليها.

**قضية 11.7** ليكن  $V$ ،  $A$  - مودول. إذا كان  $V$  مجموع مودولات جزئية بسيطة، نقول بأن  $V = \sum_{i \in I} S_i$  (ليس من الضروري أن يكون المجموع مباشراً)، عندئذٍ لأي مودول جزئي  $W$  في  $V$ ، توجد مجموعة جزئية  $J$  في  $I$  بحيث يكون

$$V = W \oplus \bigoplus_{i \in J} S_i$$

البرهان. لتكن  $J$  المجموعة الجزئية الأعظمية في  $I$  بحيث يكون المجموع  $S_J = \sum_{j \in J} S_j$  مباشراً و  $W \cap S_J = V$ . أدعي أن  $W + S_J = V$  (بالتالي فإن  $V$  مجموع مباشر لـ  $W$  و  $S_J$  حيث  $j \in J$ ). أولاً، لهذا، يكفي أن نبرهن بأن كل من  $S_i$  محتواة في  $W + S_J$ . لأن  $S_i$  بسيطة،  $(W + S_J) \cap S_i = S_i$  يساوي  $S_i$  أو  $0$ . في الحالة الأولى،  $S_i \subset (W + S_J)$ ، وفي الحالة الثانية  $S_J \cap S_i = 0$  و  $(W + S_J) \cap S_i = 0$  وهذا يتناقض مع تعريف  $I$ .

**نتيجة 12.7** إن الشروط الآتية على  $A$  - مودول  $V$  متكافئة:

(a)  $V$  نصف بسيط،

(b)  $V$  مجموع لمودولات جزئية بسيطة،

(c) كل مودول جزئي في  $V$  له متممة.

البرهان. تبين القضية بأنه من (b) ينتج (c)، ومن النقاش في برهان (7.8) من (c) ينتج (a). ومن الواضح أنه من (a) ينتج (b).

**نتيجة 13.7** إن مجموع، المودولات الجزئية، و مودولات زمر القسمة للمودولات نصف البسيطة هي نصف بسيطة.

البرهان. كل منها عبارة عن مجموع مودولات بسيطة.

## $F$ - الجبر البسيطة و مودولاتها (Simple $F$ -algebra modules)

يقال عن  $F$  - الجبر  $A$  أنه بسيط إذا لم يحو على مثاليات فعلية ثنائية الجانب غير  $0$ . سنجعله يتكرر باستخدام التوضيح الآتي:

إن نواة التشاكل  $f: A \rightarrow B$  لـ  $F$  - الجبر هو المثالي  $A$  الذي لا يحتوي 1،  
لذلك، إذا كان  $A$  بسيطاً،  
عندئذٍ  $f$  متباين.

**مثال 14.7** نأخذ المصفوفة الجبرية  $M_n(F)$ . لكل  $A, B \in M_n(F)$ ، العمود  $j$ ،  
 $(AB)_j$  لـ  $AB$  هو  $AB_j$  حيث  $B_j$  العمود  $j$  في  $B$ . لذلك، من أجل مصفوفة معطاة  
،  $B$

$$B_j = 0 \Rightarrow (AB)_j = 0$$

$$B_j \neq 0 \Rightarrow (AB)_j \text{ يمكن أن يكون اختيارياً}$$

وبالتالي فإن المثالي اليساري لـ  $M_n(F)$  هو مجموعة من الشكل  $L(I)$  حيث  $I$   
مجموعة جزئية من  $\{1, 2, \dots, n\}$  و  $L(I)$  مجموعة المصفوفات التي يكون فيها الأعمدة  $j$   
تساوي الصفر لكل  $j \notin I$ . بحالة خاصة، المثاليات الأصغر اليسارية هي المجموعات  
 $L(\{j\})$ . مثلاً،

$$L(\{2, 4\}) = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} \text{ و } L(\{3\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

هي، على الترتيب، المثالي اليساري و المثالي اليساري الأصغر. للمثاليات اليمينية الشكل  
نفسه بالنسبة للحدود في الأسطر، ومنه فإن أي مثالي ثنائي الجانب غير معدوم في  
 $M_n(F)$  يشكل حلقة كاملة.  $M_n(F)$  عبارة عن  $F$  - جبر بسيط.

**مثال 15.7** يقال عن  $F$  - جبر أنه جبر تقسيم إذا كان لكل عنصر غير معدوم  $a$  معكوساً،  
أي أنه، يوجد  $b$  بحيث يكون  $ab = 1 = ba$ . لهذا فإن جبر التقسيم يحقق كل المسلمات  
ليكون حقلاً ما عدا القانون التبادلي (ولهذا السبب يدعى أحياناً حقلاً غير تبادلي). من  
الواضح، أن جبر التقسيم لا يحوي على مثاليات فعلية، يسارية، يمينية، أو ثنائية الجانب،  
وبالتالي فهي بسيطة.

إذا كان  $D$  جبر تقسيم (division algebra)، عندئذٍ، كما في (7.14)، المثالي اليساري  
في  $M_n(D)$  هو مجموعات من الشكل  $L(I)$  و  $M_n(D)$  التي تكون بسيطة.

**مثال 16.7** لكل  $a, b \in F^\times$ ، ولتكن  $H(a, b)$  عبارة عن  $F$  - جبر مع القاعدة  
 $1, i, j, k$  (فضاء متجهي) والضرب المحدد بـ

$$i^2 = a, j^2 = b, ij = k = -ji$$



(ومنه  $ik = iij = aj$  الخ). عندئذٍ  $H(a, b)$  عبارة عن  $F$  - جبر، يدعى الجبر الرباعي (quaternion algebra) على  $F$ . مثلاً، إذا كان  $F =$  عندئذٍ  $H(-1, -1)$  الجبر الرباعي العام. يمكننا أولاً أن نبين بأن  $H(a, b)$  إما جبر تقسيم أو يتمثل مع  $M_2(F)$ . بشكل خاص، يكون بسيطاً.

**17.7** الكثير من الجبر الخطي لا يتطلب بأن يكون الحقل تبديلياً. مثلاً، النقاشات العامة تبين بأن المودول المنتهي التوليد  $V$  فوق جبر التقسيم  $D$  له قواعد، وأن كل قواعده تحوي على العدد نفسه  $n$  - نسمي  $n$  بعد  $V$  (dimension). بحالة خاصة، جميع  $D$  - مودولات المنتهية التوليد تكون حرة.

**18.7** ليكن  $A$  - جبر، ولنعتبر  ${}_A A$  رمزاً لـ  $A$  - مودول يساري. الجداء من اليمين  $a x a$  على  ${}_A A$  بالعنصر  $a$  في  $A$  يكون  $A$  - تشاكلاً ذاتياً خطياً لـ  ${}_A A$ . علاوة على ذلك، كل  $A$  - تطبيق خطي  ${}_A A \rightarrow {}_A A$  :  $j$  هو من هذا الشكل  $(1) j = a$ . لهذا،

(نعتبره  $F$  - فضاء متجهياً)  ${}_A A$   $\text{End}_A({}_A A)$

ليكن  $j_a$  التطبيق  $a x a$  عندئذٍ

$$(j_a \circ j_{a'})^{\text{def}}(1) = j_a(j_{a'}(1)) = j_a(a') = a'a = j_{a'a}(1)$$

ومنه

(نعتبره  $F$  - جبر)  ${}_A A^{\text{opp}}$   $\text{End}_A({}_A A)$

وبالتعميم،

$$\text{End}_A(V) \cong A^{\text{opp}}$$

لأي  $A$  - مودول  $V$  الذي يكون حراً من المرتبة (rank) 1، و

$$\text{End}_A(V) \cong M_n(A^{\text{opp}})$$

لأي  $A$  - مودول حر  $V$  من المرتبة  $n$  (cf. 7.30).

### المركزات (Centralizers)

ليكن  $A$ ،  $F$  - جبراً جزئياً في  $F$  - الجبر  $B$ . إن مركز (centralizer)  $A$  في  $B$  هو

$$C_B(A) = \{b \in B \mid ba = ab, \forall a \in A\}$$

وهو أيضاً  $F$  - جبر جزئي في  $B$ .

**مثال 19.7** في الأمثلة الآتية، تؤخذ الممرکزات من  $M_n(F)$ .

(a) لتكن  $A$  مجموعة من المصفوفات السلمية في  $M_n(F)$ ، أي أن،  $A = FI_n$ .

من الواضح،  $C(A) = M_n(F)$ .

(b) لتكن  $A = M_n(F)$ . عندئذ فإن  $C(A)$  هو مركز  $M_n(F)$ ، الذي نحسبه

الآن. لتكن  $e_{ij}$  المصفوفة الذي يكون فيها 1 في الموضع  $(i, j)$  والصفر في بقية المواضع، لذلك

$$e_{ij}e_{lm} = \begin{cases} e_{im}, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$$

لتكن  $a = (a_{ij}) \in M_n(F)$ . عندئذ  $a = \sum_{i,j} a_{ij} e_{ij}$  ومنه

$$ae_{lm} = \sum_i a_{il} e_{im} \quad \text{و} \quad e_{lm}a = \sum_j a_{mj} e_{lj} \quad \text{إذا}$$

كان  $a$  في مركز  $M_n(F)$ ، عندئذ  $ae_{lm} = e_{lm}a$ ، ومنه  $a_{il} = 0$

لكل  $i \neq l$ ،  $a_{mj} = 0$  لكل  $j \neq m$ ، و  $a_{ll} = a_{mm}$ . وبالتالي فإن مركز  $M_n(F)$

هو مجموعة من المصفوفات السلمية  $FI_n$ . لهذا  $C(A) = FI_n$ .

(c) لتكن  $A$  مجموعة كل المصفوفات القطرية في  $M_n(F)$ . في هذه الحالة،

$$C(A) = A$$

نلاحظ أنه في الحالات الثلاث،  $C(C(A)) = A$ .

## مبرهنة 20.7 (مبرهنة الممرکزات المزدوجة)

ليكن  $A$ ،  $F$  - جبراً، وليكن  $V$ ،  $A$  - مودول نصف بسيط أميناً. عندئذ

$$C(C(A)) = A \quad (\text{المراكز مأخوذة من } (\text{End}_F(V))).$$

البرهان. ليكن  $D = C(A)$  و ليكن  $B = C(D)$ . من الواضح أن  $A \subset B$ ، ويأتي

الاحتواء المعاكس من التمهيدية الآتية عندما نأخذ  $v_1, \dots, v_n$  لتولد  $V$  باعتباره  $F$  - فضاء متجهي.

**تمهيدية 21.7** لأي  $v_1, \dots, v_n \in V$  و  $b \in B$ ، يوجد  $a \in A$  بحيث يكون

$$av_1 = bv_1, \quad av_2 = bv_2, \dots, \quad av_n = bv_n$$

البرهان. نبرهن ذلك أولاً من أجل  $n = 1$ . نلاحظ بأن  $Av_1$  عبارة عن  $A$  - مودول جزئي

في  $V$ ، ومنه (انظر 12.7) يوجد  $A$  - مودول جزئي  $W$  في  $V$  بحيث

$$V = Av_1 \oplus W. \quad \text{ليكن } p: V \rightarrow V \text{ التطبيق } (av_1, 0) \text{ a } (av_1, w) \text{ الإسقاط الغامر}$$

على  $(Av_1)$ . إنه  $A$  - خطي، وبالتالي يقع في  $D$ ، و يحقق الخاصة  $p(v) = v$  إذا وفقط إذا كان  $v \in Av_1$ . الآن

$$p(bv_1) = b(pv_1) = bv_1,$$

ومنه  $bv_1 \in Av_1$ . كما هو مطلوب.

