"المنطق الرياضي"

الاعداد التي سوف تستخدم في هذا الفصل هي:-

1- الاعداد الطبيعية( natural numbers) و يرمز لها بالرمز $Ν$ وتكتب $Ν=\left\{0,1,2,3,4, …\right\}$

2- الاعداد الصحيحة (Integer numbers) ويرمز لها بالرمز $Ζ$ وتكتب $Ζ=\{…,\\_2 ,\\_1,0,1,2,3,…\}$

3- الاعداد الصحيحة الزوجية (Even integer numbers) و يرمز لها بالرمز $Ζ\_{e}$ وتكتب $Ζ\_{e}=\left\{xϵΖ:x=2t,tϵΖ\right\}$ $=\left\{…,\\_4 ,\\_2,0,2,4,6,…\right\}$

4- الاعداد الصحيحة الفردية (odd integer numbers) ويرمز لها بالرمز $Ζ\_{o}$ و تكتب $Ζ\_{o}=\left\{xϵΖ:x=2t+1,tϵΖ\right\}$

$$=\left\{…,\\_4 ,\\_2,0,2,4,6,…\right\}$$

5- الاعداد النسبية (Rational numbers) ويرمز لها بالرمز $Q$ وتكتب $Q=\left\{d:d=\frac{a}{b},b\ne 0,a,b\in Ζ\right\}$

6- الاعداد الحقيقة (Real numbers) ويرمز لها بالرمز $R$

تعريف المجموعة:- مفهوم رياضي غير معرف ونرمز لها بالحروف الكبيرة $\left(A,B,C,…\right)$ ونرمز لعناصر المجموعة بالحروف الصغيرة $\left(a,b,c,…\right)$ فاذا كان $a$ عنصر في المجموعة $A$ نرمز له بالرمز $a\in A$ واذا كان $a$ ليس عنصرا في المجموعة $A$ نرمز له بالرمز $a\notin A$

امثلة:- 1- $A=\left\{1,2,3\right\}$ 2- مجموعة الاعداد الحقيقية

3- مجموعة الاعداد الطبيعية بين 10 و 1 $\left\{2,3,4,5,6,7,8,9\right\}$

4- مجموعة الاعداد الاولية (prime numbers) $p=\left\{2,3,5,7,11,13,…\right\}$

تعريف المجموعة الجزئية:- لتكن $A$ مجموعة يقال ان $B$ مجموعة جزئية (Subset) من الجموعة $A$ اذا كان كل عنصر في $B$ موجود في $A $ ويرمز لها بالرمز $B⊆A$ اي بعبارة اخرى $B⊆A $ اذا كان كل $x\in B$ فان $x\in A$ .وتسمى $B$ مجموعة جزئية فعلية من $A$ (Proper subset) اذا وجد $x\in A$ بحيث ان $x\notin B$ ويرمز لها بالرمز $B⊂A$ اما اذا كانت $B$ ليس مجموعة جزئية من $A $ فتكتب بالشكل $B⊈A$ .

مثال اذا كانت $A=\left\{0,1,2,3\right\}$ وكانت $B$ هي مجموعة الاعداد الطبيعية المحصوره بين 0,4 . هل ان $B $ مجموعة جزئيه من $A$ ؟ وهل ان $B$ مجموعة جزئية فعلية من $A$ ؟

الحل / $A=\left\{0,1,2,3\right\}$ $B=\left\{1,2,3\right\}$,

$∵$ $1,2,3\in B$ و $1,2,3\in A$ اذن $B $ مجموعة جزئيه من $A$ $(B⊆A)$

$0\in A∵$ و $0\notin B$ فان $B$ مجموعة جزئية فعلية من $A$ $(B⊂A)$ .

