الفصل الاول

مبادئ المنطق Elements of Logic

**العبارات statements**

العبارة: هي جمله خبريه التي تعلن عن احتمالين اما صدقها او كذبها وليس كلاهما. او انها جمله لها احتمال واحد وواحد فقط من احتمال قيم الصدق صائبة true(T) ا ﺬ ا كانت خاطئة false(F)

امثله.

1.الشمس تظهر ليلا F

2. 3+9=5 F

3. 3√عدد غير نسبي T

الجمل الاتية ليست عبارات

1. كيف كان يومك؟

2.كم هو عدد اشهر السنه ؟

3.اكتب السؤال على السبورة

العبارات المركبة **compound statements**

للحصول على العبارة المركبة يمكن دمج عبارات بسيطة بواسطة كلمات تدعى الروابط (connectives) وهناك ثلاث طرق لتشكيل عبارات مركبة وهي الوصل conjunction الفصل disjunction والنفي negation.

**الوصل : و conjunction and**

لتكن كل من pوqعبارة فأن وصل هاتين العبارتين هو العبارة المركبة "pوq" بالرموز p˄ q يعتمد على صدق p وq حيث أن p^ q تكون صائبة فقط أ ﺬ ا كانت كل من p ,q صائبة

**مثال //**

لتكن p هي العبارة "الخوارزمي عالم عربي T " , q "أرخميدس عالم اغريقي T"

فأن العبارة p^ q تكون صائبة فقط الخوارزمي عالم عربي وارخميدس عالم اغريقي

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P˄ q | q | p |
| T | T | T |
| F | F | T |
| F | T | F |
| F | F | F |

**الفصل or disjunction**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p˅ q | q | P |
| T | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |
| F | F | F |

**مثال /**

لتكن p هي العبارة "مهند سيلتحق بالقوة الجوية "

q هي العبارة "مهند شاب منظم "

فأن العبارة p˅ q ستكون "مهند سيلتحق بالقوة الجوية أو هو شاب منظم ان هذه العبارة ستكون خاطئة في حالة واحدة فقط عندما تكون pوq كلاهما خاطئة.

**النفي negation**

نفي العبارة pهو "ليست p" بالرموز p̴ جدول الصدق لها هو

P:3+2=4 F 3+2≠4 T

2≤5 T ← 5<2 F

|  |  |
| --- | --- |
| p ̴ | P |
| F | T |
| T | F |

يمكن دمج العبارات للحصول على عبارات جديدة فمثلا لو اخذنا p ,q عبارة فأننا يمكن أن نحصل على العبارة المركبة p˄ q)˅̴ p) أو p˅ q)˄p) او أي تركيبة اخرى

جدول الصدق للعبارة المركبة

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| p˄ q)˅̴ p ) | p˄ q | P ̴ | q | P |
| T | T | F | T | T |
| F | F | F | F | T |
| T | F | T | T | F |
| T | F | T | F | F |

Example//

Find the truth table of (p˅ q)˄p

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| p˅ q)˄p) | p˅ q | q | P |
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| F | T | T | F |
| F | F | F | F |

Example//

Find the truth table of (p˅ q)˄( ̴ p˅ ̴ q) )H.W.

Sol.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p˅ q)˄(̴ p˅ ̴ q) ) | q̴ ˅P ̴ | p˅ q | ̴ q | p ̴ | q | P |
| F | F | T | F | F | T | T |
| T | T | T | T | F | F | T |
| T | T | T | F | T | T | F |
| F | T | F | T | T | F | F |

**مثال //**

لتكن p هي العبارة 5 عدد نسبي و q هي العبارة 5 عدد اولي فأن نفي العبارة "5 عدد نسبي أو 5 عدد اولي " هو "5عدد غير نسبي و 5 عدد غير اولي "

**تعريف العبارات المتكافئة logical equivalence**

يقال للعبارتين بأنهما متكافئتان ا ﺫ ا كانت مكونتين من نفس المركبات الاساسية ولهما نفس قيم الصدق .

مثال//

العبارات p˄ q)) ̴ Ξ p˅ ̴ q ̴

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p˅ ̴ q ̴ | p˄ q)) ̴ | p˄ q | q ̴ | P ̴ | q | P |
| F | F | T | F | F | T | T |
| T | T | F | T | F | F | T |
| T | T | F | F | T | T | F |
| T | T | F | T | T | F | F |

لاحظ ان العبارة p˅ ̴ q ̴ والعبارة p˄ q)) ̴ لهما نفس جدول الصدق أ ﺬ ن هي متكافئتان.