نبرهن الآن الحالة العامة. ليكن  $W$  المجموع المباشر لـ  $V$ ،  $n$  مرة بالتأثير القطري  $A$ ، أي أن،

$$a(v_1, \dots, v_n) = (av_1, \dots, av_n), \quad a \in A, v_i \in V$$

عندئذ فإن  $W$  عبارة عن  $A$  - مودول نصف بسيط أيضاً (13.7). إن مركز  $A$  في  $\text{End}_F(W)$  تتألف من المصفوفات  $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ،  $g_{ij} \in \text{End}_F(V)$ ، بحيث يكون  $(g_{ij}a) = (ag_{ij})$  لكل  $a \in A$ ، أي أن،  $g_{ij} \in D$  (cf. 30.7). بكلمات أخرى، إن مركز  $A$  في  $\text{End}_F(A)$  هي  $M_n(D)$ . نناقش كما في المثال 7.19(b)، باستخدام المصفوفات  $e_{ij}(d)$  حيث يتوضع  $d$  في الموضع  $ij$  و الصفر ببقية المواضع، يبين بأن مركز  $M_n(D)$  في  $\text{End}_F(W)$  يتألف من المصفوفات القطرية

$$\begin{pmatrix} b & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & b & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & b \end{pmatrix}$$

حيث  $b \in B$ . نطبق الآن الحالة  $n=1$  من التمهيدية بالنسبة لـ  $A$ ،  $W$ ،  $b$ ، و الشعاع  $(v_1, \dots, v_n)$  ليتم البرهان.

**مبرهنة 22.7** كل  $F$  - جبر بسيط متماثل مع  $M_n(D)$  لبعض من  $n$  و بعض  $F$  - جبر تقسيم  $D$ .

**البرهان.** نختار  $A$  - مودول بسيط  $S$ ، مثلاً، أي مثالي يساري أصغري في  $A$ . عندئذ يؤثر  $A$  على  $S$  بشكل أمين، لأن النواة لـ  $A \rightarrow \text{End}_F(S)$  ستكون مثالي ثنائي الجانب في  $A$  لا يحوي على 1، وبالتالي يساوي 0.

ليكن  $D$  مركز  $A$  في  $F$  - جبر  $\text{End}_F(S)$  لـ  $F$  - التطبيق الخطي  $S \rightarrow S$ . بالعودة إلى مبرهنة المراكز المزدوجة (20.7)، فإن مركز  $D$  في  $\text{End}_F(S)$  هي  $A$ ، أي أن،  $A = \text{End}_D(S)$ . إن تمهيدية شور (23.7) تبين بأن  $D$  جبر تقسيم. لذلك فإن

$D$  - مودول حر (17.7)، نقول،  $S \approx D^n$ ، ومنه  $\text{End}_D(S) \approx M_n(D^{\text{opp}})$  (انظر (7.18).

**تمهيدية 23.7 (تمهيدية شور)** لكل  $F$  - جبر  $A$  و  $A$  - مودول بسيط  $S$ ، إن  $\text{End}_A(S)$  جبر تقسيم.

**البرهان.** ليكن  $g$ ،  $F$  - التطبيق الخطي  $S \rightarrow S$ . عندئذٍ  $\text{Ker}(g)$  - مودول جزئي في  $S$ ، وبالتالي فهو يساوي  $S$  أو يساوي 0. في الحالة الأولى،  $g$  يساوي الصفر، وفي الحالة الثانية يشكل تماثلاً، أي أن، له معكوس وهو أيضاً  $A$  - خطي.

### المودولات على $F$ - الجبر البسيطة

لأي  $F$  - الجبر  $A$ ، المودولات الجزئية في  $A$  هي مثاليات يسارية في  $A$ ، و المودولات الجزئية البسيطة في  $A$  هي مثاليات أصغرية بسيطة.

**قضية 24.7** إن أي مثاليين يساريين أصغريين من  $F$  - الجبر البسيط متماثلان كـ  $A$  - المودولات اليسارية، و  $A$  مجموع مباشر لمثالياته اليسارية الأصغرية.

**البرهان.** بعد المبرهنة 22.7، يمكن أن نفرض أن  $A = M_n(D)$  لبعض الجبر البسيطة  $D$ . ذكرنا في (15.7) أن المثاليات الأصغرية في  $M_n(D)$  من الشكل  $L(\{j\})$ . من الواضح  $A = \bigoplus_{1 \leq j \leq n} L(\{j\})$  و كل  $L(\{j\})$  متماثل مع  $D^n$  بتأثير طبيعي في  $M_n(D)$ .

**مبرهنة 25.7** ليكن  $F$  - الجبر البسيط  $A$ ، و ليكن  $A$  - المودول البسيط  $S$ . عندئذٍ كل  $A$  - مودول يكون متماثلاً مع المجموع المباشر لعدد من  $S$ .

**البرهان.** ليكن  $S_0$  المثالي الأصغري اليساري في  $A$ . تبين القضية بأن  $A \approx S_0^n$  لبعض  $n$ . لتكن  $e_1, \dots, e_r$  مجموعة من مولدات  $V$  كذلك  $A$  - مودول. التطبيق

$$(a_1, \dots, a_r) \mathbf{a} \sum a_i e_i$$

نعتبر  $V$  كزمرة قسمة من المجموع المباشر  $r$  مرة من  $A$ ، وبالتالي فإنها زمرة قسمة من  $n r S_0$ .

لهذا، إن  $V$  عبارة عن مجموع مباشر لمودولات جزئية بسيطة كل منها يماثل  $S_0$ ، ومن القضية 11.7 نجد بأن  $V \approx m S_0$  لبعض  $m$ .

**نتيجة 26.7** ليكن  $F$  - الجبر البسيط  $A$ . عندئذٍ أي  $A$  - مودولين جزئيين بسيطين يكونان متماثلين، وأي  $A$  - مودولين لهما البعد نفسه على  $F$  متماثلين.  
البرهان. واضح من المبرهنة.

**نتيجة 27.7** إن العدد  $n$  في المبرهنة 7.22 محدد بـ  $A$  بشكل وحيد، و  $D$  محدد بشكل وحيد تحت سقف التماثل.  
البرهان. إذا كان  $A \approx M_n(D)$ ، عندئذٍ  $D \approx \text{End}_A(S)$  لأي  $A$  - المودول البسيط  $S$ . لهذا، ومن المبرهنة 25.7 يتم المطلوب.

## تصنيف جبر التقسيم على $F$

بعد المبرهنة 22.7، لكي نصنف الجبر البسيطة على  $F$ ، بقي تصنيف جبر التقسيم على  $F$ .

**قضية 28.7** عندما يكون  $F$  مغلق جبرياً، إن جبر التقسيم الوحيد على  $F$  هو  $F$  نفسه.  
البرهان. ليكن  $D$  جبر تقسيم على  $F$ . لأي  $a \in D$ ، إن  $F$  - الجبر الجزئي  $F[a]$  في  $D$  المولد بـ  $a$  هو حقل (لأنه منطقة تكاملية من درجة منتهية على  $F$ ). لذلك  $a \in F$ .

**29.7** إن تصنيف صفوف التماثل لجبر التقسيم على الحقل هو واحد من المسائل الهامة و الصعبة في الجبر ونظرية الأعداد. من أجل  $F =$ ، يكون جبر التقسيم الوحيد هو الجبر الرباعي العادي. إذا كان  $F$  منتهياً، فإن جبر التقسيم الوحيد بمركز  $F$  هو  $F$  نفسه (مبرهنة ويدربورن).

يسمى جبر التقسيم على  $F$  الذي مركزه  $F$  مركزياً (central) (ناظمياً سابقاً (normal)).  
بين بروفير بأن مجموعة صفوف التماثلات لجبر التقسيم المركزية على حقل يشكل زمرة، سميت (بـ هاس و نوثير) زمرة برواير (Brauer group) <sup>21</sup> للحقل. إن معنى ما جاء في

---

<sup>21</sup> إن الجداء التتسوري (tensor product)  $D \otimes_F D'$  لجبرين بسيطين مركزيين على  $F$  هو جبر بسيط مركزي أيضاً، و بالتالي يكون متماثلاً مع  $M_r(D'')$  لبعض من الجبر البسيطة المركزية  $D''$ . نعرف

$$[D][D'] = [D'']$$

إن هذا الجداء تجميعي لأن الجداءات التتسورية تجميعية، صف تماثل  $F$  هو العنصر الحيادي، و  $[D^{opp}]$  هو معكوس  $[D]$ .

الفقرة الأخيرة هو أن زمر برواير للحقول المغلقة جبرياً والحقول المنتهية هي الصفر، إن زمرة برواير في من الرتبة 2. أحصيت زمر برواير في وتمديداتها المنتهية من قبل ألبيرت، برواير، هاس، و نوثير في عام 1930 كنتيجة لصف نظرية الحقول.

## **$F$ - الجبر نصف البسيطة ومودولاتها (Semisimple $F$ - algebras and their modules)**

يقال إن  $F$  - الجبر  $A$  أنه نصف بسيط إذا كان كل  $A$  - مودول نصف بسيط (semisimple). تبين لنا المبرهنة 7.25 أن  $F$  - الجبر البسيطة تكون نصف بسيطة، و تبين مبرهنة ماسشك بأن جبر الزمرة  $[G]$  نصف بسيط عندما تكون رتبة  $G$  لا تقبل القسمة على مميز  $F$  (انظر 8.7).

قبل عرض النتيجة الرئيسية لهذه الفقرة، نتذكر بعضاً من مبرهنات المودولات الأساسية.

**30.7** ليكن  $F$  - الجبر  $A$ ، ولناخذ المودولات

$$M = M_1 \oplus \mathbf{L} \oplus M_n$$

$$N = N_1 \oplus \mathbf{L} \oplus N_n$$

وليكن  $A$  - التطبيق الخطي  $a : M \rightarrow N$ . لكل  $x_j \in M_j$ ، وليكن

$$a(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0) = (y_1, \dots, y_m)$$

عندئذ فإن  $x_j \rightarrow y_i$  عبارة عن  $A$  - التطبيق الخطي  $M_j \rightarrow N_i$ ، والذي نرمز له بالرمز  $a_{ij}$ . لهذا، فإن  $a$  يعرف المصفوفة  $m \times n$  الذي يكون فيها المعامل  $ij$  عبارة عن  $A$  - التطبيق الخطي  $M_j \rightarrow N_i$ . وبالعكس، كل مصفوفة كهذه  $(a_{ij})$  تعرف  $A$  - التطبيق الخطي  $M \rightarrow N$ ، تحديداً،

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{M} \\ x_j \\ \mathbf{M} \\ x_n \end{pmatrix} \mathbf{a} \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{L} & a_{1j} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{i1} & \mathbf{L} & a_{ij} & \mathbf{L} & a_{jn} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{m1} & \mathbf{L} & a_{mj} & \mathbf{L} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{M} \\ x_j \\ \mathbf{M} \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}(x_1) + \mathbf{L} + a_{1n}(x_n) \\ \mathbf{M} \\ a_{i1}(x_1) + \mathbf{L} + a_{in}(x_n) \\ \mathbf{M} \\ a_{m1}(x_1) + \mathbf{L} + a_{mn}(x_n) \end{pmatrix}$$

وبهذا، نرى

$$\text{Hom}_A(M, N) = \left( \text{Hom}_A(M_j, N_i) \right)_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m} \quad (22)$$

(تمائل لـ  $F$  - الفضاءات المتجهية). إذا كان  $M = N$ ، يصبح هذا التماثل تماثلاً لـ  $F$  - جبر. مثلاً، إذا كانت  $M$  مجموعاً مباشراً لـ  $m$  مرة من  $M_0$ ، عندئذٍ

$$\text{End}_A(M) = M_m(\text{End}_A(M_0)) \quad (23)$$

(مصفوفات من النوع  $m \times m$  حيث إن معاملاتها مأخوذة من الحلقة  $(\text{End}_A(M_0))$ ).