تعرف لتكن $A$ و $B$ مجموعتين فان

1- اتحاد المجموعه $A$ مع المجموعة $B$ والذي يرمز له بالرمز $A∪B$ ويعرف بالشكل التالي:- $A∪B=\left\{x:x\in A∨x\in B\right\}$

2- تقاطع المجموعه $A$ مع المجموعة $B$ والذي يرمز له بالرمز $A∩B$ ويعرف بالشكل التالي:- $A∩B=\left\{x:x\in A∧x\in B\right\}$

مثال لتكن $A$ تمثل مجموعة الاعداد الطبيعية الاكبر من 3 ولتكن $B$ تمثل مجموعة الاعداد الاولية الاصغر من 9 جد $A∪B$ , $A∩B$

الحل/ $B=\left\{2,3,7\right\}, A=\left\{4,5,6,…\right\}$

$$A∪B=\left\{2,3,4,5,6,7,…\right\} , A∩B=\left\{5,7\right\}$$

مثال لتكن $A$ تمثل مجموعة الاعداد الصحيحة الاكبر من -2ولتكن $B$ تمثل مجموعة الاعداد الاولية المحصوره بين 10-1

تعريف العباره statement :- هي جملة خبرية قد تكون صادقه او كاذبه ولا تكون صادقه و كاذبه في نفس الوقت.

مثال:- بين اي من الجمل التالية تمثل عبارة واي منها لا تمثل عباره مع ذكر السبب ؟

1

- العدد 10 اصغر من العدد 11 $⟵$ عباره لانها خبرية صادقه

2- جامعة القادسية تقع في شمال العراق $⟵$ عباره لانها جمله خبرية كاذبه

3- اذهب الى الجامعه $⟵$ ليست عباره لانها جمله امرية

4- اين تقع مدينة بابل؟ $⟵$ ليست عباره لانها جمله استفهامية

تعريف المتغير:- هو حرف او رمز الذي من الممكن ان يمثل عناصر متعدده في مجموعة معينه فمثلا نقول هو طالب في

كلية الهندسة فتلاحظ ان هو يمثل متغير المجلة $x-2=0$ نلاحظ ان $x$ هو المتغير او $x\in Q,x\in Ν$ او غيرها.

ملاحظة:- من الممكن تحويل جملة ما الى عبارة وذالك بابدال المتغير بعدد او باضافة تعابير مثل كل او يوجد الى الجملة.

تعريف الجملة المفتوحه:- لتكن $A$ مجموعة وليكن $P(x)$ تعبير ما في متغير $x$ يقال ان $P(x)$ جملة مفتوحه في متغير $x$ معرفه على $A$

اذل كانت$ P\left(a\right) $عبارة صادقه او كاذبه لكل $a\in A$.

مثال:- لتكن $A=\left\{1,2,3\right\}$ وليكن $P\left(x\right)=x-1\geq 0 $ هل ان $P(x)$ جملة مفتوحه ام لا ؟

الحل / $P\left(a\right)$ عبارة صادقه لكل $a\in A$ $P\left(x\right)=x-1\geq 0$

عباره صادقه $P\left(1\right)=1-1\geq 0$

عباره صادقه $P\left(2\right)=2-1\geq 0$

عباره صادقه $P\left(3\right)=3-1\geq 0$

$∴$ $P\left(a\right)$ عبارة صادقه

مثال:- لتكن $A=\left\{2,3,6,9\right\}$ وليكن $x-3$ يقبل القسمه على يقبل القسمه على $3$ $P\left(x\right)=!3$ هل ان $P(x)$ جملة مفتوحه ام لا ؟

$$P\left(x\right)=!3$$

عباره كاذبه $2-3$ يقبل القسمه على يقبل القسمه على $3$ $p\left(2\right)=!2$

عباره صادقه $3-3$ يقبل القسمه على يقبل القسمه على $3$ $ p\left(2\right)=!3$

عباره صادقه $6-3$ يقبل القسمه على يقبل القسمه على $3$ $p\left(6\right)=!6$

عباره صادقه $9-3$ يقبل القسمه على يقبل القسمه على $3$ $p\left(9\right)=!9$

$∴$ $P\left(a\right)$ عبارة صادقه وكاذبه لكل $a\in A $ اذن $P(x)$ جملة مفتوحه

تعريف مجموعة الحل:- لتكن $A$ مجموعة ولتكن $p(x)$ جمله مفتوحه يقال ان $p\left(a\right)$ حلا للجمله المفتوحه اذا كانت $p\left(a\right)$ عباره صادقه لكل $a\in A$ وتسمى مجموعة كل الحلول للجمله المفتوحه بمجموعة الحل ويرمز لها بالرمز $T\_{p}$ اي ان $T\_{p}=\left\{a\in A:عباره صادقه p\left(a\right) \right\}$