H.W Example

show that ̴ (p˅ q) Ξ ( ̴ p˄ ̴ q)

sol.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p˄ ̴ q ̴ | p˅ q))̴ | p˅ q | q̴ | p̴ | q | p |
| F | F | T | F | F | T | T |
| F | F | T | T | F | F | T |
| F | F | T | F | T | T | F |
| T | T | F | T | T | F | F |

ا ﺬ نp˄ ̴ q) ̴ )Ξp˅ q) ) ̴

**العبارات الشرطية: conditional statements**

لتكن كل من p, q عبارة سنرمز للعبارة المركبة "ا ﺬ ا كانت p فأن q" بالرمز "p→ q"وتسمى p بالفرضية hypothesis وتسمى q تابع او ناتجconsequent

ملاحظة:

العبارة المركبة p→ q تكون صادقة دائما ماعدا في حالة واحدة وهي عندما تكون p true و q false

**مثال//**

لتكن p"احمد يدرس باستمرار" q "احمد سينجح في الامتحان "

فان العبارة الشرطية p→ q ستكون ا ﺬ ا احمد يدرس باستمرار فانه سينجح في الامتحان

Then truth table to conditional statements

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| p→ q | q | P |
| T | T | T |
| F | F | T |
| T | T | F |
| T | F | F |

Ex. Show that ̴ (p→ q) Ξ p˄ ̴ q

Sol.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p˄ ̴ q | p→ q)) ̴ | p→ q | ̴q | q | P |
| F | F | T | F | T | T |
| T | T | F | T | F | T |
| F | F | T | F | T | F |
| F | F | T | T | F | F |

ملاحظة :- تعطي التعابير التالية المعنى نفسة

1.p→ q

2. ا ﺬ ا كانت p فان q

3.p تؤدي الى q

4.q ا ﺬ ا p ( P فقط اذا (q

5.p هي شرط ضروري كاف الى q sufficient condition

6.q هي شرط ضروري الى p necessary condition

7.q تستنتج من p

تعاريف مكافئه

يقال للعبارة الشرطية q→ p"" بانها معكوس(converse) العبارة "p→ q" ويقال للعبارة q→ ̴p̴ بانها الضد الموجب(contrapositive) للعبارة p→ q ويقال للعبارة p→ ̴ q ̴ بانها نظير(inverse) العبارة p→ q

Then truth table to converse q → p contrapositive ̴ q→ ̴ p and inverse ̴ p→ ̴ q

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ̴q→ ̴ p | ̴p→ ̴ q | q→ p | P → q | q̴ | ̴ p | q | P |
| T | T | T | T | F | F | T | T |
| F | T | T | F | T | F | F | T |
| T | F | F | T | F | T | T | F |
| T | T | T | T | T | T | F | F |

Note that p→ q Ξ ̴ q→ ̴ p and q→ p Ξ ̴ p→ ̴ q

**العبارات ثنائية الشرط Biconditional p↔ q**

العبارة p↔ q تعني p→ q وايضا q→ p وتسمى بالعبارة الثنائية الشرط وتقرأ " p ا ﺬ ا وفقط ا ﺬ ا q "

ملاحظة :-

1.العبارة p↔ q ستكون T فقط عندما تكون لكل من p و q نفس قيم الصدق اي عندما يكون كلاهما T او كلاهما F .

2.p↔ q Ξ ( p→ q ) ˄ ( q→ p)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p↔ q | p→ q) ˄ (q→ p)) | q→ p | p→ q | q | P |
| T | T | T | T | T | T |
| F | F | T | F | F | T |
| F | F | F | T | T | F |
| T | T | T | T | F | F |

**تحصيل الحاصل والتناقضات والمحاججات**

\*تدعى العبارات المركبة التي تكون صادقة مهما كانت قيم الصدق لمركباتها البسيطة بتحصيل حاصل Tautology

Example:- let statements p→ (p˅ q) is tautology

Sol.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| p→ p˅ q | p˅ q | q | P |
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| T | T | T | F |
| T | F | F | F |

**التناقض contradiction**

تدعى العبارة المركبة التي تكون خاطئة لجميع احتمالات قيم الصدق بالتناقضات .

Example\\

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P ˄ ̴ p | ̴ p | P |
| F | T | F |
| F | F F | T |

p ˄ ̴ p is contradiction hence,

**المحاججات :- Arguments**

هي العبارة المركبة التي توضع فيها الفرضيات والنتيجة معا بعبارة شرطية واحدة

فمثلا :-

ا ﺬ ا كانت تمثل الفرضيات و q تمثل النتيجة فأن المحاججة ستكون بالصيغة

q →P n ) ˄ ......˄P2 ˄P1)

يقال للمحاججة بانها صائبة ا ﺬ ا كانت تحصيل حاصل وبعكس ذلك يقال بانها غير صائبة .

مثال//

ا ﺬ ا كان 2√ عدد نسبي فانة يكتب على شكل b/a حيث a,b اعداد صحيحة و b≠0 لكن 2√ لا يمكن ان يكتب بهذه الطريقة وعلية فان 2√ عدد غير نسبي .