**مبرهنة 31.7** كل  $F$  - جبر نصف بسيط  $A$  يكون متماثلاً مع جداء  $F$  - جبر بسيط. البرهان. باختيار  $A$  - التماثل الخطي  $A \rightarrow \bigoplus_i r_i S_i$  حيث  $S_i$  - مودولات بسيطة، ولا يوجد تماثل بين أي اثنتين منهما. عندئذٍ  $\text{End}_A(\bigoplus_i r_i S_i) \approx \text{End}_A(\bigoplus_i r_i S_i)$ . لأن  $\text{Hom}_A(S_j, S_i) = 0$  لكل  $i \neq j$

$$\text{End}_A(\bigoplus_i r_i S_i) = \prod_i \text{End}_A(r_i S_i) \quad \text{من (22)}$$

$$\prod_i M_{r_i}(D_i) \quad \text{من (23)}$$

حيث  $D_i = \text{End}_A(S_i)$ . ومن جهة أخرى،  $A^{\text{opp}} = \text{End}_A(A)$  من (7.18)، و لذلك

$$A^{\text{opp}} \approx \prod_i M_{r_i}(D_i)$$

وبتطبيق الجبر المعاكس، نحصل على التماثل

$$A \approx \prod_i M_{r_i}(D_i^{\text{opp}})$$

بالعودة إلى تمهيدية شور (23.7)، يكون  $D_i$  جبر تقسيم، ومن (7.15) نجد بأن  $M_{r_i}(D_i^{\text{opp}})$  عبارة عن  $F$  - جبر بسيط.

**مودولات على  $F$  - جبر نصف بسيطة (Modules over semisimple  $F$ - Algebras)**

ليكن  $A = B \times C$  جداء لـ  $F$  - جبر. إن  $B$  - مودول  $M$  يتحول إلى  $A$  - مودول بالتأثير

$$(b, c)m = bm$$

**مبرهنة 32.7** ليكن  $F$  - جبر نصف البسيط، و ليكن  $A = A_1 \times \dots \times A_t$  حيث إن كل من  $A_i$  عبارة عن  $F$  - جبر بسيط. لكل  $A_i$ ، ليكن  $A_i$  - مودول بسيط  $S_i$  (cf. 26.7).

(a) كل  $S_i$  عبارة عن  $A$  - مودول بسيط، و كل  $A$  - مودول بسيط متماثل مع  $S_i$  تماماً.

(b) كل  $A$  - مودول يتماثل مع  $\bigoplus_i r_i S_i$  لبعض  $r_i \in$ ، و يكون المودولان  $\bigoplus_i r_i S_i$  و  $\bigoplus_i r'_i S_i$  متماثلين إذا وفقط إذا كان  $r_i = r'_i$  لكل  $i$ .  
**البرهان.** (a) من الواضح بأن كل من  $S_i$  بسيط عندما نعتبره  $A$  - مودول، و لا يوجد تماثل بين أي اثنين منهما. وبالتالي من (7.24) نجد بأن  $A \approx \bigoplus_i r_i S_i$  لبعض  $r_i \in$ .  
 ليكن  $A$  - مودول بسيط  $S$ ، و ليكن  $x$  عنصر غير معدوم في  $S$ . عندئذ فإن التطبيق  $S \rightarrow {}_A A : ax$  غامر، وبالتالي فإن مقصوره على مجموعة  $S_i$  في  ${}_A A$  لا يساوي الصفر، وبالتالي فهو تماثل.

(b) يبرهن على الجزء الأول من (a) ومن تعريف الحلقة نصف البسيطة، وعلى الجزء الثاني من (10.7).

## تمثيلات $G$ (The representation of $G$ )

**قضية 33.7** إن بعد مركز  $[G]$  باعتباره  $F$  - فضاء متجهي هو عدد صفوف الترافق في  $G$ .

**البرهان.** ليكن  $C_1, \dots, C_t$  صفوف الترافق في  $G$ ، و لكل  $i$ ، ليكن  $c_i$  العنصر  $\sum_{a \in C_i} a$  في  $[G]$ . سنبرهن على الحالة الأقوى:

$$(24) \quad \text{إن مركز } [G] \text{ هو } F_{c_1} \oplus \dots \oplus F_{c_t}$$

بما أن  $c_1, \dots, c_t$  مستقلة خطياً، لذلك يكفي أن نبين بأنها تولد المركز.

$$\text{لأي } g \in G \text{ و } \sum_{a \in G} m_a a \in [G]$$

$$g \left( \sum_{a \in G} m_a a \right) g^{-1} = \sum_{a \in G} m_a gag^{-1}$$



إن معامل  $a$  من اليمين في المجموع هو  $m_{g^{-1}ag}$ ، ومنه

$$g \left( \sum_{a \in G} m_a a \right) g^{-1} = \sum_{a \in G} m_{g^{-1}ag} a$$

يبين هذا بأن  $\sum_{a \in G} m_a a$  ينتمي إلى مركز  $F[G]$  إذا وفقط إذا كانت الدالة  $a \mapsto m_a$  ثابتة في صفوف الترافق، أي أن، إذا وفقط إذا كان  $\sum_i Fc_i$   $\sum_{a \in G} m_a a \in$ .

**ملاحظة 34.7** يمكن أن نعتبر عن العنصر  $\sum_{a \in G} m_a a$  في  $F[G]$  بالتطبيق  $G \rightarrow F: a \mapsto m_a$ . بهذه الطريقة،  $F[G] \approx \text{Map}(G, F)$ . إن تأثير  $G$  على  $F[G]$  يتمثل بالتأثير  $(gf)(a) = f(g^{-1}a)$  لكل  $g \in G$  بالنسبة للدالة  $f: G \rightarrow F$ . في البرهان السابق، بينا بأن عناصر مركز  $F[G]$  تتمثل تماماً بالدالة  $f: G \rightarrow F$  والتي تكون ثابتة على كل صف ترافق. تسمى هذه الدوال بدوال الصف (class function).

في ما تبقى في هذا الفصل، نفرض أن  $F$  حقل مميزه يساوي الصفر بحيث يكون  $F[G]$  يتماثل مع جداء جبر المصفوفات على  $F$ . مثلاً، يمكن أن نأخذ  $F$  ليكون حقلاً مغلق جبرياً مميزه يساوي الصفر، مثلاً، <sup>22</sup>.

يدعى التمثيل  $G \rightarrow \text{GL}(F[G], F(G))$  بالتمثيل المنظم (regular representation).

**مبرهنة 35.7 (a)** إن عدد صفوف التماثل في  $F[G]$  - مودولات بسيطة متساوية مع عدد صفوف الترافق في  $G$ .

(b) إن جداء أي تمثيل بسيط  $S$  في تمثيل منتظم يساوي درجته  $\dim_F S_i$ .

(c) لنكن  $s_1, \dots, s_t$  مجموعة تمثيلات لصفوف متماثلة من  $G$  - مودولات بسيطة، وليكن  $f_i = \dim_F S_i$  عندئذٍ

$$\sum_{1 \leq i \leq t} f_i^2 = |G|$$

**البرهان. (a)** من الفرض،  $F[G] \approx M_{f_1}(F) \times \dots \times M_{f_t}(F)$  لمجموعة من الأعداد الصحيحة  $f_1, \dots, f_t$ .

<sup>22</sup> من مبرهنة ماشك (7.8)، يكون عندئذٍ  $F[G]$  نصف بسيط، وبالتالي يكون جداءً مباشراً لجبر بسيطة

(7.32). كل منها عبارة عن جبر المصفوفات على جبر تقسيم (7.22)، لكن جبر التقسيم الوحيد الذي يكون حقلاً مغلق جبرياً هو الحقل نفسه (7-28).

من المبرهنة 32.7، يكون عدد صفوف التماثل من  $F[G]$  - المودولات البسيطة هو عدد العوامل  $t$ . إن مركز الجداء  $F$  - الجبور يساوي جداء مراكزها، وبالتالي إن مركز  $F[G]$  متماثل مع  $tF$ . لذلك فإن  $t$  يساوي بعد مركز  $F$ ، الذي نعلم بأنه يساوي عدد صفوف الترافق في  $G$ .

(b) باستخدام الرموز في (14.7)،  $M_f(F) \cong L(\{1\}) \oplus \dots \oplus L(\{r\})$ .

(c) ببساطة نحصل على المساواة

$$\dim_F F[G] = \sum_{1 \leq i \leq t} \dim M_{f_i}(F)$$

### مميزات $G$ (The characters of $G$ )

نتذكر بأن الأثر  $\text{Tr}_V(a)$  للتشاكلات الذاتية  $a: V \rightarrow V$  في الفضاء المتجهي هو  $\sum a_{ij}$  حيث  $(a_{ij})$  مصفوفة  $a$  بالنسبة لبعض القواعد لـ  $V$ . إنها مستقلة عن اختيار القواعد (إن أثار المصفوفات المترافقة متساوية).

نحصل من كل تمثيل  $(\rho: G \rightarrow \text{GL}(V))$ ، على الدالة  $cV$  على  $G$ ،  

$$cV(g) = \text{Tr}_V(\rho(g))$$

يدعى بالميزة (character)  $\chi$ . نلاحظ بأن  $cV$  يعتمد على صف التماثل لـ  $F[G]$  - مودول  $V$ ، وبأن  $cV$  عبارة عن دالة صفية. يقال بأن الميزة  $\chi$  بسيطة (simple) (أو غير خزولة) (irreducible) إذا كانت معرفة على  $FG$  - مودول بسيط. إن الميزة الأساسية (principal character)  $\chi_1$  هي تلك الميزة المعرفة بالتمثيل التافه للزمرة  $G$  (ومنه  $\chi_1(g) = 1$  لكل  $g \in G$ )، والميزة المنتظمة (regular character)  $\chi_{\text{reg}}$  هي تلك الميزة المعرفة بالتمثيل المنتظم. بحساب  $\chi_{\text{reg}}(g)$  باستخدام عناصر  $G$  كقواعد لـ  $F[G]$ ، في البداية نرى بأن  $\chi_{\text{reg}}(g)$  هو عدد العناصر  $a$  في الزمرة  $G$  بحيث يكون  $ga = a$ ، ومنه

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G|, & g = e \\ 0, & g \neq e \end{cases}$$

عندما يكون  $V$  من البعد 1، عندئذٍ يقال بأن الميزة  $c V$  خطية (linear). في هذه الحالة،  $GL(V) \times F^\times$ ، و منه  $c V(g) = r(g)$ . لذلك،  $c V$  هو تشاكل  $G \rightarrow F^\times$ ، ومنه فإن هذا التعريف "الميزة الخطية" يتوافق بشكل أساسي مع التعريف الأول.

**تمهيدية 36.7** لأي  $G$ -مودول  $V$  و  $V'$ ،

$$c V \oplus V' = c V \oplus c V'$$

البرهان. بحساب مصفوفة  $g_L$  مع بالنسبة لقاعدة  $V \oplus V'$  التي تشكلت بتركيب قاعدة  $V$  مع قاعدة  $V'$ .

لتكن  $S_1, \dots, S_t$  مجموعة كل تمثيلات صفوف التماثل من  $FG$  - مودولات بسيطة بحيث نختار  $S_1$  ليكون التمثيل التافه، ولتكن  $c_1, \dots, c_t$  الميزات المقابلة.

**قضية 37.7** إن الدوال  $c_1, \dots, c_t$  مستقلة خطياً على  $F$ ، أي أنه، إذا كان  $c_1, \dots, c_t \in F$  بحيث يكون  $\sum_i c_i c_i(g) = 0$  لكل  $g \in G$ ، عندئذٍ كل  $c_i$  تساوي الصفر.

البرهان. نكتب  $F[G] \approx M_{f_1}(F) \times \dots \times M_{f_t}(F)$ ، وليكن  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  عندئذٍ  $e_i$  تؤثر كما يؤثر 1 على  $S_i$  وكذلك 0 على  $S_j$  لكل  $i \neq j$ ، ومنه

$$c_j(e_i) = \begin{cases} f_i = \dim_F S_i, & j = i \\ 0 & , j \neq i \end{cases} \quad (25)$$

لذلك

$$\sum_i c_i c_i(e_i) = c_i f_i,$$

و التي ينتج مايلي.