مثال:- لتكن $A=\left\{-1,0,1\right\}$ وليكن $P\left(x\right)=x^{3}\geq 1$ جمله مفتوحه على $A$ جد $T\_{p}$ ؟

الحل/ $A=\left\{-1,0,1\right\}$ , $P\left(x\right)=x^{3}\geq 1$

عباره كاذبه $P\left(-1\right)=-1^{3}=-1\geq 1$

عباره كاذبه $P\left(0\right)=0^{3}=0\geq 1$

عباره صادقه $P\left(1\right)=1^{3}=1\geq 1$

$$ T\_{p}=\left\{a\in A:عباره صادقه p\left(a\right) \right\}=1$$

مثال:- لتكن $Z$ تمثل مجموعة الاعداد الصحيحه وليكن $P\left(x\right)=x+2>0$ جمله مفتوحه على $Z$ جد $T\_{p}$ ؟

مثال واجب:- لتكن $R$ تمثل مجموعة الاعداد الحقيقة ولتكن $P\left(x\right)=\left|x\right|<1$ جمله مفتوحه على $R$ جد $T\_{p}$ ؟

العبارات المنطقيه Logical statements

|  |  |
| --- | --- |
| P | $$∼P$$ |
| T | F |
| F | T |

تعريف:- اذا كانت $P$ عباره فان ليس $P$ يمثل نفي العباره $P$ (Negation) ويرمز له بالرمز $∼P$ فاذا كانت $P$ عباره صادقه فان $∼P$ تكون عباره كاذبه وبالعكس وجدول صدق العباره هو

امثله 1- نفي العبارة $x=2$ هو $x\ne 2$

2- نفي العبارة $x>y$ هو $x\leq y$

3- نفي العبارة $a\in A$ هو $a\notin A$

تعريف العباره المركبة (compound statement) :- هي عبارة ناتجة من محموعة عبارات باستخدام الروابط (و) , (او) , (اذا كان ... فان) , (اذا وفقط اذا كان) , وان نتيجة صدق العبارة المركبة تعتمد فقط على قيم صدق مكوناتها وعلى انواع الروابط الموجودة ومن اهم الوابط هي:-

1. الوصل (conjunction) عبارة و ($∧$*):- لتكن كل من* $q,p$ *عبارة فان العباراة المركبة* $\left(p و q\right)$ *والتي يرمز لها بالرمز* $p∧q$ *هي عبارة مركبة تسمى الوصل وجدول صدق العبارة هو:-*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$p∧q$$ | $$q$$ | $$p$$ |
| *T* | *T* | *T* |
| *F* | *F* | *T* |
| *F* | *T* | *F* |
| *F* | *F* | *F* |

*اي ان العبارة المركبة* $p∧q$ *تكون صادقه في حالة واحدة فقط عندما يكون كل من* $p و q$ *عبارة صادقه .*

* *الخوارزمي عالم عربي و ارخميدس عالم اغريقي. صائبة*
* *العبارة* $(5>3)$ *و* $(5>6)$ *خاطئة*

 *مثال:- اكتب جدول صدق العبارات التالية*

*1-* $p∧∼q$

*2-* $∼p∧∼q$

*الحل/*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$p∧∼q$$ | $$∼q$$ | $$q$$ | $$p$$ |
| *F* | *F* | *T* | *T* |
| *T* | *T* | *F* | *T* |
| *F* | *F* | *T* | *F* |
| *F* | *T* | *F* | *F* |

*1-*