تكاملات متقدم

الحجوم الدورانية

لإيجاد الحجوم الدورانية الناتجة من دوران منحنى الدالة حول محور معين هنالك طريقتان :-

اولاً : طريقة الشريحة

ثانياً : طريقة القشرة الاسطوانية

اولاً : طريقة الشريحة — طريقة القرص / طريقة الواشر

١- طريقة القرص

تعريف 1

: اذا كانت $y=f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على الفترة $[a,b]$ فالحجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين $y=f(x)$ والمستقيمين $x=a$, $x=b$ حول محور x هو

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

مثال (1)

: أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمنحني $y=\sqrt{x}$, $0\le x\le 4$ حول محور x ؟

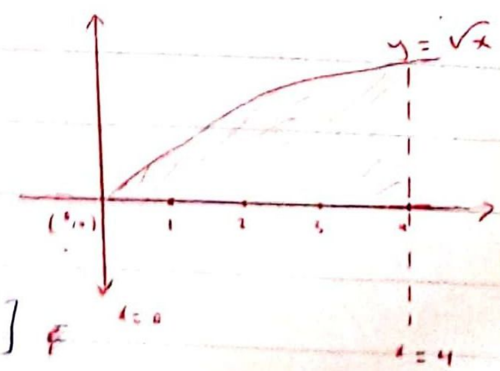
الحل

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

$$=\pi\int_0^4 x\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\pi\left[\frac{4^2}{2}-0\right]$$

$$=\pi\left(\frac{16}{2}\right)=8\pi$$ وحدة مكعبة



مثال (2)

م/ : أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني $y=\sqrt{4-x^2}$ حول محور x ؟

Sol.

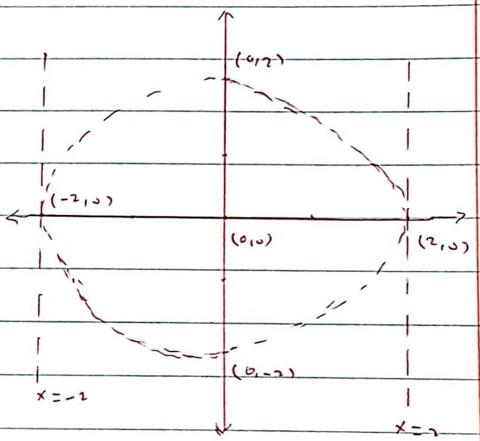
الحل / ملاحظة : عندما لا يعطي فترة [نعوض $y=0$ اذا كان حول محور x وبالعكس نعوض $x=0$ اذا كان الدوران حول محور y] لإيجاد حدود التكامل

$\therefore \; y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4-x^2$ (بتربيع الطرفين)

نعوض $y=0$

$y=0 \Rightarrow (0)^2 = 4-x^2$

$\therefore \; x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$



$$\therefore \; V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

$$= \pi\int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx$$

$$= \pi\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$= \pi\left[\left(4(2)-\frac{(2)^3}{3}\right)-\left(4(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right] = \pi\left(8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}\right)$$

$$= \pi\left(16-\frac{16}{3}\right) = \pi\left(\frac{48-16}{3}\right) = \boxed{\frac{32}{3}\pi}$$

مثال (3) (واجب)

م/ : اوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنحني $y=\sqrt{x}$, $1\le x\le 4$ حول محور x ؟

مثال (4) (سؤال)

اوجد حجم الجسم الناتج من دوران دائرة نصف قطرها 2 حول محور x ومركزها نقطة الاصل ؟ (نفس مثال 2)

(3)

تعريف (2)

