التحليل العددي

م.رواء ابراهيم عيسى

الأخطاء (Error)

تلعب الأخطاء دورًا محوريًا في التحليل العددي وهي تبين مدى دقة وسرعة الطريقة المستخدمة لاحقًا. وفيما يلي أنواع الأخطاء وتأثيرها :

الخطأ المطلق (Absolute Error)

وهو الخطأ المطلق المرتكب في العدد المقرب X_0 هو القيمة المطلقة للفرق بينه وبين القيمة الفعليةX $\Delta = |\Delta.x| = |x_0 - x| = |x - x_0|$
غالبًا مايكون العدد الفعلي x غير معلوم ، عندئذ لا يمكن تعيين الخطأ المطلق ، من أجل ذلك نلجأ إلى إيجاد حد أعلى لهذا الخطأ مثل ϵ_x ويحقق المتباينة :
$|\Delta.x| = |x - x_0| \leq \epsilon_x$. وهكذا نحصل على : $(x_0 - \epsilon_x) \leq x \leq (x_0 + \epsilon_x)$ أي أن العدد الفعلي يقع بين العددين $x_0 - \epsilon_x$,
$x_0 + \epsilon_x$, حيث القيمة $x_0 + \epsilon_x$ تمثل تقريب العدد x بالزيادة والقيمة $x_0 - \epsilon_x$ تمثل تقريبه بالنقصان .

مثال

لتكن x=3.257 و لتكن القيمة التقريبية لـx هي 3.26 بتعيين الخطأ المطلق :

$$|\Delta.x| = |x_0 - x|$$

$$|3.26 - 3.257| = 0.003$$

ملاحظة مهمة :-

في الرياضيات اذا اتت هذه المفردات لها نفس المعنى

Two decimal places

$\epsilon = 0.01$

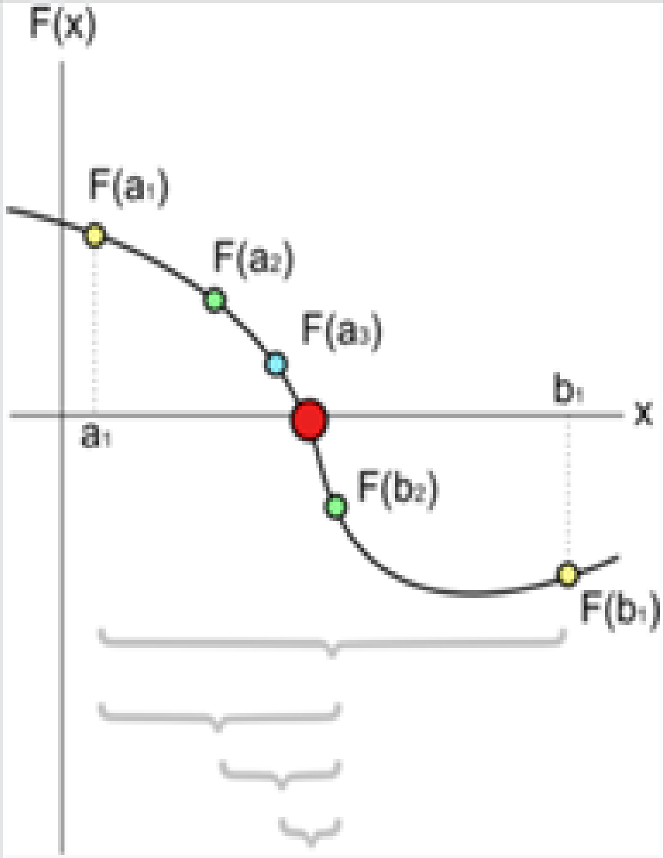
$\epsilon = 10^{-2}$

NUMERICAL ANALYSIS TO APPROXIMATE NONLINEAR EQUATIONS

NUMERICAL ANALYSIS TO APPROXIMATE NONLINEAR EQUATIONS

BISECTION METHOD:-

في الرياضيات، طريقة التنصيف هي إحدى خوارزمية إيجاد الجذر والتي بها يتم تنصيف فترة ما بصورة تكرارية واختيار فترة فرعية يقع عليها الجذر من أجل تحسين المعالجة. مع أنها بسيطة جدا ومرنة إلا أن طريقة التنصيف بطيئة نسبيا.



خطوات قليلة من طريقة التنصيف تم تطبيقها على بداية $[a_1;b_1]$. النقطة الأكبر الحمراء تمثل عن جذر الدالة.

الطريقة

إذا كانت الدالة $f(x)=0$ مستمرة ومعرفة في الفترة $[a,b]$ حيث $f(a)*f(b)<0$ أي أنهما مختلفان في الإشارة فإن معنى ذلك ان أحد جذور الدالة ($f(x)$) على الأقل يقع في نطاق الفترة $[a,b]$ (انظر الشكل 1-1). في هذه الحالة نتبع الخوارزمية التالية للوصول إلى حل هذه الدالة:

نوجد متوسط القيمتان a,b المعرف عندهما الدالة وليكن x_1 حيث أن $x_1=(a+b)/2$.

