المساحات السطحية

[illegible]

تعريف (1)

نسمي: إذا كانت $y = f(x)$ و $y' = f'(x)$ دوال مستمرة على الفترة $[a,b]$ فلإيجاد المساحة السطحية الناتجة عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحني $y = f(x)$ والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ حول المحور x هو:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

تعريف (2)

نسمي: إذا كانت $x = g(y)$ و $x' = g'(y)$ دوال مستمرة على الفترة $[c,d]$ فلإيجاد المساحة السطحية الناتجة عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحني $x = g(y)$ والمستقيمين $y = c$ و $y = d$ حول محور y هو:

$$S = \int_c^d 2\pi\, g(y) \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy$$

مثال (1)

نسمي: أوجد المساحة السطحية للجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحني $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 2$ حول محور x.

Sol.

① حول محور x

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

$$\because y = \sqrt{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore (y')^2 = \frac{1}{4x}$$

$$\therefore S = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx = \cancel{2}\pi \int_0^2 \cancel{\sqrt{x}}\, \frac{\sqrt{4x+1}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{x}}}\, dx$$

$$= \pi \int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 4(4x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$

نعوض بالتكامل

(24)

$$\therefore S = \frac{\pi}{4}\int_0^2 4(4x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2\pi}{12}\left[(4(2)+1)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(9)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{\pi}{6}\left[(3^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(3)^3 - 1\right] = \frac{\pi}{6}\{26\} = \boxed{\frac{13\pi}{3}}$$ وحدة مربعة

مثال (2)

س: أوجد مساحة السطح للجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة
بالمنحنى $y = x^2$ ، $0 \le x \le 2$ حول محور y ؟

الحل:

$$S = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}$$

أ- نجد $g(y)$ كالتالي

$$\therefore y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x = y^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore x' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\therefore (x')^2 = \frac{1}{4y}$$

ب- نجد الحدود التكامل

when $x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 = 0$

when $x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 = 4$

$\therefore$ حدود التكامل هي $[0,4]$

$$\therefore S = 2\pi\int_0^4 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^4 \sqrt{y}\sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\,dy = \cancel{2}\pi\int_0^4 \cancel{\sqrt{y}}\,\frac{\sqrt{4y+1}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{y}}}\,dy$$

$$= \pi\int_0^4 (4y+1)^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{\pi}{4}\int_0^4 4(4y+1)^{\frac{1}{2}}\,dy$$ نضرب ونقسم

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(4y+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{\pi}{6}\left[(4(4)+1)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(17)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \cancel{\frac{\pi}{6}\left((4^2)^{\frac{3}{2}}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[70.1 - 1\right] = \frac{\pi}{6}(69.1) = \boxed{11.51\pi}$$

$$= \cancel{\frac{\pi}{6}(4)^3} = \cancel{\frac{\pi}{6}(64)} = \cancel{\frac{32\pi}{3}}$$ وحدة مربعة

25 (EX)

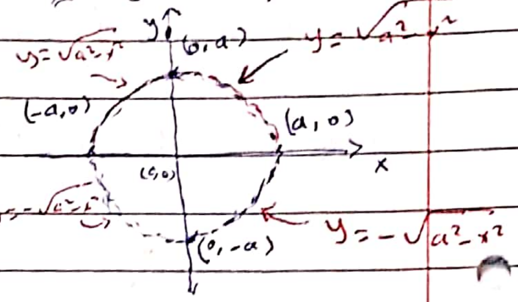
س/ أوجد مساحة سطح الكرة الناتجة من دوران دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a حول ① محور x
② حول محور y ؟