س: اذا كانت $y = f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على الفترة $[c,d]$ فالحجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمنحني $y = f(x)$ والمستقيمين $y = c$, $y = d$ حول محور y هو :

$$V = \int_a^b \pi \, g^2(y) \, dy$$

حيث ان $g(y)$ دالة عكسية ايجادها من $f(x)$ بمعنى i.e. $x = g(y)$

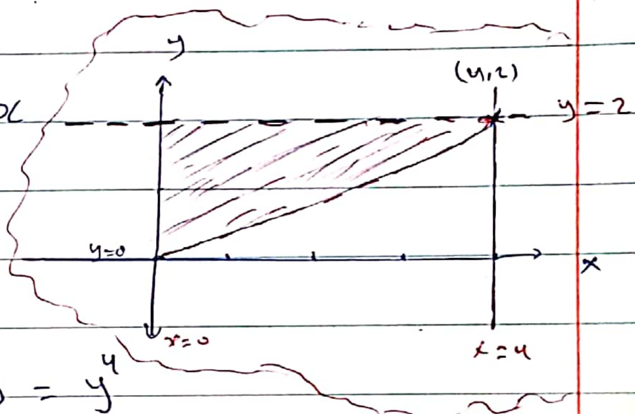
مثال (1)

س: أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمنحني $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ حول محور y ؟

Sol. $$V = \int_c^d \pi \, g^2(y) \, dy$$

الحل/ ① نجد "دالة" $g(y)$ حيث نحول الدالة بدلالة x وكالاتي

$\because y = \sqrt{x} \xRightarrow{\text{بالتربيع}} y^2 = x$



$\therefore x = g(y)$

$\therefore g(y) = y^2 \Longrightarrow g^2(y) = y^4$

② نجد حدود التكامل وكالاتي :

when $x = 0 \Longrightarrow y = \sqrt{0} = 0$ مرة نعوض $x=0$

ومرة اخرى نعوض $x=4$

when $x = 4 \Longrightarrow y = \sqrt{4} = 2$

∴ حدود التكامل هي $[0,2]$

$$\therefore V = \int_0^2 \pi \, y^4 \, dy = \pi \int y^4 \, dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{(2)^5}{5} \right) = \frac{32}{5} \pi$$

(٨)

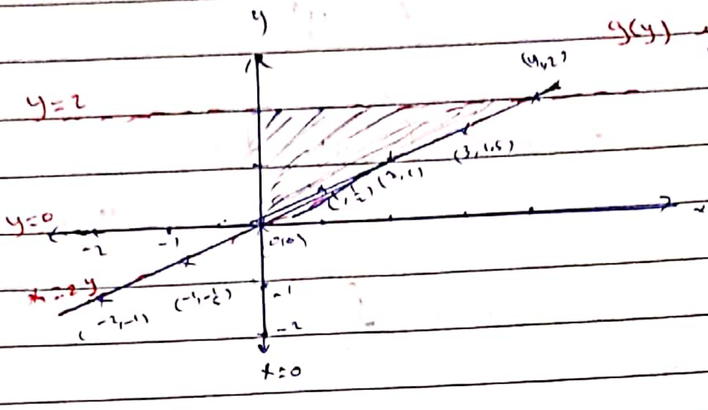
مثال (2)

س: أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=\frac{x}{2}$ ، $x=0$ ، $y=2$ حول محور y ؟

Sol:

$$V=\int_c^d \pi\, g^2(y)\, dy$$

① نجد $g(y)$



x	y
-2	-1
-1	$-\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	1
3	$\frac{3}{2}$
4	2

$\because y=\frac{x}{2}$

$\therefore x=2y$

$\therefore x=g(y)$

$\therefore g(y)=2y$

بالتربيع $\therefore g^2(y)=4y^2$

② نجد حدود التكامل

① $y=2$ (معطى)

② when $x=0$

$\therefore y=\frac{x}{2} \Rightarrow y=\frac{0}{2}$

$\therefore y=0$

∴ حدود التكامل هي $[0,2]$
والآن نعوض بالقانون

$$\therefore V=\int_0^2 \pi\, 4y^2\, dy$$

$$=4\pi\int_0^2 y^2\, dy=4\pi\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2$$

$$=4\pi\left(\frac{(2)^3}{3}-0\right)=4\pi\left(\frac{8}{3}\right)=\boxed{\frac{32\pi}{3}}$$