**قضية 38.7** يكون  $FG$  - المودولان متماثلين إذا وفقط إذا كانت ميزتهما متساوية.

البرهان. لقد برهننا تماماً بأن ميزة التمثيل تعتمد فقط على صف التماثل لها. بالعكس، إذا كان

$$V = \bigoplus_{1 \leq i \leq t} c_i S_i, \quad c_i \in F, \quad \text{عندئذٍ فإن ميزتها هي } c V = \sum_{1 \leq i \leq t} c_i c_i \quad \text{و من (25)}$$

يتبين بأن  $c_i = c V(e_i)/f_i$ . لذلك فإن  $c V$  يحدد الجداء بكل  $S_i$  تظهر في  $V$ ،

وبالتالي فإنه يحدد صف التماثل لـ  $V$ .

**39.7** تكون القضية خاطئة إذا كان  $F$  يحوي على المميز  $p \neq 0$ . مثلاً، إن التمثيل  $C_p \rightarrow GL_2(F)$   $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  في  $s^i$  (c1.7) ليس تافهاً، لكنه يحوي على الميزة نفسها كالتمثيل التافه. حتى أن القضية خاطئة عندما يكون مميز  $F$  لا يقسم رتبة الزمرة، لأنه، لأي تمثيل  $G \rightarrow GL(V)$ ، يكون مميز تمثيل  $G$  على  $pV$  يتطابق معه الصفر.

أي دالة  $G \rightarrow F$  التي يمكن أن يعبر عنها كـ  $Z$  - تركيب خطي من الميزات تسمى بالميزة التقديرية (virtual character)<sup>23</sup>.

**قضية 40.7** إن الميزة البسيطة للزمرة  $G$  تشكل  $Z$  - قاعدة لميزات  $G$  التقديرية. **البرهان.** لتكن  $c_1, \dots, c_t$  الميزات البسيطة في  $G$ . عندئذ فإن ميزات  $G$  هي تماماً الدوال الصفية التي يمكن أن يعبر عنها بالشكل  $\sum m_i c_i, m_i \in \mathbb{Z}$ ، ومنه فإن الميزات التقديرية هي تماماً الدوال الصفية التي يمكن أن يعبر عنها بالشكل  $\sum m_i c_i, m_i \in \mathbb{Z}$ . لذلك فإن الميزات البسيطة تولد بالتحديد الـ  $Z$  - مودول للميزات التقديرية، و تبين القضية 7.37 بأنها مستقلة خطياً على  $Z$  (و حتى على  $F$ ).

**قضية 41.7** إن الميزات البسيطة في  $G$  تشكل  $F$  - قاعدة للدوال الصفية على  $G$ . **البرهان.** إن الدوال الصفية هي الدوال المؤلفة من مجموعة الصفوف المترافقة في  $G$  إلى  $F$ . كما أن هذه المجموعة تحوي على  $t$  عنصر، تشكل  $F$  - فضاءً متجهياً بعده  $t$ . كما أن الميزات البسيطة هي مجموعة العناصر المستقلة خطياً للفضاء المتجهي لذلك، يجب أن تشكل قاعدة.

نفرض الآن بأن  $F$  حقل جزئي في ثابت بالنسبة للترافق المركب  $\bar{c}$   $a$   $c$ .  
للدوال الصفية  $f_1$  و  $f_2$  على  $G$ ، تعرف

$$(f_1 | f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f_1(a) \overline{f_2(a)}$$

**تمهيدية 42.7** إن الزوج  $(|)$  هو جداء داخلي على  $F$  - فضاء الدوال الصفية على  $G$ . **البرهان.** علينا أن نبرهن بأن

<sup>23</sup> بعض المؤلفين يدعونها الميزات العامة، لكن حتى يكون هذا متجنباً: يوجد أكثر من طريقة واحدة لتعميم مفهوم الميزة.

$$\bullet (f_1 + f_2 | f) = (f_1 | f) + (f_2 | f) \text{ لكل الدوال الصفية } f_1, f_2, f,$$

$$\bullet (cf_1 | f_2) = c(f_1, f_2) \text{ لكل } c \in f \text{ و الدالتين الصفيتين } f_1, f_2,$$

$$\bullet (f_2 | f_1) = \overline{(f_1 | f_2)} \text{ لكل الدوال الصفية } f_1, f_2,$$

$$\bullet (f | f) > 0 \text{ لكل الدوال الصفية غير المعدومة } f.$$

إن كل ذلك واضح من التعريف.

لكل  $F[G]$  - المودول  $V$ ، يرمز  $F[G]$  للمودول الجزئي من العناصر المثبتة بـ  $G$ :

$$V^G = \{v \in V, gv = v; g \in G\}$$

**تمهيدية 7.43** ليكن  $p$  العنصر  $\frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} a$  في  $F[G]$ . لأي  $F[G]$  - المودول  $V$ ،

$p v$  هو إسقاط بصورة  $V^G$ .

البرهان. لأي  $g \in G$ ،

$$gp = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} ga = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} a = p \quad (26)$$

والتي منها يكون  $pp = p$  (في  $F$  - الجبر  $F[G]$ ). لذلك، لأي  $F[G]$  - المودول

$V$ ،  $p v = p v$  ومنه  $p v$  يكون إسقاطاً. إذا كانت  $v$  صورتها، نقول بأن  $v = p v_0$  عندئذٍ

$$gv = g p v_0 \stackrel{\text{def}}{=} p v_0 = v$$

ومنه فإن  $v$  ينتمي إلى  $V^G$ . وبالعكس، إذا كان  $v \in V^G$ ، من الواضح أن

$$p v = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} av = v \text{ ومنه فإن } v \text{ ينتمي إلى صورة لـ } p.$$

**قضية 44.7** لأي  $F[G]$  - مودول  $V$ ،

$$\dim_F V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} c_V(a)$$

البرهان. ليكن  $p$  كما في التمهيدية 7.43. لأن  $p \nmid v$  إسقاط، يكون  $V$  المجموع المباشر لـ  $0$  - فضاءاتها الذاتية و  $1$  - فضاءاتها الذاتية، و نبين بأن الحرف هو  $V^G$ . لذلك،  $\text{TrV}(p \cdot V) = \dim_F V^G$ . من جهة أخرى، لأن الأثر هو دالة خطية،

$$\text{Trv}(p \cdot V) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \text{TrV}(a \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} c \cdot V(a)$$

**مبرهنة 45.7** لأي  $[G] - F$  - المودولين  $V, W$ ،

$$\dim_F \text{Hom}_{F[G]}(V, W) = (c \cdot V \mid c \cdot W)$$

البرهان. تؤثر الزمرة  $G$  على الفضاء  $\text{Hom}_F(V, W)$  —  $F$  - التطبيقات الخطية  $V \rightarrow W$  لقاعدة،

$$(gj)(v) = g(j(v)), \quad g \in G, \quad j \in \text{Hom}_F(V, W), \quad v \in V$$

$$\text{Hom}_F(V, W)^G = \text{Hom}_{FG}(V, W) \quad \text{و}$$

**نتيجة 46.7** إذا كان  $c$  و  $c'$  ميزتين بسيطتين، عندئذٍ

$$(c \mid c') = \begin{cases} 1, & c = c' \\ 0, & c \neq c' \end{cases}$$

لذلك فإن المميزات البسيطة تشكل قاعدة متعامدة لفضاء الدوال الصفية على  $G$ .

## قائمة خواص الزمرة

للكتابة

## الأمثلة

للكتابة.

نلاحظ بأن العهد التاريخي لتمثيل نظرية الزمر المنتهية، يؤكد العمل "المساهمين الأساسيين الأربعة لهذه المبرهنة في مراحل تشكيلها: فيرديناند جورج فروبينوس، ويليام برينسايد، غساي سيشور، ريتشارد برواير، انظر Curtis 1999".

## للكتابة

## الزمر الجبرية الخطية

تطور المبرهنة بشكل كاف لتكون قادرة على تصنيف الزمر الجبرية البسيطة المنفصلة و تمثيلاتها في حدود مخططات دنكين. نذكر كيف نشأت زمر كوستير. نناقش كيفية تسجيل زمر المصفوفات البسيطة المنتهية.

## طبولوجية الزمر

تطور المبرهنة الأساسية و تناقش المواضيع الآتية: قياسات هار، تصنيف الزمر المتراسة موضعياً الأبليّة، ثنائية بونترينغين، تمثيل الزمر المتراسة.

## زمر لي

تطور المبرهنة الأساسية، إن معظم الزمر الطبولوجية هي زمر لي، تشرح العلاقة بين الزمر الجبرية، و تستنتج تصنيف الزمر البسيطة، تذكر بالزمر الجزئية الحسابية

## الملحق A

### تمارين محلولة

تتراوح هذه الحلول ما بين التلميح أحياناً وبين الحلول الكاملة أحياناً أخرى. أتوقع من الطلاب أن يكتبوا الحل بشكل كامل.

1-1. بالاختبار، إن العنصر الوحيد من الرتبة 2 هو  $c = a^2 = b^2$ . بما أن  $gcg^{-1}$  هو أيضاً من الرتبة 2، وبالتالي يجب أن يساوي  $c$ ، أي أن،  $gcg^{-1} = c$  لكل  $g \in Q$ . لهذا فإن  $c$  تتبادل مع جميع عناصر  $Q$ ، و  $\{1, c\}$  زمرة جزئية ناظرية في  $Q$ . إن الزمر الجزئية المتبقية من الرتب 1، 4، أو 8، وهي ناظرية بشكل تلقائي (انظر 35.1a).

$$1-2. \text{ إن العنصر } ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-3. نأخذ المجموعات الجزئية  $\{g, g^{-1}\}$  من  $G$ . كل مجموعة تحوي على عنصرين فقط ما عدا  $g$  الذي يكون من الرتبة 1 أو 2، في الحالة التي تحوي على 1 عنصر. بما أن  $G$  تساوي الاجتماع المنفصل لهذه المجموعات، يجب أن يوجد (لا يساوي الصفر) عدد زوجي من المجموعات المؤلفة من 1 عنصر، وبالتالي يوجد عنصر واحد على الأقل من الرتبة 2.

1-4. بما أن الزمرة  $G/N$  من الرتبة  $n$ ،  $(gN)^n = 1$  لكل  $g \in G$  (مبرهنة لاغرانج). لكن  $(gN)^n = g^n N$ ، ومنه  $g^n \in N$ . بالنسبة للحالة الثانية، نعتبر  $N = \{1, t\} \subset D_3$ . وهي من الدليل 3، لكن العنصر  $ts$  من الرتبة 2، ومنه  $(ts)^3 = ts \notin N$ .

1-5. ليكن  $a, b \in G$ . ولدينا  $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$ . بحالة خاصة،  $abab = e$ . بالضرب من اليمين بالعنصر  $ba$ ، نجد بأن  $ab = ba$ .

1-6. من الواضح أن قابلية القياس هي عملية انعكاسية وتناظرية، يكفي أن نبرهن بأنها متعدية. سوف نستخدم على أنه إذا كانت  $H$  زمرة جزئية في  $G$  بدليل منته في  $G$ ، عندئذٍ  $H \cap G'$  دليل منته في  $G'$  لأي زمرة جزئية  $G'$  في  $G$  (لأن التطبيق الطبيعي



$H_3$  و  $H_1$  إذا كانت  $G'/H \rightarrow G/H$  (غامر). باستخدام هذا التطبيق، ينتج بأنه إذا كانت  $H_3$  و  $H_1$  قابلة للقياس مع  $H_2$ ، عندئذٍ  $H_1 \mathbf{I} H_2 \mathbf{I} H_3$  من دليل منته في  $H_1 \mathbf{I} H_2$  و  $H_1$  في  $H_2 \mathbf{I} H_3$  (وبالتالي في  $H_1$  و  $H_3$  أيضاً). كما أن  $H_1 \mathbf{I} H_3 \supset H_1 \mathbf{I} H_2 \mathbf{I} H_3$ ، وهي أيضاً من دليل منته في كل من  $H_3$  و  $H_1$ .