الحل//

ا ﺬ ا فرضنا p1 هي العبارة 2√ عدد نسبي .

P2 هي العبارة 2√ يمكن كتابته على شكل b/a حيث b≠0 .

فان المحاججه يمكن ان تمثل بالصيغة

P2)→ ̴ p1 ̴ )˄ (p1→p2)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (P1→p2) ˄ ̴p2 → ̴p1 | P1→p2) ˄ ̴ p2) | P1→p2 | P2 ̴ | P1 ̴ | P2 | P1 |
| T | F | T | F | F | T | T |
| T | F | F | T | F | F | T |
| T | F | T | F | T | T | F |
| T | T | T | T | T | F | F |

محاججة هي تحصيل حاصل فان محاججة صائبة

مثال//

ا ﺬ ا لم تكن السماء ممطرة فان احمد سيشعر بتحسن ولكن السماء ممطرة فان احمد لا يشعر بتحسن .

الحل //

نفرض ان p1 السماء غير ممطرة ,P2 احمد يشعر بتحسن

وعلية فان المحاججة p1→ ̴ p2 ̴ ˄(p1→p2)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P1→p2) ˄ ̴p1→ ̴p2) | P1→p2) ˄ ̴p1) | P1→p2 | P2̴ | P1̴ | P2 | P1 |
| T | F | T | F | F | T | T |
| T | F | F | T | F | F | T |
| F | T | T | F | T | T | F |
| T | T | T | T | T | F | F |

الجمل المفتوحة (open sentences)

هي الجملة التي تحوي على متغير واحد او اكثر وتتحول الى عبارة عند اعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض وتدعى بالمجموعة الشاملة .

فمثلا :7=x+5 universal set U ) )

مثال//

مجموعة الحل للجملة المفتوحة x<3 في حالة كون المجموعة هي N فتكون

{0,1,2} وفي حالة كون مجموعة شاملة هي z فان مجموعه الحل هي

{2,1,0,-1,-2,.…} ,

\* سنرمز للدلالة على حملة مفتوحة لها متغير واحد p(x).

مثال//

الجمل المفتوحة x + y=7 تحوي على متغيرين هما x وy.

مجموعة الشاملةU=NxN

فان مجموعة الحل هي s={(0,7),(7,0),(1,6),(6,1),(3,4),(4,3),(2,5),(5,2)}

\*سنرمز للدلالة على جمل المفتوحة لها متغيرين p(x , y).

ملاحظة //

1. يمكن ربط الجمل المفتوحة بأدوات الربط ˄,˅,→,↔ للحصول على جمل مفتوحة اخرى .

2. في الجملة المفتوحة المركبة التي لها نفس المتغير يجب ان تكون U هي نفسها لجميع هذه الجمل

مثال // لتكن p(x) هي جملة المفتوحة x+2=7 ,q(x) هي جملة المفتوحة x+4<12

فان p(x) ˄ q(x) ستكون الجملة المفتوحة x+4<12 and x+2=7))

If [x+2=7 then x+4<12] p(x)→q(x)

مثال //

P(x):

q(x): x-4 and x+1≠5, then ̴ q(x) x≠4 or x+1=5

تكافؤ الجمل المفتوحة

لتكن p(x):2x=4 ,q(x): x-1=1

ولتكن مجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الاعداد الصحيحة z نلاحظ مجموعة الحل للجملة p(x) هي 2}} ومجموعة الحل للجملة q(x) هي 2}} تسمى الجملتان المفتوحتان p(x),q(x) متكافئتين ا ﺬ ا تساوت مجموعتي الحل لكل منهما

**العبارات المسورة Quantifier statements**

هي العبارات الرياضية التي تحوي على كلمتين بعض وكل (قليل ,جميع)

مثال // 1. بعض الاعداد الطبيعية اعداد اولية .

2. كل المثلثات هي مضلعات مغلقة .

العبارات المسورة كليا the universel quantifier

هي العبارة التي تحتوي كلمة "كل" او ما يماثلها وتدعى كلمة "كل" من مهما كان ,يسمى الرمز سورا كليا دلالة الشمول "او المسور الكلي "

F(a) True Then

تسمى العبارة عبارة مسوره كليا .