مثال (3) (واجب)

س: أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $x=\frac{2}{y}$ ، $1\le y\le 4$ حول محور y

Sol:

$$V=\int_c^d \pi\, g^2(y)\, dy$$

① حدود التكامل موجودة

② نجد $g(y)$

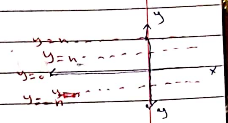
$\because \left.\begin{array}{l} x=g(y) \\ x=\frac{2}{y}\end{array}\right\} \Rightarrow g(y)=\frac{2}{y}$

$\therefore g^2(y)=\frac{4}{y^2}$

تعريف (3)

اذا كانت الدالة $y=f(x)$ معرفة ومستمرة على الفترة $[a,b]$ فالحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحني $y=f(x)$ والمستقيمين $x=a$, $x=b$ حول محور يوازي محور x $(y=n)$ هو :

$$V=\int_a^b \pi\,(f(x)-n)^2\,dx$$



تعريف (4)

اذا كانت الدالة $y=f(x)$ معرفة ومستمرة على الفترة $[c,d]$ فالحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحني $y=f(x)$ والمستقيمين $y=c$, $y=d$ حول محور يوازي محور y $(x=m)$ هو :

$$V=\int_c^d \pi\,[g(y)-m]^2\,dy$$

حيث ان $g(y)$ دالة يمكن ايجادها من $f(x)$ اي $x=g(y)$

مثال (1)

اوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمنحني $y=\sqrt{x}$, المستقيمين $y=1$, $x=4$ حول المستقيم $y=1$ ؟

Sol:

$$V=\int_a^b \pi\,[f(x)-n]^2\,dx$$

لايجاد حدود التكامل

الحد الاول معطاة $x=4$

اما الحد الثاني نعوض بمعادلة المنحني

اي نعوض $y=1$

$\because\ y=\sqrt{x}$

$\therefore\ 1=\sqrt{x}$

$\Rightarrow\ x=1$

$\therefore$ حدود التكامل هي $[1,4]$

$\because\ y=1 \Leftarrow n=1$

$$\therefore\ V=\pi\int_1^4 (\sqrt{x}-1)^2\,dx$$

مثال (2)

المسألة: أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = x^{\frac{3}{2}}$ والمستقيمين $y = 1$ و $y = 0$ حول المستقيم $x = 1$ ؟

الحل:

$$V = \int_c^d \pi \left[g(y) - m \right]^2 dy$$

(1) هنا حدود التكامل موجودة معطاة

(2) نجد قيمة $g(y)$ من الأس

$$\because \quad y = x^{\frac{3}{2}}$$

$$y^{\frac{2}{3}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$ نضرب الطرفين في $\frac{2}{3}$

$$\therefore \quad y^{\frac{2}{3}} = x$$ عند الرفع تضرب الأسس

$$\therefore \quad x = g(y)$$

$$\therefore \quad g(y) = y^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \quad V = \pi \int_0^1 \left(y^{\frac{2}{3}} - 1\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left[\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2 - 2 y^{\frac{2}{3}} + 1 \right] dy$$

عند الرفع نضرب الأسس

$$= \pi \int_0^1 \left[y^{\frac{4}{3}} - 2 y^{\frac{2}{3}} + 1 \right] dy$$

$$= \pi \left[\frac{3}{7} y^{\frac{7}{3}} - 2 \frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + y \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{7} (y)^{\frac{7}{3}} - \frac{6}{5} y^{\frac{5}{3}} + y \Big]_0^1 \pi$$

$$= \left[\frac{3}{7}(1) - \frac{6}{5}(1) + 1 \right] \pi$$

$$= \left(\frac{15 - 42 + 35}{35} \right) \pi = \frac{8}{35} \pi$$ وحدة مكعبة

مثال (3)