2-1. نلاحظ أولاً أن أي زمرة مولدة بمجموعة تبديلية من العناصر يجب أن تكون تبديلية، ومنه فإن الزمرة  $G$  تبديلية في المسألة. من (2.8)، نجد بأن أي تطبيق  $\{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow A$  حيث  $A$  تبديلية يتمدد بشكل وحيد إلى التشاكل  $G \rightarrow A$ ، ومنه فإن للزمرة  $G$  الخاصة العامة التي تميز الزمر الحرة الأبلية على المولدات  $a_i$ .

2-2. (a) إذا كان  $a \neq b$ ، عندئذٍ فإن الكلمة  $a \dots ab^{-1} \dots b^{-1}$  مختزلة و  $1 \neq$ . لذلك، إذا كان  $a^n b^{-n} = 1$ ، عندئذٍ  $a = b$ . (b) بشكل مشابه. (c) إن الشكل المختزل لـ  $x^n, x \neq 1$  من الطول  $n$  على الأقل.

3-2. (a) بشكل عام. (b)  $C_\infty \times C_\infty$  تبديلية، و الزمر الحرة التبديلية هي 1 و  $C_\infty$  فقط. (c) بفرض أن  $a$  كلمة مختزلة غير خالية في  $x_1, \dots, x_n$ ، نقول بأن  $a = x_i \dots$  (أو  $\dots x_i^{-1}$ ). لكل  $j \neq i$ ، إن الشكل المختزل لـ  $[x_j, a] \stackrel{\text{def}}{=} x_j a x_j^{-1} a^{-1}$  لا يمكن أن يكون خالياً، ومنه فإن  $a$  و  $x_j$  لا يتبادلان.

4-2. إن العنصر الوحيد من الرتبة 2 هو  $b^2$ . للزمرة  $\langle b^2 \rangle / Q_n$  المولدان  $a$  و  $b$ ، والعلاقات  $a^{2^{n-2}} = 1, b^2 = 1, b a b^{-1} = a^{-1}$ ، والذي هو تمثيل للزمرة  $D_{2^{n-2}}$  (انظر (2.9).

5-2. (a) بمقارنة تمثيل  $D_4 = \langle r^4, s^2, s r s r = 1 \rangle$  مع تمثيل  $G$  نقترح وضع  $s = a$  و  $r = ab$  (باستخدام (2.8) بأنه توجد التشاكلات:

$$D_4 \rightarrow G, \quad r \mathbf{a} a b, \quad s \mathbf{a} a, \quad G \rightarrow D_4, \quad a \mathbf{a} s, \quad b \mathbf{a} s^{-1} r$$

إن كل من المركبات  $D_4 \rightarrow G \rightarrow D_4$  و  $D_4 \rightarrow G \rightarrow D_4$  هي التطبيقات المحايدة على العناصر المولدة، ولذلك (2.8) أيضاً فهي التطبيقات المحايدة. (b) تهمل.

6-2. بملاحظة أن  $a b^3 a^{-1} = b c^3 b^{-1}$  لكن  $b^3 = 1$  و  $c^3 = 1$ . لذلك  $a = 1$ . عندئذٍ من العلاقة الأخيرة نجد بأن  $b = 1$ .

8-2. إن العناصر  $x^2$ ،  $xy$ ،  $y^2$  تنتمي إلى النواة، وبسهولة نرى بأن  $\langle x, y | x^2, xy, y^2 \rangle$  من الرتبة (على الأكثر) 2، وبالتالي يجب أن تولد النواة (باعتبارها زمرة ناظرية على الأقل - المسألة غير واضحة). في البداية يمكننا مباشرة أن نبرهن بأن هذه العناصر حرة، أو نطبق مبرهنة نلسون - شيرير (2.6). نلاحظ بأن الصيغة في 30 p. (بشكل دقيق) تنبأ بأن النواة حرة ومن الرتبة  $2.2 - 2 + 1 = 3$ .

8-2. علينا أن نبين بأنه إذا كان العنصران  $s$  و  $t$  من زمرة منتهية و يحققان  $s^5 t^{-1} s^3 = s^5$ ، عندئذ فإن العنصر المعطى  $g$  يساوي 1. لذلك،  $s^n = 1$  لبعض  $n$ . تكون الحالة المشوقة عندما  $(3, n) = 1$ . لكن في هذه الحالة،  $s^{3r} = s$  لبعض  $r$ . وبالتالي

$$t^{-1} s^{3r} t = (t^{-1} s^3 t)^r = s^{5r}$$

$$g = s^{-1} (t^{-1} s^{-1} t) s (t^{-1} s t) = s^{-1} s^{-5r} s s^{5r} = 1;$$

انظر [ في مسألة كهذه، بحثت عن نموذج للتفصيل. أخذت وقتاً لأرى ذلك أيضاً، لكن ما حدث أخيراً أنه كان للعنصر  $g$  مرافقان فيها، كما فعلته العلاقات بالنسبة لـ  $G$  لذلك حاولت أن أجد العلاقة بينهم ].

3-1. إن النقاط الموصلة للحل هي أن  $\langle a^n \rangle \times \langle a^2 \rangle = \langle a \rangle$ . نطبق (1.49) لنرى بأن  $D_{2n}$  تتحلل كما في الجداء.

3-2. لتكن  $N$  الزمرة الجزئية الوحيدة من الرتبة 2 في  $G$ . عندئذ  $G/N$  من الرتبة 4، لكن لا توجد زمرة جزئية  $Q \subset G$  من الرتبة 4 حيث  $Q \cap N = 1$  (لأن كل زمرة من الرتبة 4 تحوي على زمرة من الرتبة 2)، ومنه  $G \neq N \times Q$  لأي  $Q$ . بنفس النقاش نطبقه على الزمر الجزئية من الرتبة 4.

3-3. لأي  $g \in G$ ،  $gMg^{-1}$  زمرة جزئية من الرتبة  $m$ ، ولذلك فهي تساوي  $M$ . لهذا فإن  $M$  (وبشكل مشابه  $N$ ) زمرة جزئية ناظرية في  $G$ ، و  $MN$  زمرة جزئية في  $G$ . إن رتبة أي عنصر في  $M \cap N$  يقسم  $\gcd(m, n) = 1$ ، ومنه فهي تساوي 1. الآن تبين (1.50) أن  $M \times N \approx MN$ ، والتي بعد ذلك ستكون من الرتبة  $mn$ ، وبالتالي فهي تساوي  $G$ .

3-4. بين أن  $GL_2(F_2)$  تبادل المتجهات الثلاثة غير المعدومة في  $F_2 \times F_2$  (فضاء متجهي من البعد 2 على  $F_2$ ).

3-5. إن الحلول الآتية مقترحة من قبل القارئ. نكتب الزمرة الرباعية بالشكل

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

(A) نأخذ مكعباً. نكتب ستة عناصر من  $Q$  من الرتبة 4 على الأوجه الستة حيث  $i$  هو معاكس  $-i$ ، الخ.. كل دوران للمكعب ينتج تماثلاً ذاتياً للزمرة  $Q$ ، و  $\text{Aut}(Q)$  هي الزمرة التناظرية للمكعب،  $S_4$ .

(B) تحوي الزمرة  $Q$  على عنصر من الرتبة 2، وهو تحديداً  $-1$ ، و ستة عناصر من الرتبة 4 وهي تحديداً  $\pm i, \pm j, \pm k$ . أي تماثل  $a$  للزمرة  $Q$  يجب أن يرسل  $-1$  إلى نفسه و ويبادل العناصر من الرتبة 4. نلاحظ بأن  $ij = k, jk = i, ki = j$ ، لذلك فإن  $a$  يجب أن ترسل المجموعات المرتبة بشكل دائري إلى المجموعات نفسها، أي، إلى أحد المجموعات الثمانية التي في القائمة:

$$\begin{array}{lll} i & j & k \\ i & -j & -k \\ i & k & -j \\ i & -k & j \end{array} \quad \begin{array}{lll} -i & -j & k \\ -i & j & -k \\ -i & -k & -j \\ -i & k & j \end{array}$$

ولأن  $(-1)=1$ ،  $a$ ، يمكن أن تبادل  $a$  أسطر القائمة، وليس من الصعب أن نرى بأن كل التباديل ممكنة.

6-3. إن الزوج

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \right\} \text{ و } N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

يحقق الشروط (i) و (ii) و (iii) في (3.7). مثلاً، من أجل (i) (يقول Maple بأن)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{b}{d} + \frac{1}{d}(b+ab) \\ 0 & 1 & -\frac{c}{d} + \frac{1}{d}(c+ac) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لا تشكل جداءً مباشراً للزمرتين لأنها ليست تبديلية.

1-4. ليكن  $g$  مولداً للزمرة  $C_\infty$ . عندئذ فإن المولد الآخر الوحيد هو  $g^{-1}$ ، و التماثل غير التافه الوحيد هو  $g^{-1} a g$ . بالتالي  $\text{Aut}(C_\infty) = \{\pm 1\}$ . إن التشاكل  $S_3 \rightarrow \text{Aut}(S_3)$  متباين لأن  $Z(S_3) = 1$ ، لكن  $S_3$  يحوي على ثلاثة عناصر هي  $a_1$ ،  $a_2$  و  $a_3$  من الرتبة

2 و على عنصرين وهما  $b$  و  $b^2$  من الرتبة 3. إن العنصرين  $a_1$  و  $b$  يولدان  $S_3$ ، و يوجد فقط ستة احتمالات من أجل  $a(a_1)$ ،  $a(b)$ ، ومنه  $S_3 \rightarrow \text{Aut}(S_3)$  غامر أيضاً.

2-4. لتكن  $H$  زمرة جزئية فعلية في الزمرة  $G$ ، ولتكن  $N = N_G(H)$ . إن عدد مرافقات  $H$  يحقق  $(G:N) \leq (G:H)$  (انظر 4.8). بما أن كل مرافق لـ  $H$  يحوي على  $(H:1)$  عنصر و المرافقات تتداخل (على الأقل) في  $\{1\}$ ، نرى بأن

$$|\mathbf{U}gHg^{-1}| < (G:H)(H:1) = (G:1).$$

بالنسبة للجزء الثاني، نختار  $S$  لتكون مجموعة من تمثيلات صفوف الترافق.

3-4. بالعودة إلى 4.17 و 4.18، توجد زمرة جزئية ناظمية  $N$  من الرتبة  $p^2$ ، والتي تكون تبديلية. نبين الآن أن  $G$  تحوي على عنصر  $c$  من الرتبة  $p$  و لا ينتمي إلى  $N$ ، وبالتالي فإن  $\langle c \rangle = N \times G$ ، الخ...

4-4. لتكن  $H$  زمرة جزئية دليلها  $p$ ، ولتكن  $N$  نواة التطبيق  $G/H \rightarrow \text{Sym}(G/H)$  وهي أكبر زمرة جزئية ناظمية في  $G$  ومحتواة في  $H$  (انظر 4.22). إذا كان  $N \neq H$ ، عندئذٍ  $(H:N)$  تقبل القسمة على العدد الأولي  $p$ ، و  $q \geq p$ ، و  $(G:N)$  تقبل القسمة على  $pq$ . لكن  $pq$  لا تقسم  $p!$  وهذا تناقض.

5-4. نثبت  $G$  في  $S_{2m}$ ، وليكن  $\mathbf{I}G = S_{2m}$ .  $N = S_{2m}$  عندئذٍ  $G/N \rightarrow S_{2m}/A_{2m} = C_2$ ، ومنه  $(G:N) \leq 2$ . ليكن  $a$  عنصر من الرتبة 2 في  $G$ ، وليكن  $b_1, \dots, b_m$  مجموعة من المرافقات اليمينية للزمرة  $\langle a \rangle$  في  $G$ ، لذلك فإن  $G = \{b_1, ab_1, \dots, b_m, ab_m\}$ . إن صورة  $a$  في  $S_{2m}$  هو جداء  $m$  مناقلة  $(b_1, ab_1), \dots, (b_m, ab_m)$ ، وبما أن  $m$  فردي، ينتج بأن  $a \notin N$ .