Sol:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$ ① حول محور x

بما أن معادلة الدائرة هي
والتي نصف قطرها a

$$x^2 + y^2 = a^2$$



$$\Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$$

$$\therefore y = \mp\sqrt{a^2-x^2}$$

فوق محور السينات $\Rightarrow y = \sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow y = (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore y' = \frac{1}{\cancel{2}}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-\cancel{2}x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2}$$

$$\therefore S = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\frac{a^2-x^2+x^2}{a^2-x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-a}^{a} \cancel{\sqrt{a^2-x^2}}\,\frac{\sqrt{a^2}}{\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} a\, dx$$

$$= 2\pi a \int_{-a}^{a} dx$$

$$= 2\pi a [x]_{-a}^{a} = 2\pi a [a+a]$$

$$= 2\pi a (2a)$$

$$= \boxed{4\pi a^2}$$

② حول محور y

$$S = 2\pi \int_{c}^{d} x \sqrt{1 + [g'(y)]^2}$$

$\therefore\ x^2 + y^2 = a^2$ معادلة دائرة نصف قطرها a

$\therefore\ x^2 = a^2 - y^2$ (لاحظ الدوران حول محور y)

$\Rightarrow x = \mp\sqrt{a^2 - y^2}$ نوجد محور الطاقة $\Rightarrow \boxed{x = (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$\Rightarrow x' = \frac{1}{2}(a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-\cancel{2}y)$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$\therefore (x')^2 = \frac{y}{a^2 - y^2}$$

$$\therefore S = \int_{-a}^{a} 2\pi \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y}{a^2 - y^2}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{\frac{a^2 - \cancel{y^2} + \cancel{y^2}}{a^2 - y^2}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \cancel{\sqrt{a^2 - y^2}}\ \frac{\sqrt{a^2}}{\cancel{\sqrt{a^2 - y^2}}}\, dy$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2}\, dy = 2\pi \int_{-a}^{a} a\, dy$$

$$= 2\pi a \int_{-a}^{a} dy$$

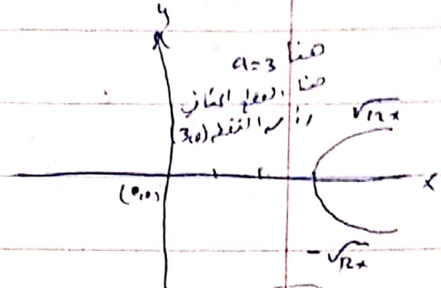
$$= 2\pi a [y]_{-a}^{a} = 2\pi a [a + a]$$

$$= 2\pi a (2a) = \boxed{4\pi a^2}$$

(20)

س/ أوجد المساحة السطحية للجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بقوس القطع المكافئ $y^2=12x$ من $x=0$ الى $x=3$ حول محور x ؟

الحل/ $S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$



معادلة القطع المكافئ $y=4ax$ حول محور x وراسه نقطة الاصل

$\because\ y^2=12x \Rightarrow y=\sqrt{12x}=(12x)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ y'=(6x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (y')^2=36x^{-1}=\frac{36}{x}$

$\therefore\ S=2\pi\int_0^3\sqrt{12x}\sqrt{1+\frac{36}{x}}\,dx$

$=2\pi\int_0^3\sqrt{12x}\sqrt{\frac{12}{12}+\frac{36}{x}}\,dx=2\pi\int_0^3\sqrt{12x}\sqrt{\frac{12x+(12)(36)}{12x}}\,dx$

$=2\pi\int_0^3\cancel{\sqrt{12x}}\frac{\sqrt{12x+432}}{\cancel{\sqrt{12x}}}\,dx=2\pi\int_0^3(12x+432)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\frac{2\pi}{12}\int_0^3 12(12x+432)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\frac{\pi}{\cancel{6}\,3}\left[\frac{\cancel{2}}{3}(12x+432)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

$=\frac{\pi}{9}\left[(12(3)+432)^{\frac{3}{2}}-(432)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{\pi}{9}\left[(468)^{\frac{3}{2}}-(432)^{\frac{3}{2}}\right]$

$=\cancel{\frac{\pi}{9}\left[(36)^{\frac{3}{2}}+(432)^{\frac{3}{2}}-(432)^{\frac{3}{2}}\right]}=\frac{\pi}{9}\left[(468)^1\sqrt{468}-(432)\sqrt{432}\right]$

$=\frac{\pi}{9}\left[10124.387-8978.951\right]$

$=\cancel{\frac{\pi}{9}\left[(6^2)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{\pi}{9}(216)}$