س: أوجد حجم الجسم الناتج من المنطقة المحدودة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ والمستقيمين $x=0$ ، $x=2$ حول المستقيم $x=2$ ؟

Sol:

$$V=\int_c^d \pi\,[g(y)-m]^2\,dy$$

① نجد حدود التكامل كالآتي:

$$x=0 \Rightarrow y=\sqrt{0} \Rightarrow y=0$$

$$x=2 \Rightarrow y=\sqrt{2}$$

∴ حدود التكامل هي $[0,\sqrt{2}]$

② نجد $g(y)$ بدلالة x كالآتي:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y^2=x$$

$$\therefore\ x=g(y)$$

$$\therefore\ g(y)=y^2$$

$$\therefore\ V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(y^2-2)^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(y^4-4y^2+4)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^5}{5}-\frac{4}{3}y^3+4y\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left[\frac{(\sqrt{2})^5}{5}-\frac{4}{3}(\sqrt{2})^3+4(\sqrt{2})\right]$$

$$=\left\{\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{8\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}\right\}\pi$$

$$=\left\{\frac{12\sqrt{2}-40\sqrt{2}+60\sqrt{2}}{15}\right\}\pi$$

$$=\frac{32\sqrt{2}}{15}\pi$$

ج- طريقة الواشر (Method Washer)

تعريف (1)

: اذا كانت $y = f(x)$, $y = g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a, b]$ فالحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمنحني حول محور x هو:

$$V = \int_a^b \pi \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$$

حيث $f(x) \geq g(x)$.

تعريف (2)

: اذا كانت $y = f(x)$, $y = g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[c, d]$ فالحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمنحني حول محور y هو:

$$V = \int_c^d \pi \left[v^2(y) - w^2(y)\right] dy$$

حيث ان $v(y) \geq w(y)$

وأن $v(y)$ و $w(y)$ يمكن استخراجها من $f(x)$, $g(x)$

مثال (3)

: أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمنحني $y = x^2$ و $y = 2x$

ا- حول محور x

ب- حول محور y

Sol:

الحل/ ① حول محور x اولاً

$$V = \int_a^b \pi \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$$

نجد حدود التكامل كالآتي

$\because y = x^2$, $y = 2x$

$\therefore x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(x-2) = 0$

either $x = 0$

or $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

∴ حدود التكامل هي $[0, 2]$

② نختبر احد الدالتين اكبر كالاتي: نختار عدد يقع ضمن فترة التكامل مشروطاً نأخذ (1) ونعوضه بالمعادلات الاثنين

$\because y = 2x \Rightarrow 2 \cdot 1 = 2$

$\because y = x^2 = (1)^2 = 1$

$\therefore 2x \geq x^2$

الان نطبق القانون

$$V = \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2]\, dx$$

$$= \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left[\frac{4(2)^3}{3} - \frac{(2)^5}{5} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right] = \left[\frac{160 - 96}{15} \right] \pi = \boxed{\frac{64}{15} \pi}$$ وحدة مكعبة

③ ثانياً / حول محور y

$$V = \int_c^d \pi [v^2(y) - w^2(y)]\, dy$$

نغير حدود التكامل كالاتي

من حدود التكامل التي استخرجت

ونعوضها في احد الشكلين المعطاة في السؤال

نعوض في الاول When $x = 0$

$\Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y = (0)^2 = \boxed{0}$

when $x = 2$

$y = x^2 \Rightarrow y = (2)^2 = \boxed{4}$

∴ حدود التكامل هي $[0, 4]$

Scanned by CamScanner

(١٥)

تعريف (3):

مبرهنة: إذا كانت $y = f(x)$ و $y = g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فالحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحني حول محور يوازي محور x $(y = m)$ هو:

$$V=\int_a^b \pi \left[(f(x)-m)^2-(g(x)-m)^2\right] dx$$

حيث $f(x) \geq g(x)$

تعريف (4):