إذا كانت قيمة $f(x_1)=0$ فإن x_1 جذر للدالة ($f(x)$) وحلا لها. إذا لم يتحقق الشرط السابق نقوم باتباع التالي:

إذا كانت $f(x_1)*f(b)<0$ فإننا نضع $a=x_1$ للتقرب من الحل.

إذا كانت $f(x_1)*f(a)<0$ فإننا نضع $b=x_1$ للتقرب من الحل.

نقوم بتكرار الخطوتين 1 و 2 حتى نصل لقيمة تكون فيها $f(x_i)=0$ أو تكون فيها $f(x_i)=>P$ حيث أن P تمثل درجة الدقة المطلوبة في الحل.

DEFINITION

The **bisection method** in mathematics is a root finding method which repeatedly bisects an interval and then selects a subinterval in which a root must lie for further processing.

ALGORITHM

Step 1: Choose two approximations A and B (B>A) such that
$f(A)*f(B)<0$
Step 2: Evaluate the midpoint C of [A,B] given by
$C=(A+B)/2$

- Step 3: If $f(C)*f(B)<0$ then rename B & C as A & B. If not rename of C as B . Then apply the formula of Step 2.
- Step 4:Stop evolution when the different of two successive values of C obtained from Step 2 is numerically less than E, the prescribed accuracy

NOTE

- If f(a) and f(b) have the same sign, the function may have an even number of real zeros or no real zeros in the interval [a, b].

- Bisection method can not be used in these cases.

Find one root of $e^x - 3x = 0$ correct to two decimal places using the method of Bisection.

And the interval[1.5,1.6]

$\epsilon=0.01$

اولا نجد قيم الفترة ونعوضها بالدالة

$$f(x) = e^x - 3x$$

$$f(1.5) = e^{1.5} - 3(1.5) = -0.01831 \quad \boxed{<0}$$

$$f(1.6) = e^{1.6} - 3(1.6) = 0.15303 \quad \boxed{>0}$$

a root lies in the interval (1.5, 1.6)

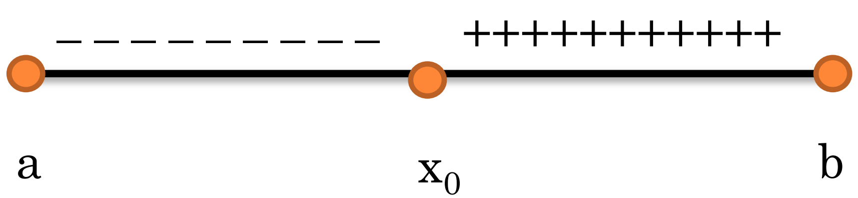
$a = 1.5$ and $b = 1.6$.

$X_0 = a+b/2 = (1.5+1.6)/2 = \boxed{1.55}$

ونعوض قيمة النقطة بالدالة

$f(1.55) = \boxed{0.06147}$ $\boxed{>0}$

اذا الفترة الجديدة ستكون **(1.5,1.55)**



$X_1 = a+b/2 = (1.5+1.55)/2 = \boxed{1.525}$

ونعوض قيمة النقطة بالدالة

$f(1.525) = \boxed{0.02014}$ $\boxed{>0}$

الآن نطبق شرط التوقف في توليد النقاط وهو

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

$$|x_1 - x_0| < \epsilon$$

$$|1.525 - 1.55| < \mathbf{0.01}$$

$$|-0.025| \neq 0.01$$

نكرر الخطوات السابقة بعملية التوليد ونقارن الى ان يتحقق الشرط

ind one root of $e^x - 3x = 0$ correct to two decimal places using the method of Bisection.

$$f(x) = e^x - 3x$$
$$f(1.5) = e^{1.5} - 3(1.5) = -0.01831$$
$$f(1.6) = e^{1.6} - 3(1.6) = 0.15303$$

$\epsilon = 0.01$

a root lies in the interval (1.5, 1.6)

$a = 1.5$ and $b = 1.6$.

n	a	b	x_{s_1}	$f(x_{s_1})$
1	1.5	1.6	1.55	0.06147
2	1.5	1.55	1.525	0.02014
3	1.5	1.525	1.5125	0.00056
4	1.5	1.5125	1.50625	–0.00896

In order to compute the number of iteration we use the following equation :-

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Example

في مثالنا السابق لمعرفة عدد المحاولات في توليد النقاط للوصول الى جذر المعادلة الغير خطية

And the interval[1.5,1.6]

$\epsilon=0.01$

$$n \geq \frac{\log(b-a)-\log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

n ≥ (-1)-(-2)/0.30103

n ≥
1/0.30103=3.32192809
=4

H.W

Write two iteration to find the root of the equation

$$x^3 - x - 11 = 0$$

ϵ=0.0001

And the interval[2,3]