$=\frac{\pi}{9}(1145.436)$

$=\cancel{24\pi\ldots}$

$=127.2\pi$ وحدة مربعة

س/ احسب المساحة السطحية S لسطح الدوران الناتج عن الدوران حول محور y للقوس المنحني $x = y^3$ من $y=0$ الى $y=1$ ؟

Sol.

$$S = \int_c^d 2\pi\, g(y) \sqrt{1+[g'(y)]^2}\, dy$$

$$\because\ x = y^3 \Rightarrow x' = 3y^2 \Rightarrow [g'(y)]^2 = 9y^4$$

$$\therefore\ S = 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1+9y^4}\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y^3 (1+9y^4)^{\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \frac{2\pi}{36} \int_0^1 36\, y^3 (1+9y^4)^{\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{18} \left[\frac{2}{3} (1+9y^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{27} \left[(1+9(1)^4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{\pi}{27} \left[(10)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

$$= \cancel{\frac{\pi}{27} [(9)^{\frac{3}{2}}] = \frac{\pi}{27} (8)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{27} [30.622]$$

$$= \cancel{\frac{\pi}{27}[27]} = \cancel{\pi}$$

$$= 1.134\, \pi$$ وحدة مربعة

(27)

س3/ اثبت ان حجم الاسطوانة التي نصف قطرها r وارتفاعها h تساوي $\pi r^2 h$ هذا الحجم ناتج عن دوران المنحني $y=r$ حول محور x من $x=0$ الى $x=h$ ؟

sol:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^h r^2\,dx = \pi r^2 \int_0^h dx$$

$$= \pi r^2 [x]_0^h = \pi r^2 h - \pi r^2 (0) = \boxed{\pi r^2 h}$$

س4/ اثبت ان المساحة السطحية للاسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها h تساوي $2\pi r h$ هذه المساحة ناتجة عن دوران المنحني $y=r$ حول محور x من $x=0$ الى $x=h$ ؟

sol:

$$S = \int_a^b 2\pi\, f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$\because\ y = r \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow (y')^2 = 0$ مشتقة الثابت صفر

$$\therefore S = 2\pi \int_0^h r\sqrt{1+0}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^h r\,dx = 2\pi r \int_0^h dx$$

$$= 2\pi r [x]_0^h$$

$$= 2\pi r x$$

Dual Integration

التكامل الثنائي

Double Integration

دالة تكاملية

تعريف

س: إذا كانت $Z = f(x,y)$ دالة معرفة ومستمرة على المنطقة D في المستوي xy فأن التكامل الثنائي للدالة $Z = f(x,y)$ على المنطقة D والذي يرمز له بالرمز $\iint_D f(x,y)\,dA$ يعرف بالشكل التالي:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta A_i$$

يشبه مجموع ريمان $A = S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$

ملاحظة:

س: أن التكامل الثنائي يعتمد على المنطقة D فاذا كانت D منطقة بالشكل:

أولاً:

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le D\}$$

فالتكامل الثنائي يصبح بالشكل:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال (1) / أوجد $\iint_D (xy + y^2)\,dA$ حيث أن $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

Sol. 1-

$$\int_0^1\int_0^2 (xy + y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^2 (xy + y^2)\,dx\right]dy$$

$$= \int_0^1 \left\{ y\frac{x^2}{2} + y^2 x \Big|_0^2 \right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left[y\frac{4}{2} + y^2 \cdot 2 \right] dy$$

$$= \int_0^1 (2y + 2y^2)\,dy$$

$$= \left[x\frac{y^2}{x} + \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{5}{3}}$$

2. $\int_0^2\int_0^1 (xy+y^2)\,dy\,dx$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^1 (xy+y^2)\,dy\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx$$

$$= \int_0^2 \left(x\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}\right]_0^2 = \left(\frac{(2)^2}{4}+\frac{2}{3}\right)-0$$

$$= \frac{4}{4}+\frac{2}{3} = \frac{12+8}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

مثال (2) / أوجد $\iint_D (x+y)\,dA$ حيث $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$