6-4. (a) إن عدد الأسطر الأولى الممكنة يساوي  $2^3 - 1$ ، و الأسطر الثانية  $2^3 - 2$ ، و الأسطر الثالثة  $2^3 - 2^2$ ، وبالتالي  $(G:1) = 7 \times 6 \times 4 = 168$ .

(b) ليكن  $V = F_2^3$ . عندئذٍ  $|V| = 2^3 = 8$ . كل خط مار من مبدأ الإحداثيات يحوي على نقطة واحدة تماماً لا تساوي مبدأ الإحداثيات، ومنه  $|X| = 7$ .

(c) نشكل قائمة بالميزات الممكنة و كثيرات الحدود الأصغرية:

| الصفات                             | الحدودية الأصغرية | الحجم | رتبة العنصر في الصف |
|------------------------------------|-------------------|-------|---------------------|
| $X^3 + X^2 + X + 1$                | $X + 1$           | 1     | 1                   |
| $X^3 + X^2 + X + 1$                | $(X + 1)^2$       | 21    | 2                   |
| $X^3 + X^2 + X + 1$                | $(X + 1)^3$       | 42    | 4                   |
| $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 + X + 1)$   | نفسه              | 56    | 3                   |
| $X^2 + X + 1$ (غير قابل للتحليل)   | نفسه              | 24    | 7                   |
| $X^3 + X^2 + 1$ (غير قابل للتحليل) | نفسه              | 24    | 7                   |

إن الحجم هنا يرمز إلى عدد عناصر صفوف الترافق.

الحالة 5: ليكن  $a$  التشاكل الذاتي مع كثيرة الحدود المميزة  $X^3 + X^2 + 1$ . نجد من كونها كثيرة حدود أصغرية أن  $a^7 = 1$ ، ومنه فإن  $a$  من الرتبة 7. نلاحظ أن  $V$  عبارة عن  $F_2[a]$  - مودول حر ومن رتبة واحدة، ومنه فإن ممرکز  $a$  في  $G$  هو  $\langle a \rangle$   $IG = F_2[a]$ . لهذا  $|C_G(a)| = 7$ ، وعدد العناصر في صف ترافق  $a$  يساوي  $168/7 = 24$ .

الحالة 6: تماماً كما في الحالة 5.

الحالة 4: هنا  $V = V_1 \oplus V_2$  كما أنه  $F_2[a]$  - مودول، و

$$\text{End}_{F_2[a]}(V) = \text{End}_{F_2[a]}(V_1) \oplus \text{End}_{F_2[a]}(V_2)$$

ينتج أن  $|C_G(a)| = 3$ ، ومنه عدد مرافقات  $a$  يساوي  $168/3 = 56$ .

الحالة 3: يكون هنا  $\langle a \rangle \neq IG = F_2[a]$ ،  $C_G(a)$  التي تكون من الرتبة 4.

الحالة 1:  $a$  هو العنصر الحيادي هنا.

الحالة 2: في هذه الحالة يكون  $V = V_1 \oplus V_2$  عبارة عن  $F_2[a]$  - مودول، حيث يؤثر

$a$  كتأثير 1 على  $V_1$  ويملك كثيرة الحدود  $X^2 + 1$  على  $V_2$ . إما تتحلل، أو إنها بسيطة

نلاحظ بأن صف الترافق هذا يحوي على العناصر الباقية.

(d) بما أن  $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ ، ستكون الزمرة الجزئية الخاصة غير التافهة من الرتبة

24، 21، 56، 14، 7، 12، 6، 3، 4، 2، أو 84

إذا كانت  $H$  ناظرية، ستكون عبارة عن اجتماع منفصل لـ  $\{1\}$  وبعض صفوف الترافق

الأخرى، ومنه  $1 + \sum c_i = (N : 1)$  حيث  $c_i$  تساوي 21، 24، 42، أو 56، لكن لن

يحدث هذا.

7-4. بما أن  $G/Z(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$ ، نرى أن  $G/Z(G)$  دائرية، و من (4.19) نجد بأن  $G$  تبديلية. إذا كانت  $G$  منتهية و غير دائرية، فهي تحوي العامل  $C_{p^r} \times C_{p^s}$  الخ ..

8-4. من الواضح أن  $(1j)(1i)(1j) = (ij)$ . بالتالي أي زمرة جزئية تحوي على  $(12), (13), \dots$  تحوي كل المناقلات، و نعلم بأن  $S_n$  مولدة بالمناقلات.

9-4. نلاحظ بأن  $C_G(x) \cap H = C_H(x)$ ، وبالتالي سيكون  $H/C_H(x) \approx H.C_G(x)/C_G(x)$ . برهن أن كل صف يحوي على نفس العدد  $c$  من العناصر. عندئذٍ

$$|K| = (G : C_G(x)) = (G : H.C_G(x))(H.C_G(x) : C_G(x)) = kc$$

10-4. (a) المساواة الأولى تأتي من المسألة السابقة. بالنسبة للثانية، نلاحظ أن  $s$  تتبادل مع كل الأدوار في تحليلها، ومنه يجب أن تكون زوجية (أي أن، طولها فردي)، إذا كان لدورين الطول الفردي نفسه  $k$ ، يمكن أن نجد أولاً جداء  $k$  مناقلة تتبادل معهم. و تتبادل مع  $s$ ، وبالعكس، نبين أنه إذا كانت تجزئة  $n$  المعرفة بـ  $s$  تتألف من أعداد صحيحة مختلفة، عندئذٍ تتبادل  $s$  فقط مع الزمرة المولدة بالأدوار في تحليلها الدوري.

(b) نسجل صفوف الترافق في  $S_7$ ، أحجامها، التماثل، و (عندما يكون التكافؤ زوجياً) فيما إذا كان منفصلاً في  $A_7$ .

|    | الدور         | الحجم | تماثل | منفصلة في $A_7$ | تحتوي $C_7(s)$   |
|----|---------------|-------|-------|-----------------|------------------|
| 1  | (1)           | 1     | $E$   | $N$             |                  |
| 2  | (12)          | 21    | $O$   |                 |                  |
| 3  | (123)         | 70    | $E$   | $N$             | (67)             |
| 4  | (1234)        | 210   | $O$   |                 |                  |
| 5  | (12345)       | 504   | $E$   | $N$             | (67)             |
| 6  | (123456)      | 840   | $O$   |                 |                  |
| 7  | (1234567)     | 720   | $E$   | $Y$             | 720 لا تقسم 2520 |
| 8  | (12)(34)      | 105   | $E$   | $N$             | (67)             |
| 9  | (12)(345)     | 420   | $O$   |                 |                  |
| 10 | (12)(3456)    | 630   | $E$   | $N$             | (12)             |
| 11 | (12)(3456)    | 504   | $O$   |                 |                  |
| 12 | (123)(456)    | 280   | $E$   | $N$             | (14)(25)(36)     |
| 13 | (123)(4567)   | 420   | $O$   |                 |                  |
| 14 | (12)(34)(56)  | 105   | $O$   |                 |                  |
| 15 | (12)(34)(567) | 210   | $E$   | $N$             | (12)             |

11-4. بالعودة إلى Maple،  $a$  (13)(26)(45)،  $b$  (12)(34)(56)،  $n = 6$ .  
 12-4. بما أن  $\text{Stab}(gx_0) = g \text{Stab}(x_0) g^{-1}$ ، إذا كان  $H \subset \text{Stab}(x_0)$  عندئذٍ  
 $H \subset \text{Stab}(x_0)$  لكل  $x$ ، ومنه  $H = 1$ ، بنقض الفرض. تكون الآن  $\text{Stab}(x_0)$   
 أعظمية، ومنه  $H \cdot \text{Stab}(x_0) = G$ ، التي تبين بأن  $H$  تؤثر بشكل متعدٍ.  
 1-5. ليكن  $p$  عدداً أولياً يقسم  $|G|$  ولتكن  $p$  - زمرة سيلو الجزئية  $S$ ، من الرتبة  
 $p^m$ .

عندئذٍ تحتوي  $S$  على الأكثر

$$1 + p + \dots + p^{m-1} = \frac{p^m - 1}{p - 1} < p^m$$

عنصر رتبة كل منها أقل من  $p^m$ ، وبالتالي يجب أن تحتوي على عنصر من الرتبة  $p^m$ .  
 لذلك، تكون دائرية، ومنه فهي تحتوي على  $p^m - p^{m-1}$  عنصر من الرتبة  $p^m$ .  $p$  -  
 زمرة سيلو الجزئية الثانية ستحتوي أيضاً على  $p^m - p^{m-1}$  عنصراً من الرتبة  $p^m$ ، و  
 ستكون مختلفة عن عناصر  $S$ ، ولا يمكن أن توجد زمرة مثلها. لذلك فإن  $G$  تحتوي على  
 $p$  - زمرة سيلو جزئية واحدة فقط لكل  $p$  يقسم رتبته، وكل منها تكون دائرية. الآن تبين

(5.9) أن  $G$  عبارة عن جداء لزممر دائرية رتبة كل منها أعداد أولية نسبياً، و بالتالي تكون هي أيضاً دائرية.



## الملحق B

### مسائل غير محلولة

34. برهن أن الزمرة المنتهية  $G$  تحوي على زمرة جزئية أعظمية واحدة فقط ويجب أن تكون  $p$  - زمرة دائرية،  $p$  عدد أولي.

35. ليكن  $a$  و  $b$  عنصرين من  $S_{67}$ . إذا كان كل من  $a$  و  $b$  من الرتبة 146 و  $ab = ba$ ، ما هي الرتب الممكنة للجداء  $ab$ ؟

36. بفرض أن  $G$  زمرة مولدة بالمجموعة  $X$ .

(a) بين أنه إذا كان  $g x g^{-1} \in X$  لكل  $g \in G$ ،  $x \in X$ ، عندئذ الزمرة الجزئية المبادلة في  $G$  مولدة بمجموعة كل العناصر  $x y x^{-1} y^{-1}$  لكل  $x, y \in X$ .

(b) بين أنه إذا كان  $x^2 = 1$  لكل  $x \in X$ ، عندئذ فإن الزمرة الجزئية  $H$  في  $G$  مولدة بمجموعة كل العناصر  $x y$  لكل  $x, y \in X$  من الدليل 1 أو 2.

37. بفرض  $p \geq 3$  و  $2p - 1$  عددين أوليين (مثلاً،  $p = 3, 7, 19, 31, \dots$ ). برهن، أو لا تبرهن بمثال، أن كل زمرة من الرتبة  $p(2p - 1)$  تبديلية.

38. لتكن  $H$  زمرة جزئية في الزمرة  $G$ . برهن أو لا تبرهن مايلي:

(a) إذا كانت  $G$  منتهية و  $P$  عبارة عن  $p$  - زمرة سيلو جزئية، عندئذ  $H \cap P$  هي  $p$  - زمرة سيلو جزئية في  $H$ .

(b) إذا كانت  $G$  منتهية،  $P$  عبارة عن  $p$  - زمرة سيلو جزئية، و  $H \supset N_G(P)$ ، عندئذ  $N_G(H) = H$ .

(c) إذا كان  $g$  عنصراً من  $G$  حيث إن  $g H g^{-1} \subset H$ ، عندئذ  $g \in N_G(H)$ .

39. برهن أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 616.

40. ليكن  $n$  و  $k$  عددين صحيحين  $1 \leq k \leq n$ . لتكن  $H$  زمرة جزئية في  $S_n$  مولدة بالدور  $(a_1, \dots, a_k)$ . أوجد رتبة مركز  $H$  في  $S_n$ . بعدئذ أوجد رتبة منظم  $H$  في  $S_n$ . [منظم  $H$  هو المجموعة  $G$  حيث  $g h g^{-1} = h$  لكل  $h \in H$  و هي أيضاً زمرة جزئية في  $G$ ].

41. برهن أو لا تبرهن الحالة الآتية: إذا كانت  $H$  زمرة جزئية من زمرة غير منتهية  $G$ ، عندئذٍ لكل  $x \in G$ ، يتحقق  $xHx^{-1} \subset H \Rightarrow x^{-1}Hx \subset H$ .