مثال//x

العبارات المسورة جزئيا :- **Existential quantifier**

هي العبارة التي تحتوي على كلمة "يوجد ,بعض"

ملاحظة // يوجد عنصر واحد فقط

**مثال//**

بعض الاعداد الصحيحة اولية

رياضيا "يوجد عدد صحيح x بحيث ان x عدد اولي "

***نفي العبارات المسورة***

"كل عدد طبيعي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على 6"

"يوجد في الاقل عدد طبيعي واحد يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 6"

*ملاحظة // نفي العبارة لكل x تحقق الخاصية p(x) سيكون بعض قيم x ليست لها خاصية* p(x)

*Example.*

**البرهان الرياضي** **Mathematical proof**

1. طريقة البرهان المباشر direct proof))

ان طريقة البرهان بواسطة تجزئة المحاججة الى محاججات جزئية يدعى البرهان المباشر

P→ q

نفرض p معطاة وبعدها تكون سلسله من العبارات

الصيغة

**مثال//** اذا كان كل من a , b عدد زوجيا فأن a + b عدد زوجي

البرهان:-

لتكن p: كل من a , b عدد زوجيا ,q : a + b عدد زوجي

نريد ان نبرهن p → q

,بما ان a , b عدد زوجي عليه فأن

a=2n , b=2m

a + b=2n+2m=2(n + m) )

n + m) )عدد صحيح وعليه فأن a + b عدد زوجي.

2.طريقة البرهان الغير مباشر indirect proof) )

**مثال //** اذا كان عدد فردي فأن n عدد فردي

الحل// نفرض ان n عدد زوجي فان يوجد n=2k

*وهذا contradiction*

*Examples.*

1-find the truth table to compound statements

*a-*

*sol.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P˄ q) ˅ ̴ (q↔ p) ) ̴ | (q↔ p) ̴ | *q↔ p* | *p˄ q) ) ̴* | *p˄ q* | *q* | *p* |
| *F* | *F* | *T* | *F* | *T* | *T* | *T* |
| *T* | *T* | *F* | *T* | *F* | *F* | *T* |
| *T* | *T* | *F* | *T* | *F* | *T* | *F* |
| *T* | *F* | *T* | *F* | *T* | *F* | *F* |

*b- p →q ˅ ̴ (p ↔ ̴ q)*

*sol.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (P →q)˅ ̴ (p↔ ̴q) | *p↔ ̴ q)) ̴* | *p↔ ̴ q* | *P → q* | *̴ q* | *q* | *p* |
| *T* | *T* | *F* | *T* | *F* | *T* | *T* |
| *F* | *F* | *T* | *F* | *T* | *F* | *T* |
| *T* | *F* | *T* | *T* | *F* | *T* | *F* |
| *T* | *T* | *F* | *T* | *T* | *F* | *F* |

c-

sol.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p→ ( ̴ q ˄ s) | ) q ˄ s ̴ ) | q ̴ | S | q | P |
| F | F | F | T | T | T |
| F | F | F | F | T | T |
| T | T | T | T | F | T |
| F | F | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | F |
| T | F | F | F | T | F |
| F | T | T | T | F | F |
| T | F | T | F | F | F |

d-[ (p ˄ q) ˄ (q ˄ r)] → (p → r)

sol.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (p˄ q)˄(q˄ r)→(p→ r) | p˄ q)˄(q˄ r)) | p→ r | q˄ r | P˄ q | r | q | P |
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F | T | T |
| T | F | T | F | F | T | F | T |
| T | F | F | F | F | F | F | T |
| T | F | T | T | F | T | T | F |
| T | F | T | F | F | F | T | F |
| T | F | T | F | F | T | F | F |
| T | F | T | F | F | F | F | F |

هذه العبارة هي تحصيل حاصل

2.اثبت بطريقة البرهان المباشر القضية التالية :

أ. اذا كان كل من xوy عدد فرديا فأن x + y عدد زوجي .

البرهان // لتكن p: كل من x , y عدد فرديا

q: x + y عدد زوجي

نريد ان نبرهن ان p→ q ,

بما ان x , y عددا فرديا علية يوجد n , m بحيث ان

بما ان n , m z ← n + m z وعليه

X + y is even number

ب. اذا كان كل من x عدد فرديا وy عدد زوجي فان x . y عدد زوجي

البرهان // لتكن p: كل من x عدد فرديا وyعدد زوجي

:q x . y عدد زوجي

بما ان x عدد فرديا ,yعدد زوجي اﺬن يوجد n ,m  *z بحيث ان*

X . y=(2n+1).2m=4nm+2m=2(nm + m)

بما ان 2mn+m z

اﺬن x . y عدد زوجي

3.اثبت بطريقة البرهان الغير مباشر القضية التالية:

اذا كان عدد زوجي فأن عدد زوجي .

البرهان // نفرض ان aعدد فردي فأن يوجد z k بحيث ان

a=2k+1

اﺬن عدد فردي وهذا تناقض مع عدد زوجي

اﺬن aعدد زوجي

الفصل الثاني

Sets and Operations on Sets )) ))

المجموعات والعمليات على المجموعات

مفهوم المجموعة :-

يعتبر هذا المفهوم من المفاهيم الاساسية للرياضيات المعاصرة والتي يمكن ادراكها بسهولة خلال الكثير من الاشياء مثل (زهور ) مجموعة .

لهذا اصطلح على كل فرد بالمجموعة اسم عنصر (element).