Sol. ① $\int_0^1\int_0^2 (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\left[\int_0^2 (x+y)\,dy\right]dx$

$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{2} dx = \int_0^1 (2x+2)\,dx$

$= \left[x^2+2x\right]_{x=0}^{1} = 1+2 = 3$

② $\int_0^2\left[\int_0^1 (x+y)\,dx\right]dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{x=0}^{1} = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}+y\right)dy$

$= \frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}\Big]_{y=0}^{2} = 1+2 = 3$

مثال (3) / جد $\iint_D xy\,dA$ حيث $D=\{(x,y): 0\le x\le 3,\ -1\le y\le 1\}$

Sol. ① $\int_{-1}^1\int_0^3 xy\,dx\,dy = \int_{-1}^1\left[\int_0^3 (xy)\,dx\right]dy$

$= \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2y}{2}\right]_{x=0}^{3} = \int_{-1}^1 \frac{9}{2}y\,dy$

$= \frac{9}{4}y^2\Big]_{y=-1}^{1} = \frac{9}{4}-\frac{9}{4} = 0$

② $\int_0^3\left[\int_{-1}^1 (xy)\,dy\right]dx$

$= \int_0^3 \frac{xy^2}{2}\Big]_{-1}^{1} dx = \int_0^3 \left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)dx = 0$

ثانياً: اذا كانت D بالشكل:

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b \; , \; f(x) \le y \le g(x)\}$$

فالتكامل الثنائي يكون بالشكل:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

مثال (1) / جد التكامل $\iint_D xy\,dA$ حيث أن

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \; , \; x \le y \le x^2\}$$

Sol/

$$\int_0^1 \int_x^{x^2} xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_x^{x^2} xy\,dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 x \frac{y^2}{2}\Big]_x^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,y^2\Big]_x^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\,(x^4 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^5 - x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(1)^6}{6} - \frac{(1)^4}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4-6}{24}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{24}\right) = \boxed{-\frac{1}{24}}$$

مثال (2) / أوجد $\iint_D (x+1)\, dA$ اذا كانت

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 ,\ x^2 \leq y \leq x\}$$

Sol. $\displaystyle \int_0^1\int_{x^2}^{x} (x+1)\, dy\, dx = \int_0^1\left[\int_{x^2}^{x} (x+1)\, dy\right] dx$

$$= \int_0^1 \Big[xy + y\Big]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[(x^2 + x) - (x^3 + x^2)\right] dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^3)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4-2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

ثالثاً: إذا كانت D بالشكل:

$$D = \{(x,y) : v(y) \leq x \leq w(y) , \; c \leq y \leq d\}$$

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_{v(y)}^{w(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

مثال (1) / أوجد $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\, dx\, dy$

Sol.

$$\int_0^1 \left[\int_0^y e^{y^2}\, dx\right] dy = \int_0^1 x e^{y^2} \Big]_0^y \, dy$$

$$= \int_0^1 y e^{y^2}\, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 2y e^{y^2}\, dy$$

نزل اشتقاق نضرب ونقسم $\frac{2}{2}$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[e^1 - e^0 \right] = \boxed{\frac{1}{2} e - \frac{1}{2}}$$

مثال (2) / أوجد $\displaystyle\iint_D (x^2+1)\, dA$ حيث أن

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y^2 , \; 0 \leq y \leq 1\}$$

Sol.

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} (x^2+1)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} (x^2+1)\, dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{3} + x \Big]_0^{y^2} dy = \int_0^1 \left[\frac{(y^2)^3}{3} + y^2 \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^6}{3} + y^2 \right) dy = \frac{y^7}{21} + \frac{y^3}{3} \Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{21} + \frac{1}{3} = \frac{1+7}{21} = \frac{8}{21}.$$

32

32

رابعاً: إذا كانت D بالشكل

$$D=\{(x,y) : f(y)\le x\le g(y) \,,\, v(x)\le y\le w(x)\}$$

فإن التكامل الثنائي يصبح بالشكل

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{y=v(x)}^{y=w(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$=\int_c^d\int_{x=f(y)}^{x=g(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