42. لتكن  $H$  زمرة جزئية ناظرية منتهية من الزمرة  $G$ ، وليكن  $g$  عنصر من  $G$ . بفرض أن  $g$  من الرتبة  $n$  وأن العنصر الوحيد من  $H$  الذي يتبادل مع  $g$  هو  $1$ . بين أن:

(a) التطبيق  $h \mapsto g^{-1}h^{-1}g$  يقابل من  $H$  إلى  $H$ .

(b) المرافق  $gH$  يتألف من عناصر  $G$  ذات الرتب  $n$ .

43. بين أنه إذا كانت تبديلة ما في زمرة جزئية  $G$  من  $S_n$  ترسل  $x$  إلى  $y$ ، عندئذٍ لمنظمات كل من المثبتات  $\text{Stab}(x)$  و  $\text{Stab}(y)$  لـ  $x$  و  $y$  الرتبة نفسها.

44. برهن أنه إذا كانت كل زمرة سيلو الجزئية من زمرة منتهية  $G$  ناظرية و أبلية، عندئذٍ فإن الزمرة أبلية.

45. بفرض أن زمرة ما مولدة بالعنصرين  $a$  و  $b$  وتحقق العلاقات:  $a^3 = b^2, a^m = 1, b^n = 1$  حيث  $m$  و  $n$  أعداداً صحيحة موجبة. من أجل أي قيمة لـ  $m$  و  $n$  يمكن أن تكون  $G$  غير منتهية.

46. بين أنه إذا كانت  $G$  زمرة مولدة بالعنصرين  $x$  و  $y$  والعلاقات المعروفة  $x^2 = y^3 = (xy)^4 = 1$  هي زمرة قابلة للحل، و أوجد رتبة  $G$  و زمرة المشتقة المتتالية  $G', G'', G'''$ .

47.  $G$  زمرة مولدة بالمجموعة الناظرية  $X$  المؤلفة من العناصر من الرتبة 2. بين أن الزمرة الجزئية المبدلة  $G'$  في  $G$  مولدة بكل مربعات الجداء  $xy$  لأزواج من عناصر  $X$ .

48. حدد المنظم  $N$  في  $GL_n(F)$  المؤلف من الزمر الجزئية  $H$  للمصفوفات القطرية، و برهن أن  $N/H$  متناظرة مع الزمرة المتناظرة  $S_n$ .

49. لتكن  $G$  زمرة مولدة بالعنصرين  $x$  و  $y$  والعلاقات المعروفة  $x^2, y^5, (xy)^4$ . ما هو الدليل في  $G$  للزمرة المبدلة  $G'$  في  $G$ .

50. لتكن  $G$  زمرة منتهية، و  $H$  زمرة جزئية مولدة بالعناصر ذات الرتب الفردية. بين أن  $H$  ناظرية، و أن رتبة  $G/H$  قوى للعدد 2.

51. لتكن  $G$  زمرة منتهية، و لتكن  $p$  - زمرة سيلو الجزئية  $P$ . بين أنه إذا كانت  $H$  زمرة جزئية في  $G$  حيث إن  $(P) \subset H \subset G$  عندئذٍ

(a) إن منظم  $H$  في  $G$  يساوي  $H$  ،

(b)  $(G : H) \equiv 1 \pmod{p}$  .

52. لتكن  $G$  زمرة من الرتبة 25 . 33. بين أن  $G$  قابلة للحل. (هنت: الخطوة الأولى هي إيجاد زمرة جزئية ناظرية من الرتبة 11 باستخدام مبرهنات سيلو.)

53. بفرض أن  $a$  تشاكل ذاتي للزمرة  $G$  الذي هو تطبيق من  $G$  إلى  $G$  بكاملها و يتبادل مع كل التماثلات الذاتية الداخلية للزمرة  $G$ . بين أنه إذا كانت تساوي زمرتها الجزئية المبادلة، عندئذٍ  $ax = x$  لكل  $x$  في  $G$ .

54. لتكن  $G$  زمرة منتهية مع المولدات  $s$  و  $t$  و التي كل منهما من الرتبة 2. لتكن  $n = (G : 1)/2$ .

(a) بين أن  $G$  زمرة جزئية دائرية من الرتبة  $n$ . بفرض أن  $n$  عدد فردي.

(b) صف جميع صفوف ترافق  $G$ .

(c) صف جميع الزمر الجزئية في  $G$  التي تكون من الشكل

$$C(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}, x \in G$$

(d) صف جميع الزمر الجزئية الدائرية في  $G$ .

(e) صف جميع الزمر الجزئية في  $G$  في حالتي (b) و (d).

(f) برهن أن أي  $p$  - زمريتين جزئيتين في  $G$  مترافقتان ( $p$  أولي).

55. إذا كانت  $G$  تؤثر بشكل متعدٍ على المجموعة  $X$ . و لتكن  $N$  زمرة جزئية ناظرية في  $G$ ، و لتكن  $Y$  مجموعة مدارات  $N$  في  $X$ . برهن أن:

(a) يوجد مؤثر طبيعي للزمرة  $G$  على المجموعة  $Y$  الذي يكون متعدياً و بين أن كل

مدار من مدارات  $N$  على  $X$  لها القدرة نفسها.

(b) وضح بمثال أنه إذا كانت  $N$  غير ناظرية عندئذٍ فإنه ليس من الضروري أن تكون

لمداراتها القدرة نفسها.

56. برهن أن كل زمرة جزئية أعظمية من  $p$  - زمرة منتهية تكون ناظرية بدليل أولي ( $p$  أولي).

57. لتكن  $G$  زمرة فوق دائرية (metacyclic) إذا حوت على زمرة جزئية ناظرية دائرية  $N$  مع زمرة القسمه الدائرية  $G/N$ . برهن أن الزمر الجزئية و زمر القسمه من الزمر تحت الدائرية هي زمر فوق دائرية. برهن أو لا تبرهن أن الجداءات المباشرة لزمر فوق دائرية هي فوق دائرية.

58. لتكن  $G$  زمرة مؤثرة بشكل متعدٍ ومضاعف على المجموعة  $X$ ، وليكن  $x \in X$ . برهن أن:

(a) المثبت  $G_x \rightarrow x$  هو زمرة جزئية أعظمية في  $G$ .

(b) إذا كانت  $N$  زمرة جزئية ناظرية في  $G$ ، عندئذٍ إما  $N$  جزئية في  $G_x$  أو تؤثر بشكل متعدٍ على  $X$ .

59. ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من الزمرة  $G$  حيث إن  $x^{-1}y^5 = yx$ ،  $x$  من الرتبة 3، و  $y \neq 1$  من رتبة فردية. اوجد (بدون برهان) رتبة  $y$ .

60. لتكن  $H$  زمرة جزئية أعظمية من الزمرة  $G$ ، ولتكن  $A$  زمرة جزئية ناظرية في الزمرة  $H$  حيث إن مرافقات  $A$  في  $G$  تولدها.

(a) برهن أنه إذا كانت  $N$  زمرة جزئية ناظرية في  $G$ ، عندئذٍ إما  $N \subset H$  أو  $G = NA$ .

(b) لتكن  $M$  تقاطع مرافقات  $H$  في  $G$ . برهن أنه إذا كانت  $G$  تساوي زمرةها الجزئية المبادلة و  $A$  أبلية، عندئذٍ  $G/M$  زمرة بسيطة.

61. (a) برهن أن مركز الزمرة غير الأبلية من الرتبة  $p^3$ ،  $p$  أولي، يكون من الرتبة  $p$ .

(b) ما هي الزمرة غير الأبلية من الرتبة 61 التي يكون مركزها غير دائري.

62. بين أن الزمرة مع المولدات  $a$  و  $b$  والعلاقات المعرفة

$$a^2 = b^2 = (ab)^3 = 1$$

متماثلة مع زمرة التناظرات  $S_3$  من الدرجة 3 بإعطاء، مع البرهان، التماثل الصريح.

63. برهن أو أعط مثال معاكس:

(a) كل زمرة من الرتبة 30 تحوي على زمرة جزئية ناظرية من الرتبة 51.

(b) كل زمرة من الرتبة 30 تكون عديمة القوى.

64. ليكن  $t \in \mathbb{Z}$ ، ولتكن  $G$  زمرة مع المولدات  $x$  و  $y$  والعلاقات  $x y x^{-1} = y^t, x^3 = 1$ .

(a) ما هي الشروط اللازمة والكافية على  $t$  لتكون  $G$  منتهية.

(b) في الحالة التي تكون فيها  $G$  منتهية، حدد رتبته.

65. لتكن  $G$  زمرة من الرتبة  $pq$ ،  $p \neq q$  عدنان أوليان.

(a) برهن أن  $G$  قابلة للحل.

(b) برهن أنه إذا كانت  $G$  عديمة القوى  $\Leftrightarrow G$  أبلية  $\Leftrightarrow G$  دائرية.

(c) هل  $G$  عديمة القوى؟ (برهن أو أوجد مثال معاكس).

66. لتكن  $X$  مجموعة مؤلفة من  $p^n$  عنصر،  $p$  أولي، ولتكن  $G$  زمرة منتهية تؤثر على  $X$  بشكل متعدٍ. برهن أن كل  $p$  - زمرة سيلو جزئية في  $G$  تؤثر على  $X$  بشكل متعدٍ.

67. لتكن  $G = \langle a, b, c \mid bc = cb, a^4 = b^2 = c^2 = 1, ac a^{-1} = c, ab a^{-1} = bc \rangle$ . حدد رتبة  $G$  و أوجد المتسلسلة المشتقة للزمرة  $G$ .

68. لتكن  $N$  زمرة جزئية ناظرية غير تافهة من الزمرة عديمة القوى  $G$ . برهن أن  $N \cap Z(G) \neq 1$ .

69. لا تفرض مبرهنات سيلو في المسألة.

(a) لتكن  $H$  زمرة جزئية من زمرة منتهية  $G$ ، ولتكن  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في  $G$ . برهن أنه يوجد  $x \in G$  حيث إن  $x P x^{-1} \cap H$  هي  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في  $H$ .

(b) برهن أن الزمرة المؤلفة من المصفوفات  $\begin{pmatrix} 1 & * & L \\ 0 & 1 & L \\ 0 & L & 1 \end{pmatrix}$  من النوع  $n \times n$  هي  $P$  - زمرة سيلو الجزئية في  $GL_n(F_p)$ .

70. بفرض أن  $H$  زمرة جزئية ناظرية في الزمرة المنتهية  $G$  حيث إن  $G/H$  دائرية ومن الرتبة  $n$ ، حيث  $n$  و  $(G:1)$  أوليان نسبياً. برهن أن  $G$  يساوي الجداء شبه المباشر  $H \times_q S$  حيث  $S$  زمرة جزئية دائرية من الرتبة  $n$ .

71. لتكن  $H$  زمرة جزئية ناظرية أصغرية من الزمرة  $G$  المنتهية و القابلة للحل. برهن أن  $H$  متماثلة مع المجموع المباشر للزمر الدائرية من الرتبة  $p$  لبعض من الأعداد الأولية  $p$ .

72. (a) برهن أنه تكون رتبة الزمرتين الجزئيتين  $A$  و  $B$  من الزمرة  $G$  منتهية إذا كانت  $A \mid B$  من رتبة منتهية.

(b) يقال عن العنصر  $x$  في الزمرة  $G$  أنه  $FC$ -عنصر إذا كان مثبتته من دليل منته في  $G$ . برهن أن مجموعة جميع  $FC$  عناصر في  $G$  تكون ناظرية.

73. لتكن  $G$  زمرة من الرتبة  $p^2 q^2$  للعددين الأوليين  $p > q$ . برهن أن  $G$  تحوي على زمرة جزئية ناظرية من الرتبة  $p^n$  لبعض  $n \geq 1$ .