مجموعة:- هي تجمع ,جملة, فصيلة ,اسره, وحدة ,منظومة ,صنف,

Set: all elements x for which the statement p(x) is true is denoted

By {x |p(x)}.

For example: - {x| x is an odd integer greater than 21}

\* يرمز للعناصر بأحرف صغيرة وللمجموعة بأحرف كبيرة

a, b, c → elements

, B, C→ sets A

\* طريقة ﺬكر المجموعة :-

1.الطريقة الجدولية (Tabulation Method)

في هذه الطريقة تستخدم اقواس المصفوفة (Braces) لتسمية المجموعة .

مجموعة الاعداد الصحيحة Z={…2,1,0,-1,-2,…}

2.طريقة تتم بذكر خاصية العناصر:

A= {x: x is positive integer x<7 }

Note: there exist two types of the set: -

1.مجموعة منتهية (finite set ) {2, 3 , 1 }=A

2.مجموعة غير منتهية (in finite set) 0,1,2,…} }=N

\* المجموعة الخالية (empty set )

The set is not contain of any element and denoted by Ø

* هي المجموعة التي لا تتضمن اي عنصر ويرمز لها Ø

Ex: {x: x

Definition: -

Two sets A and B are equal, symbolized by A=B ,if every element of A is an element of B and every element of B is an element of A ; in short ,A=B if they are made up of exactly the same elements .

The negation of the statement A=B is written A≠B

**المجموعة الجزئية** **subset \*Definition:-**

We say that the set A is a subset of the set B (A is contained in B) and we write A B provided every element of A is also an element of B.

\* Note. If A B, but A≠B, then A is termed a proper subset of B ,by writing A B.

**Definition: -**

Said to be of the set to regard all sets under consideration as being subsets of some constant set U, called the universe (universal set)

اذا كانت جميع المجموعات قيد البحث مجموعات جزئية من مجموعة ثابتة فأن مجموعة ثابتة شاملة ( مجموعة شاملة) .

\*the set is containing, all the sets under discussing is universal set and denoted by U

Ex: if A= {1,2,3} , B={2,4,6} ,C={5,6,7}, then

U= {1,2,3,4,5,6,7}

**العمليات على المجموعات ××operation on sets»** «

\*Definition: - the union of A and B, denoted by AUB, is the subset of U defined by

x B} or Ax x |}= BUA

i.e.

Theorem: If A, B and C are subsets of the universal set U, then

1. A A, Q A , A U

2. A Ø if and only if A=Ø

3. {x} A if and only if

4. if A B and B C, then A C

5. A=B if and only if A B and B A

\*تعتبر النقطة الخامسة هي تعرف مكافئ لتساوي مجموعتان

Note. A B i . e (which mean)

The union A and B is the elements set is belong of A or B\*

or both and denoted by AUB

**\* Properties of union**

1. A AUB ˄ B AUB

2. A B ↔ AUB=B

3. AUB=BUA commutative Law

4. (AUB)UC=AU(BUC) Associative Law

5. AUØ=A

6. AUA=A

7. AU u=u

المجموعة في عملية الاتحاد تأخذ دور يشابه دور العدد 0 في عملية جمع الاعداد

Definition: -

let A,B be two sets ,then the intersection of A and B ,denoted by A∩B is the subset of U defined by A∩B={x | x ϵ A and x ϵ B} i. e x ϵ A∩B ↔ x ϵ A ˄ x ϵ B i. e intersection of A and B is the joint of the set of all element between A and B.

**properties of intersection:**

1. A∩B A ˄ A ∩ B B

2. A B ↔ A∩B=A

3. A∩B = B∩A commutative Law

4. (A∩B)∩C = A∩(B∩C) Associative Law

5. A∩Ø=Ø

تأخذ دور الصفر في عملية ضرب الاعداد

6. A ∩ u=A

7. A∩A=A

هنالك بعض خواص ضرب الاعداد لا تتحقق في تقاطع المجموعات فمثلا اذا كانت a ,b ,c ,اعدادا وكانت a≠0 و b=c →a . b=a . c

**خاصية الاختزال//**

ان هذه العملية لا تتحقق في تقاطع المجموعات فمثلا اذا كانت

-2,1,-4} , B={1,-5,4} , C={1,3,-1}}=A

, A∩B={1} ,but B≠C {1 }= A∩C=A∩B

توجد بعض الخواص للتقاطع لا يوجد ما يناظرها في عملية ضرب الاعداد فمثلا اذا كانت

الفرق the difference ) )

Let A, B be two sets, say for element ,set is belong to A and not belong to B is difference of A and B (or the relative complement of B in A) denoted by A-B is the subset of u defined by

A-B={x| x ϵ A but x B} i. e x ϵ A-B ↔ x ϵ A ˄ x B

Note. \*

The particular difference u – A is called the complement is denoted by Ac : for elements set it belong to u and not belong to A.