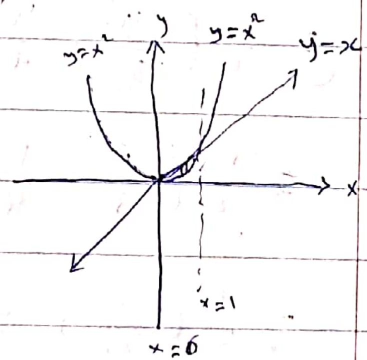
مثال (1)

س: أوجد $\iint_D xy\,dA$ بطريقتين حيث أن D هي المنطقة المحددة بـ $y=x^2$, $y=x$

الحل

①: الطريقة الأولى

1. $\iint_D xy\,dy\,dx$



$\because\ y=x^2$ و $y=x \Rightarrow x^2=x$

$\Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$

$\Rightarrow$ either $x=0$ or $x=1$

$$\therefore \int_0^1\int_{x^2}^{x} xy\,dy\,dx=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{x} xy\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,y^2\Big]_{x^2}^{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x^2-x^4)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^3-x^5)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{6-4}{24}\right)=\frac{1}{24}$$

② الطريقة الثانية

2. $\iint_D xy \, dx \, dy$

لايجاد الفترات

when $x = 0 \Rightarrow y = 0$

when $x = 1 \Rightarrow y = 1$

لايجاد $f(y)$ و $g(y)$ فالاتي

$y = x$ (معطى) $\Rightarrow \cancel{x} = \cancel{y}$

لا قيمة الدالة الأكبر نختار $\frac{1}{2}$

$\therefore y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

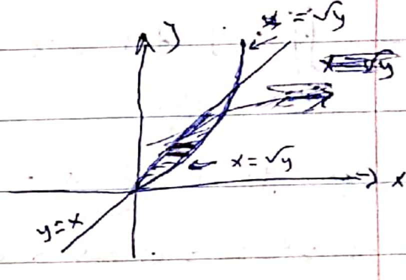
$\frac{1}{2}$ الجذر $\sqrt{0.5} = 0.7$

$$\therefore \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_{y}^{\sqrt{y}} xy \, dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} y \Big]_{y}^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 y \Big]_{y}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\cancel{y} \left((\sqrt{y})^2 - (y)^2 \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y (y - y^2) \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 - y^3) \, dy$$



$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4-3}{12} \right\}$$

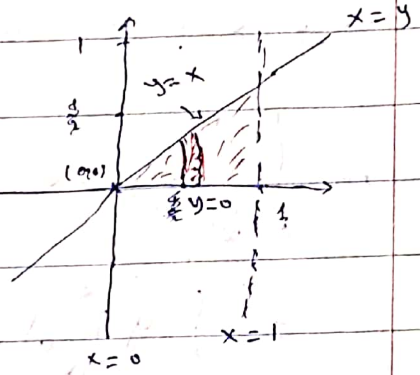
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} \right) = \boxed{\frac{1}{24}}$$

Scanned by CamScanner

33/34

مثال(2)/ أوجد $\iint_D e^{-x^2}\, dA$ حيث أن D المنطقة المحدودة بـ $y=x$ و $x=1$ ومحور x؟

الحل/ المنطقة تتضح من الرسم



1. $\iint_D e^{-x^2}\, dx\, dy$

لا يمكن حله لان المشتقة لـ e^{-x^2} غير موجودة

2. $\iint_D e^{-x^2}\, dy\, dx$ يمكن حله

$$= \int_0^1\int_{y=0}^{y=x} e^{-x^2}\, dy\, dx = \int_0^1\left[\int_0^x e^{-x^2} dy\right] dx$$

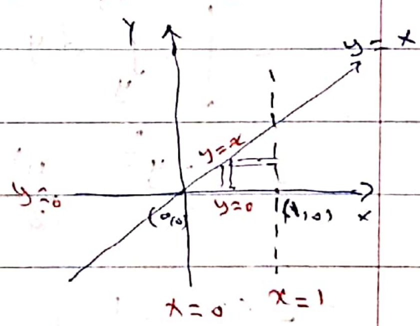
$$= \int_0^1 y\, e^{-x^2}\Big]_0^x dx = \int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-1} - e^{0}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e} - 1\right] = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}}$$