74. (a) لتكن  $K$  زمرة منتهية عديمة القوى، ولتكن  $L$  زمرة جزئية في  $K$  بحيث  $L.dK = K$ ، حيث  $dK$  زمرة جزئية مشنقة. برهن أن  $L = K$ . [يجب أن تفرض بأن الزمرة المنتهية تكون عديمة القوى إذا فقط إذا كانت كل زمرة جزئية أعظمية تكون ناظرية].

(b) لتكن  $G$  زمرة منتهية. إذا حوت  $G$  على زمرة جزئية  $H$  بحيث يكون كل من  $G/dH$  و  $H$  عديمة القوى، برهن أن  $G$  عديمة القوى.

75. لتكن  $G$  -  $p$  زمرة غير دائرية منتهية. برهن أن الشروط الآتية متكافئة:

$$(a) \quad (G : Z(G)) \leq p^2.$$

(b) كل زمرة جزئية أعظمية في  $G$  تكون أبلية.

(c) توجد على الأقل زمريتان جزئيتان أعظمتان بحيث تكونان أبليتين.

76. برهن أن كل زمرة  $G$  من الرتبة 56 يمكن أن تكتب (بشكل غير تافه) على شكل جداء شبه مباشر. أوجد (بدون برهان) زمريتين غير متماثلتين و غير أبليتين من الرتبة 56.

77. لتكن  $G$  زمرة منتهية و  $G \rightarrow G : j$  تشاكل

(a) برهن أنه يوجد عدد صحيح  $n \geq 0$  حيث إن  $j^n(G) = j^m(G)$  لكل الأعداد

$$الصحيحة \quad m \geq n. \quad \text{لتكن} \quad a = j^n.$$

(b) برهن أن  $G$  جداء شبه مباشر للزمريتين الجزئيتين  $\text{Ker}(a)$  و  $\text{Im}(a)$ .

(c) برهن أن  $\text{Im}(a)$  ناظرية في  $G$  أو أعط مثال معاكس.

78. لتكن  $S$  مجموعة تمثيلات لصفوف الترافق في زمرة منتهية  $G$  و لتكن  $H$  زمرة جزئية في  $G$ . برهن أن  $S \subset H \Rightarrow H = G$ .

79. لتكن  $G$  زمرة منتهية.

- (a) برهن أنه توجد زمرة جزئية وحيدة  $K$  في  $G$  بحيث (i)  $G/K$  قابلة للحل و (ii) إذا كانت  $N$  زمرة جزئية ناظرية و  $G/N$  قابلة للحل، عندئذٍ  $N \supset K$ .
- (b) برهن أن  $K$  متميزة.
- (c) برهن أن  $K = [K, K]$  و أن  $K = 1$  أو  $K$  غير قابلة للحل.

## الملحق C

### امتحان لساعتين

1. أي من الحالات الآتية صحيحة (أعط تعليلاً موجزاً لكل من (a) و (b) و (c) و (d)، أعط مجموعة صحيحة من محتويات (e)).

(a) إذا كان كل من  $a$  و  $b$  عنصرين من زمرة، عندئذٍ

$$a^2 = 1, \quad b^3 = 1 \Rightarrow (ab)^6 = 1$$

(b) العنصران الآتيان مترافقان في  $S_7$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) إذا كانت  $G$  و  $H$  زميرتين منتهيتين و  $G \times A_{594} \approx H \times A_{594}$ ،

$$G \approx H \text{ عندئذٍ.}$$

(d) الزمرة الجزئية الوحيدة في  $A_5$  تحوي (123) هي  $A_5$  نفسها.

(e) عديمة القوى  $\Leftarrow$  دائرية  $\Leftarrow$  تبديلية  $\Leftarrow$  قابلة للحل (من أجل زمرة منتهية).

2. ما عدد 11- زمر سيلو الجزئية يمكن أن يكون زمرة من الرتبة  $2.5.11 = 110$ ؟ صنف الزمر من الرتبة 110 التي تحوي على زمرة جزئية من الرتبة 10. هل كل زمرة من الرتبة 110 تحوي على زمرة جزئية من الرتبة 10.

3. لتكن  $G$  زمرة منتهية عديمة القوى. بين أنه إذا كانت كل زمرة قسمة تبديلية في  $G$  دائرية، عندئذٍ فإن  $G$  تبديلية. هل الحالة صحيحة من أجل الزمر غير عديمة القوى.

4. (a) لتكن  $G$  زمرة جزئية من  $\text{Sym}(X)$ ، حيث  $X$  مجموعة من  $n$  عنصر. إذا كانت  $G$  تبديلية و تؤثر بشكل متعدٍ على  $X$ ، بين أن كل عنصر  $g \neq 1$  من  $G$  يحرك كل عنصر من  $X$ . واستنتج بأن  $(G:1) \leq n$ .

(b) لكل  $m \geq 1$ ، أوجد الزمر الجزئية التبديلية من  $S_{3m}$  من الرتبة  $3m$ .

(c) بين أن الزمرة الجزئية التبديلية من  $S_n$  تكون من الرتبة  $\geq 3^{\frac{n}{3}}$ .



5. لتكن  $H$  زمرة جزئية ناظرية من الزمرة  $G$ ، ولتكن  $P$  زمرة جزئية في  $H$ . افرض أن كل تماثل ذاتي في  $H$  يكون داخلياً. برهن أن  $G = H.N_G(P)$ .
6. (a) أعط وصفاً لزمرة مع المولدات  $x$  و  $y$  و معرفة بالعلاقات  $y x y^{-1} = x^{-1}$ .  
 (b) أعط وصفاً لزمرة مع المولدات  $x$  و  $y$  و معرفة بالعلاقات  $y x y^{-1} = x^{-1}$ ,  $x y x^{-1} = y^{-1}$ .
- يمكنك أن تستخدم النتائج التي برهنت في الصف أو الملاحظات، لكن ينبغي أن تشير بوضوح إلى ما تستخدمه.

## الحل

1. (a) خاطئة: في  $\langle a, b | a^2, b^3 \rangle$ ،  $ab$  من رتبة غير منتهية.  
 (b) صحيحة، التحليل الدوري هو  $(123)(4567), (246), (1357)$ .  
 (c) صحيحة، نستخدم مبرهنة كرول - شيميدت.  
 (d) خاطئة، الزمرة المولدة تكون فعلية.  
 (e) دائرية  $\Leftarrow$  تبديلية  $\Leftarrow$  عديمة القوى  $\Leftarrow$  قابلة للحل.
2. إن عدد 11- زمر سيلو الجزئية  $s_{11} = 1, 12, \dots$  و تقسم 10. بالتالي توجد 11- زمر سيلو جزئية واحدة فقط  $P$ . ولها
- $$G = P \times_q H, \quad P = C_{11}, \quad H = C_{10}, \quad H = D_5$$
- علينا الآن أن ننظر إلى التطبيق  $\text{Aut}(C_{11}) = C_{10}$  :  $H \rightarrow q$ . نعم، من توطئة سيشور - زاسينهاوس.
3. بفرض أن  $G$  يملك صفاً  $1 < 1$ . عندئذٍ تحوي  $G$  على زمرة القسمة  $H$  من الصف 2. نعتبر
- $$1 \rightarrow Z(H) \rightarrow H \rightarrow H/Z(H) \rightarrow 1$$
- عندئذٍ  $H$  تبديلية من (4.17)، و هذا تناقض. لذلك فإن  $G$  تبديلية و بالتالي فهي دائرية. بالتبادل، بالاستقراء، الذي يبين بأن  $G/Z(G)$  دائرية.
- لا! في الحقيقة، ليس صحيحاً من أجل الزمر القابلة للحل (مثلاً،  $S_3$ ).
4. (a) إذا كان  $g x = x$ ، عندئذٍ  $g h x = h g x = h x$ . بالتالي فإن  $g$  يثبت كل عنصر من  $X$ ، ومنه  $g = 1$ . نثبت  $x \in X$ ، عندئذٍ  $g x : G \rightarrow X$   $a g x : g$  غامر. [نلاحظ أن مبرهنة كايلي تعطي التشاكل الذاتي  $(G : 1) \rightarrow S_n$ ,  $n = (G : 1)$ ].

(b) بتجزئة المجموعة إلى مجموعات جزئية من الرتبة 3، و لتكن  $G = G_1 \times \dots \times G_m$ .  
(c) لتكن  $O_1, \dots, O_r$  مدارات  $G$ ، و لتكن  $G_i$  صورة  $G$  في  $\text{Sym}(O_i)$ . عندئذٍ  
 $G \rightarrow G_1 \times \dots \times G_r$ ، ومنه (بالاستقراء)،

$$(G : 1) \leq (G_1 : 1) \dots (G_r : 1) \leq 3^{\frac{n_1}{3}} \dots 3^{\frac{n_r}{3}} = 3^{\frac{n}{3}}$$

5. لتكن  $g \in G$ ، و لتكن  $h \in H$  حيث إنها مرافقة  $h$  على  $H$  تتوافق مع مرافقة  $g$ .  
عندئذٍ  $h^{-1}g \in N_G(P)$ ، ومنه  $gPg^{-1} = hPh^{-1}$ .

6. (a) إنها الزمرة

$$G = \langle x \rangle \times_q \langle y \rangle = C_\infty \times_q C_\infty$$

مع  $q : C_\infty \rightarrow \text{Aut}(C_\infty) = \pm 1$  بالتبادل، يمكن أن نكتب العناصر بشكل وحيد بالشكل  
 $y x = x^{-1}y$  و  $x^i y^j, i, j \in \mathbb{Z}$ .

(b) إنها الزمرة الرباعية. من العلاقتين نحصل على

$$y x = x^{-1}y, \quad y x = x y^{-1}$$

ومنه  $x^2 = y^2$ . من العلاقة الثانية

$$x y^2 x^{-1} = y^{-2}, = y^2,$$

ومنه  $y^4 = 1$ .

بالتبادل، تبين خوارزمية تود- كوكسيتير أنها زمرة جزئية من  $S_8$  مولدة بالعناصر

$$(1584)(2673) \text{ و } (1287)(3465).$$

## Bibliography

- ALPERIN, J. L. AND BELL, R. B. 1995. Groups and representations, volume 162 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- ARTIN, M. 1991. Algebra. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- ASCHBACHER, M. AND SMITH, S. D. 2004. The classification of quasithin groups. I, II, volume 111, 112 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI. Structure of strongly quasithin  $K$ -groups.
- BESCHE, H. U., EICK, B., AND O'BRIEN, E. A. 2001. The groups of order at most 2000. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 7:1–4 (electronic).
- BRAUER, R. AND FOWLER, K. A. 1955. On groups of even order. *Ann. of Math.* (2) 62:565–583.
- BURNSIDE, W. 1897. Theory of groups of finite order. Cambridge: at the University Press, Cambridge
- CURTIS, C. W. 1999. Pioneers of representation theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer, volume 15 of *History of Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI
- FEIT, W. 1995. On the work of Efim Zelmanov. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), pp. 17–24, Basel. Birkhäuser.
- FEIT, W. AND THOMPSON, J. G. 1963. Solvability of groups of odd order. *Pacific J. Math.* 13:775–1029.
- HALL, JR., M. 1959. The theory of groups. The Macmillan Co., New York, N.Y.
- HUMPHREYS, J. E. 1990. Reflection groups and Coxeter groups, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- MASSEY, W. S. 1967. Algebraic topology: An introduction. Harcourt, Brace & World, Inc., New York.
- PYBER, L. 1993. Enumerating finite groups of given order. *Ann. of Math.* (2) 137:203–220.
- RONAN, M. 2006. Symmetry and the monster. Oxford University Press, Oxford. One of the greatest quests of mathematics.
- ROTMAN, J. J. 1995. An introduction to the theory of groups, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition.

SERRE, J.-P. 1980. *Trees*. Springer-Verlag, Berlin. Translated from the French by John Stillwell.

SOLOMON, R. 2001. A brief history of the classification of the finite simple groups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 38:315–352 (electronic).

SYLOW, M. L. 1872. Th´eor`emes sur les groupes de substitutions. *Math. Ann.* 5:584–594.