Ac = u – A={x | xϵ u but x A}

Example:

Take u ={ 0,1,2,3,4,5,6} for the universe and let A={1,2,4} ,B={2,3,5} find relative complements A-B and B-A and Ac , B c .

Sol.\\

A-B={1,4} , B-A={3,5} , Ac ={0,3,5,6}, B c ={0,1,4,6}

Note: A-B and B-A are disjoint and unequal ,in fact ,\*

If and only if A=B.A-B=B-A

\*General the union and intersection an arbitrary non empty of subsets A1  ,A2 ,…….An

Ai={x | x ϵ Ai for some set Ai} i=1Û

i={x | xϵ Ai for every set Ai}A i=1∩

Lemma: If A and B are subsets of the universe u ,then

1.(Ac)c =A

2.Øc =u

3.AUAc =u ,A ∩ Ac =Ø

4.A B if and only if Bc Ac

Theorem: (De Morgan )

If A and B are subsets of the universe u then :

1.(AUB)c =Ac ∩ Bc

We want to show that (1) Proof \\

Ac ∩ Bc c(AUB) i))

Let x ϵ (AUB)c

X B x AUB→ x A and

→ x ϵ Ac and x ϵ Bc  x ϵ Ac ∩ Bc→

AUB)c Ac ∩ Bc  ) اذن

ii) Ac ∩ Bc  ( AUB)c )

let x ϵ Ac ∩ Bc

x ϵ Ac and x ϵ Bc

x A and x B→

x AUB اذن

c(xϵ (AUB→

(A U B)c cB ∩ cA اذن

c = Ac ∩ Bc(AUB)

2.(A∩B)c = Ac U Bc

Proof \\ we want to show that (i) ( A ∩ B)c  Ac U Bc

Let x ϵ (A ∩ B)c  →x A∩B →x A or x B

x ϵ Ac or x ϵ Bc  → x ϵ Ac U Bc →(A ∩ B)c Ac U Bc →

ii) Ac U Bc  (A ∩ B)c )

let x ϵ Ac U Bc → x ϵ Ac  or x ϵ Bc

x A∩B→→x A or x B

(A∩B)c cB Ac → c(x ϵ (A∩B اذن

اذن c  cA =c (B∩A)

**Def.** if A is an arbitrary set ,then the set whose element are all the subsets of A is known as the power set of A and denoted by p(A)

P(A)={B | B A}

**التوزيع**  **Distribution**  a.(b + c) = a. b +a .c if a, b, c are numbers then

The same

Let A, B and C be sets, then

1-- the union is distribution on intersection.

A∩ (B U C)=(A∩B) U(A∩C)

2- the union is distribution on intersection.

AU(B∩C)=(AUB)∩(AUC)

Proof \\2

By the distribution first law

AUB)∩(AUC)= [(AUB)∩A] U [(AUB)∩C])

[A∩(AUB)] U [C∩(AUB)] by comm. law=

[(A∩A)U(A∩B)] U [(C∩A)U(C∩B)]=

=

Since A∩C A and A∩B A

Example: suppose the set A={a ,b ,c}, find p(A) ?

Sol:-

P(A)={ Ø, {a}, {b}, {c}, {a ,b}, {a ,c}, {b ,c}, A }

Examples:-

1..(∩Ai )c  =U Ai c

Sol . \\ let A={1,2,…..,n} we want to show that ( i) (∩Ai)c U Ai c

Let x ϵ (∩Ai)c

→ x ϵ (A1 ∩ A2 …..∩An)c

X (A1∩A2 …..∩An)

X A1 ˅ x A2 ….˅ x An

X ϵ A1c ˅ x ϵA2c …. ˅ x ϵ An c

X ϵ A1 c U A2 c …..U An c

→(∩Ai)c  U Ai c  …………………(1)

To prove that U Ai c (∩Ai)c   ii))

Let x ϵ U Ai c → x ϵA1c ˅ x ϵ A2c ….˅ x ϵ An c

X A1 ˄ x A2 ……˄ x An

X A1 ∩ A2 ….∩ An

→ x ϵ (∩An)c

U Ai c  (∩An)c  ……………….(2)

From (1) and (2) to get (∩Ai)c =U Ai c

2..(U Ai)c = ∩ Ai c

Sol.\\ let A={1,2,3,……,n} we want to show that

(U Ai)c  ∩ Ai c

Let x ϵ (U Ai)c  → x ϵ (A1 UA2 …..U An)c

X (A1 UA2 ……U An)

X A1 ˄ x A2 …… ˄ x An

X ϵ A1c  ˄ x ϵ A2 c …….˄ x ϵ An c

X ϵ A1 c  ∩ A2c …….∩ An c

→ (U Ai)c  ∩ Ai c ………………….(1)

To prove that ∩ Ai c  (U Ai)c

X ϵ ∩ Ai c  →x ϵ A1 c ˄ x ϵ A2 c ……. ˄ x ϵ An c

X A1 ˄ x A2 …….˄ x An

X A1 U A2………U An

→ x ϵ (U Ai)c

∩ Ai c  (U Ai)c ………………………(2)

From (1) and (2) to get (U Ai)c  = ∩Ac

3.. prove that A∩B=Ø is equivalent to the two conditions A-B=A and B-A=B.