مثال(3)/ أوجد $\iint_D \frac{\sin x}{x}\, dA$ حيث أن المنطقة D محدوده بـ $y=x$ و $x=1$

الحل/ المنطقة تتضح من الرسم



$$\int_0^1\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 y\,\frac{\sin x}{x}\Big]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \cancel{x}\,\frac{\sin x}{\cancel{x}}\, dx = \int_0^1 \sin x\, dx$$

$$= -\cos x\Big]_0^1 = -\left[\cos(1) - \cos(0)\right] = \cos(0) - \cos(1)$$

$$= 1 - 0.99984 = 0.000152$$

مثال (4) / اوجد $\iint_D dA$ حيث D محددة بـ $y=x^2$ ، $y=x$ (بالترتيب)

Sol: $\because y = x^2$ & $y = x$

$\Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$

$\Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow$ either $x = 0$ or $x = 1$

$$\therefore \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 y \Big]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Now When $x = 0 \Rightarrow y = 0$

When $x = 1 \Rightarrow y = 1$

$\therefore$ حدود التكامل لـ y هي $[0,1]$

$\because y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

& $\because x = y$ (معطى)

لاختيار الدالة الاكبر نختار $\frac{1}{2}$ ضمن الفترة $[0,1]$ فيكون $\sqrt{y} > y$

$$\therefore \int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_{y}^{\sqrt{y}} dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 x \Big]_{y}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 (\sqrt{y} - y)\, dy$$

$$= \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(1)^2}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right] = \frac{4-3}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

مثال (5) / أوجد $\iint_D (x^2+y^2)\,dA$ حيث أن

$D = \{(x,y) : \sqrt{y} \le x \le y \;,\; x \le y \le x^2\}$ بطريقتين

الحل: ① الطريقة الأولى

$\because\; x = y \;\cap\; x = \sqrt{y}$

$\Rightarrow y = \sqrt{y} \Rightarrow (y)^2 = (\sqrt{y})^2 \Rightarrow y^2 = y$

$\Rightarrow y^2 - y = 0 \Rightarrow y(y-1) = 0$

$\Rightarrow$ either $y = 0$ or $y = 1$

$\therefore$ حدود التكامل لـ y هي $[0,1]$

لاختبار الدالة الأكبر نختار $\frac{1}{2}$ ضمن $[0,1]$ نلاحظ $0.7 =$ تكون الأكبر هي $x = y$

$$\therefore \int_0^1 \int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + x y^2 \right]_y^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{(\sqrt{y})^3}{3} + y^{\frac{5}{2}} \right) - \left(\frac{y^3}{3} + y^3 \right) \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} y^3 \right) dy$$

$$= \left[\frac{2}{15} y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} - \frac{y^4}{3} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2}{15} + \frac{2}{7} - \frac{1}{3} \right] = \frac{14+30-35}{105} = \frac{9}{105} = \boxed{\frac{3}{35}}$$

② الطريقة الثانية

$\because\; y = x^2 \;\cap\; y = x$

$\Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$

$\Rightarrow x(x-1) = 0$

$\Rightarrow$ either $x = 0$ or $x = 1$

لاختبار الدالة الأكبر نختار $\frac{1}{2}$ ضمن الفترة تكون $y = x^2 < y = x$

$$\therefore \int_0^1\int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(x^3 + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} \right) = \frac{35-21-5}{105} = \frac{9}{105} = \boxed{\frac{3}{35}}$$

35

مثال (٥) / أوجد $\iint xy\, dA$ بطريقتين حيث ان D هي
المنطقة المحدودة بـ $y = 2x$ و $y = x^2$ D