مبرهنة: اذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[c,d]$ فالحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحني حول محور يوازي محور y $(x = n)$ هو:

$$V=\pi\int_c^d \left[(v(y)-n)^2-(w(y)-n)^2\right] dy$$

حيث: $v(y) \geq w(y)$

$v(y)$, $w(y)$ دوال يتم استخراجها من $f(x)$, $g(x)$

مثال (1):

مبرهنة: أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحني $y = x^2$ و $y = 2x$ حول ① $x = 2$ ② $y = 4$ ؟

الحل:

الحل/ ① حول $x = 2$

$$V=\int_c^d \pi \left[(v(y)-n)^2-(w(y)-n)^2\right] dy$$

$\because y = x^2$, $y = 2x$

① نجد الفترة

$\therefore x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

$\therefore$ either $x = 0$ or $x = 2$

① when $x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 \Rightarrow y = 0$

② when $x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 \Rightarrow y = 4$

(11)

∴ حدود التكامل هي $[0,4]$

② لايجاد $u(y), v(y)$ لما كالاتي:

المنحنى الأول: ∴ $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

المنحنى الثاني: ∴ $y = 2x \quad x = \frac{y}{2}$

شرط (1): لاختبار الدالة الاصغر نختار رقم يقع ضمن الفترة $[0,4]$ وكالاتي:

المنحنى الأول: ∴ $x = \sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{1} = 1$

المنحنى الثاني: ∴ $x = \frac{y}{2} \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

∴ $x = \frac{1}{2}$

∴ ~~[illegible]~~

∴ $\frac{y}{2} \leq \sqrt{y}$

الدالة الثانوية

∴ $V = \pi \int_0^4 [(\frac{y}{2} - 2)^2 - (\sqrt{y} - 2)^2] \, dy$

$= \pi \int_0^4 [(\frac{y^2}{4} - 2y + 4) - (y - 4y^{\frac{1}{2}} + 4)] \, dy$

$= \pi \int_0^4 [\frac{y^2}{4} - 3y + 4y^{\frac{1}{2}}] \, dy$

$= \pi [\frac{y^3}{12} - 3\frac{y^2}{2} + \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}}]_0^4$

$= \pi [\frac{(4)^3}{12} - \frac{3}{2}(4)^2 + \frac{8}{3}(4)^{\frac{3}{2}}] = \pi [\frac{64}{12} - 24 + \frac{64}{3}]$

$= \frac{64 - 288 + 256}{12} \pi = \frac{8}{3} \pi$ وحدة مكعبة □

② حول $y = 4$

$V = \int_a^b [(f(x) - m)^2 - (g(x) - m)^2] \, dx$

نجد الفترة كالاتي:

∴ $y = x^2 \;,\; y = 2x$

∴ $x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

∴ $x(x-2) \Rightarrow x = 0$ or $x = 2$

نجد الدالة الاصغر كالاتي: نختار العدد (1) والذي يقع ضمن الفترة $[0,2]$

∴ $y = x^2 \Rightarrow y = (1)^2 = 1$ صغرى

∴ $y = 2x \Rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2$

$\therefore \quad x^2 \leq 2x$

[illegible]

$$\therefore V = \pi \int_0^2 \left[(x^2-4)^2 - (2x-4)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[(x^4 - 8x^2 + 16) - (4x^2 - 16x + 16)\right] dx$$

$$= \pi \int_0^2 (x^4 - 12x^2 + 16x)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 4x^3 + 8x^2\right]_0^2$$

$$= \pi \left[\frac{(2)^5}{5} - 4(2)^3 + 8(2)^2\right]$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} - \cancel{32} + \cancel{32}\right] = \frac{32}{5}\pi \quad \square$$

Scanned by CamScanner