[ i. e A∩B=Ø ↔ A-B=A and B-A=B]

Sol.\\ ( →)

Let A∩B=Ø

A-B={ x | x ϵ A but x B}

A-B = A- (A∩B) [since A∩B=Ø] \*

=A- Ø

=A

And B-A=B A-B=A (←)

Let x ϵ A∩B → x ϵ A and x ϵB

B ≠A-B and contradiction A-B ≠ Aاذن

4.. if A B show that (1) AUC BUC

Sol. \\

Let x ϵ AUC → x ϵ A or x ϵ C

B→ x ϵ B A بما ان

x ϵ BUC اذن

2) let x ϵ A U(B-A))

X ϵ A or x ϵ B-A

X ϵ B-A → x ϵ B but x A

x ϵ A B → x ϵ B بما ان

AU(B-A) =Bاذن

5.. prove that AU(BUC) = (AUB)UC

Sol.\\

6.. prove that AU(A U Bc)c = AUB

AU(A U Bc )c = AU(Ac ∩(Bc)c ) [ by De Morgan]

=AU(Ac ∩ B)

=(A U Ac)∩(AUB)

=u ∩(AUB)

=AUB

7.. if A B then Bc  Ac

Sol.\\

Let x ϵBc →x B

A B → x A بما ان

xاذن

c  Ac B

الفصل الثالث

Functions and relations

العلاقات والدوال

Def.:-the ordered pair of elements a and b with its first

Component a and second component b , denoted by (a, b) is the set

(a , b)={ {a ,b},{a} }

Note: - \*if a ≠ b then { {a ,b},{a} } ≠ { {b ,a},{b} }

Implies (a, b) ≠ (b, a)

\*if a=b, then the ordered pair (a, a)={{a}} is not the same as the set {a}.

Theorem: two ordered pairs(a , b) and (c , d) are equal if and only if a=c and b=d .

Def. :- the Cartesian product of two sets A and B , distinct or not .is the set

A x B ={(a ,b) | a ϵ A , b ϵ B}

Note : (1) A x B = Ø if and only if ;A =Ø or B =Ø , A=B

(2) if the set A contains n elements and B contains m elements ,then A x B has nm elements .

Example :- let A={-1,0,1} and B={0,2} find A x B and B x A ?

Sol.\\

A x B={(-1,0),(-1,2),(0,0),(0,2),(1,0),(1,2)}

B x A={(0,-1),(0,0),(0,1),(2,-1),(2,0),(2,1)}

A x B ≠ B x A

**العلاقات Relations**

Let X , Y be two sets , a relation Ɍ between x and y is any subset of the Cartesian product X x Y .

.e Ɍ is a relation from A to B ↔ Ɍ A x B i

{(x , y), x ϵ X , y ϵ Y } X x Y =Ɍ

x . y | properties of x ^ y } ϵ {(x , y)=

as being a relation Ɍ In the case where x=y, we say of \*

in x

Example : let Ɍ be a relation between A and B such that x<y .

sol.\\

Ɍ={(x , y) | x ϵ A and y ϵ B , x<y }

={ (-1, 0),(-1, 2),(0, 2),(1, 2) } A x B

**انواع العلاقات Type of relations**

) العلاقة الانعكاسية ) 1.Reflexive relation

let A be a set ,Ɍ is relation on A. Ɍ is called a reflexive relation if all elements on the set A are connected with itself in the relation of Ɍ.

i. e Ɍ is reflexive ↔ (x, x) ϵ Ɍ

Example: - let A={ a ,b ,c ,d } and let Ɍ1 Ɍ2 Ɍ3 are relations on A such that

Ɍ1 = {(a, a), (b, b),(c, c),(d, d) }

Ɍ2 = {(a, a), (b, c),(c, b),(d, a) }

Ɍ3 ={(a, b),(b, a),(a, a),(b, b),(c, c),(d, d) }

Solution: -

Ɍ1 is reflexive.

Ɍ2 is not reflexive since (b, b) ɇ Ɍ2

Ɍ3 is reflexive.