Sol. الحل / ① الطريقة الاولى

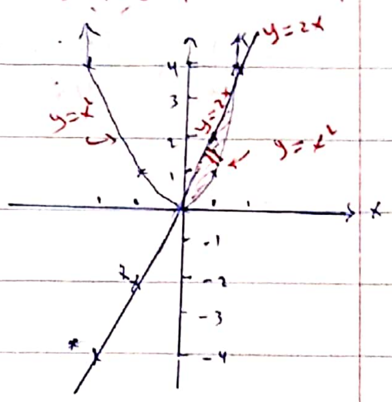
$\because y = x^2$ & $y = 2x$

$\Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(x-2) = 0$

either $x = 0$ or $x = 2$

$\therefore$ حدود التكامل لـ x هي $[0,2]$



$$\therefore \int_0^2\int_{x^2}^{2x} xy\, dy\, dx = \int_0^2\left[\int_{x^2}^{2x} xy\, dy\right] dx$$

$$= \int_0^2 x \frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x y^2\Big]_{x^2}^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x\left[(2x)^2 - (x^2)^2\right] dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x(4x^2 - x^4)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (4x^3 - x^5)\, dx = \frac{1}{2}\left[\cancel{4}\frac{x^4}{\cancel{4}} - \frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[2^4 - \frac{2^6}{6}\right] - 0$$

$$= \frac{1}{2}\left(16 - \frac{64}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{96-64}{6}\right) = \frac{32}{12} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

② الطريقة الثانية

when $x = 0 \Rightarrow y = 0$

when $x = 2 \Rightarrow y = 4$

$\therefore$ حدود التكامل لـ y هي $[0,4]$

$\because y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$

& $\because y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

لاختيار الدالة الاكبر نعوض (١) مثلاً بالقيمة

نلاحظ $\sqrt{y} > \frac{y}{2}$

$$\therefore \int_0^4\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} xy\, dx\, dy = \int_0^4\left[\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} xy\, dx\right] dy$$

$$= \int_0^4 \frac{x^2}{2} y\Big]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^4 x^2 y\Big]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^4 y\left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \left(y^2 - \frac{y^3}{4}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{16}\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left[\frac{64}{3} - \frac{256}{16}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1024 - 768}{48}\right) = \frac{1}{\cancel{2}_1}\left(\frac{\cancel{256}^{128}}{48}\right) = \frac{128}{48}$$

$$= \boxed{\frac{8}{3}}$$

مثال (٣) / أوجد $\iint_D dA$ بطريقتين حيث أن D هي المنطقة المحدودة بـ $y = x^3$, $y = x$

الحل / ① الطريقة الأولى

Sol: $\because y = x^3 \;\&\; y = x \Rightarrow x^3 = x$

$\Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ or $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\therefore$ حدود التكامل هي $[-1, 1]$

$$\therefore \int_{-1}^{1}\int_{x}^{x^3} dy\,dx = \int_{-1}^{0}\left[\int_{x}^{x^3} dy\right] dx + \int_{0}^{1}\left[\int_{x^3}^{x} dy\right] dx$$

$$\cancel{= \int_{-1}^{1} y\Big]_{x}^{x^3} dx = \int_{-1}^{1}(x^3 - x)\,dx}$$

لأنه قد $-\frac{1}{2}$ تنتمي للفترة $[-1,0]$ فيكون $x^3 > x$

$$\therefore \int_{-1}^{0}\left[\int_{x}^{x^3} dy\right] dx = \int_{-1}^{0} y\Big]_{x}^{x^3} dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Now

$$\int_{0}^{1}\left[\int_{x^3}^{x} dy\right] dx = \int_{0}^{1} y\Big]_{x^3}^{x} dx$$

هنا لأنه قد $\frac{1}{2}$ ينتمي للفترة $[0,1]$ فيكون $x > x^3$

$$= \int_{0}^{1}(x - x^3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \int_{-1}^{0}\left[\int_{x}^{x^3} dy\right] dx + \int_{0}^{1}\left[\int_{x^3}^{x} dy\right] dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

② الطريقة الثانية

when $x = 0 \Rightarrow y = 0$

when $x = 1 \Rightarrow y = 1$

when $x = -1 \Rightarrow y = -1$

Now $\because\; y = x^3 \Rightarrow x = y^{\frac{1}{3}}$

$\because\; y = x \Rightarrow x = y$

$$\therefore \int_{-1}^{1}\int_{y^{\frac13}}^{y} dx\, dy = \int_{-1}^{0}\left[\int_{y^{\frac13}}^{y} dx\right] dy + \int_{0}^{1}\left[\int_{y}^{y^{\frac13}} dx\right] dy$$

$$\therefore \int_{-1}^{0}\left[\int_{y^{\frac13}}^{y} dx\right] dy = \int_{-1}^{0} x\Big]_{y^{\frac13}}^{y} dy$$

$$= \int_{-1}^{0} (y - y^{\frac13})\, dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{3}{4} y^{\frac43}\right]_{-1}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac12 - \frac34\right) = \frac34 - \frac12 = \boxed{\frac14}$$

$(-1)^{\frac43} = \{(-1)^3\}^{\frac43} = (-1)^4 = \boxed{1}$

Now $$\int_{0}^{1}\left[\int_{y}^{y^{\frac13}} dx\right] dy = \int_{0}^{1} x\Big]_{y}^{y^{\frac13}} dy$$

$$= \int_{0}^{1} (y^{\frac13} - y)\, dy = \left[\frac34 y^{\frac43} - \frac{y^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac34 - \frac12 = \frac14$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}\int_{y^{\frac13}}^{y} dx\, dy = \frac14 + \frac14 = \boxed{\frac12}$$

تطبيقات على التكامل الثنائي

لإيجاد المساحة بين المنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ نستخدم القانون الثاني :

$$\iint_D dA$$

حيث ان D هي المنطقة المراد حساب مساحتها .

مثال (1) / احسب المساحة بين المنحنيين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sin x}^{\cos x} dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_{\sin x}^{\cos x} dy\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} y\Big]_{\sin x}^{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$= \sin x + \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \boxed{\frac{2}{\sqrt{2}} - 1}$$

مثال (2) / أوجد المساحة بين المنحنيين $y = x^2$ ، $y = x$ ؟

الحل

$\because\; y = x^2$ و $y = x \Rightarrow x^2 = x$

$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ or $\boxed{x = 1}$

$$\therefore \int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1\left[\int_{x^2}^{x} dy\right] dx = \int_0^1 y\Big]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

مثال (3) / جد المساحة المحدودة بين المنحنيين في الربع الأول $y = 2\sqrt{6-x}$ و $y = \sqrt{8x}$ و $y = 0$ ؟

Sol. $\because y = \sqrt{8x}$ & $y = 2\sqrt{6-x}$

$\Rightarrow \sqrt{8x} = 2\sqrt{6-x} \xRightarrow{\text{بالتربيع}} 8x = 4(6-x)$

$\Rightarrow 8x = 24 - 4x \Rightarrow 12x = 24 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$\because y = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{8x} \Rightarrow (0)^2 = 8x \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\therefore$ حدود التكامل لـ x هي $[0,2]$

When $x = 0 \Rightarrow y = 0$

When $x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{16} \Rightarrow y = 4$

$\therefore$ حدود التكامل لـ y هي $[0,4]$

Now $\because y = \sqrt{8x} \Rightarrow y^2 = 8x \Rightarrow \boxed{x = \frac{y^2}{8}}$

& $\because y = 2\sqrt{6-x} \Rightarrow y^2 = 4(6-x) \Rightarrow \boxed{x = 6 - \frac{y^2}{4}}$

$$\therefore \int_0^4 \int_{\frac{y^2}{8}}^{6-\frac{y^2}{4}} dx\, dy = \int_0^4 \left[\int_{\frac{y^2}{8}}^{6-\frac{y^2}{4}} dx \right] dy$$

$$= \int_0^4 x \Big]_{\frac{y^2}{8}}^{6-\frac{y^2}{4}} dy = \int_0^4 \left(6 - \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{8}\right) dy$$

$$= \int_0^4 \left(6 - \frac{3y^2}{8}\right) dy = \left[6y - \frac{y^3}{8}\right]_0^4$$

$$= \left[24 - \frac{64}{8}\right] = \frac{192 - 64}{8} = \frac{128}{8} = \boxed{16}$$