(العلاقة المتناظرة ) 2.Symmetric relation

Let Ɍ be a relation on the set A. Ɍ is called symmetric relation if and only if for all (x, y) ϵ Ɍ then (y, x) ϵ Ɍ.

i.e R is symmetric ↔ (x , y)ϵ R→ (y ,x) ϵR

Example :- let A={1, 2, 3} and Ɍ1 Ɍ2 Ɍ3 are relations on A such that

Ɍ1 = {(1, 1),(1, 2),(3, 3),(2, 1) }

Ɍ2 = {(1, 3), (3, 3),(3, 1),(3, 2),(2, 2),(1,1),(1, 2),(2, 1) }

Ɍ3 = {(1, 1), (3, 3) }

Ɍ4 = {(2, 2) }

Solution: -

Ɍ1 is symmetric relation and is not reflexive relation

Ɍ2 is reflexive relation but is not symmetric relation since

Ɍ3 is not reflexive relation but is symmetric relation

4 is symmetric relation Ɍ

**(العلاقة المتعدية(** 3.**transitive relation**

Let Ɍ be a relation on A. Ɍ is called transitive relation on A if and only if and (y, c) ϵ Ɍ then (x, c) ϵ Ɍ

i.e (x, y) ˄ (y, c) ϵ Ɍ then (x, c) ϵɌ ↔ Ɍ is transitive relation.

Ex.\\ let A={a, b, c}

Ɍ1 ={ (a, a),(a, b),(b, c),(a, c) }

Ɍ1 is trans. Rel. but Ɍ1 is not symmetric rel. since (a, b) ϵ Ɍ but (b, a) Ɍ .

Ɍ2 ={ (c, a),(b, b),(a, b) }

Ɍ2 is not transitive relation since (c, a) ˄ (a, b) ϵ Ɍ but (c, b) Ɍ.

Ɍ3 ={ (a, a),(b, b),(c, c) }

(1) Ɍ3 is reflexive.

(2) Ɍ3 is symmetric

(3) Ɍ3 is transitive.

Example :- let A={ 1,2,3,4,5,6 } and let Ɍ be a relation on A such that (a, b) ϵ Ɍ if a + b=6 is Ɍ transitive relation?

Sol.\\

Ɍ={ (1, 5),(5, 1),(2, 4),(4, 2),(3, 3) }

Ɍ is not transitive relation since (1, 5) and (5, 1) ϵ Ɍ but

**(علاقة التكافؤ) 4.Equivalence relation**

Let Ɍ be a relation on the set A, Ɍ is called equivalence relation on A if and only if Ɍ is transitive and symmetric and reflexive relation .

Ex.\\ let A={1,2,3,4} and let Ɍ1 ={ (1, 1),(1, 2),(2,1),

(2, 2),(3, 3),(4, 4) }

Sol.\\

(1) Ɍ1 is reflexive.

(2) Ɍ1 is symmetric.

(3) Ɍ1 is transitive.

Ɍ1 is equivalence relation.

Ɍ2 ={ (1, 1),(3, 3),(4, 4) }

Ɍ2 is not equiv. relation since Ɍ2 is not reflexive relation (2, 2) Ɍ2 .

**دوال وتطبيقات**  Functions (mapping)

لتكن كل من A و B مجموعة غير خالية يقال للقاعدة f والتي تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر وحيد y من المجموعة B ويقال عن f بأنها تطبيق من A الى B ويرمز لها عادة بالرمز f:A→B

F(x) = y x ϵ A

i . e f:A→B is mapping ↔ x ϵ A

1.يسمى العنصر yبصورة عنصر x

2.يسمى A منطلق التطبيق domain ويرمز له ( D f )

3.المجموعة B هي المستقر أو المجال المقابل للدالة أو التطبيق f ويسمى codomain ويرمز لها cod f ) )

4.تسمى مجموعة كافة الصور أو جميع الصور بمدى التطبيق rang f ويرمز لها

Ɍ f  cod f  Example:-

|  |
| --- |
| 4  8  12 |

|  |
| --- |
| 5  3  2 |

|  |
| --- |
| 3  4  5  1 |

|  |
| --- |
| 5  6  8 |

4 ϵ A 1ϵ A but f(1)ɇB

F(4)=5 f is not mapping

F(4)=3

F is not mapping

B A B A

|  |
| --- |
| 1  2  3  4 |

|  |
| --- |
| 5  6 |

|  |
| --- |
| 1  2 |

|  |
| --- |
| 3  4 |

B A

f is mapping

Ex.\\ let A={ 1,2,-3 } , B={ 4,3,-1,-2 }

If f:A→B ϶ A→A+2

1.write the mapping f the set of ordered pair .

2.the rang of the mapping.

Sol.\\

A→A+2

1→1+2=3

2→2+2=4

-3→-3+2=-1

1.s={ (1, 3),(2, 4),(-3, -1) }

2.Ɍ={ 3,4,-1}

\*\*شروط التطبيق :لكي تكون العلاقة fمن A الى B تطبيق أو دالة يجب أن تحقق العلاقة fالشروط التالية:

[closure] 1.

2.x1 ,x2 ϵ A if x1 = x2 → f(x1)=f(x2) well define

Example:-

Let f:{1,2,3} →{2,3,4} ϶ f(x)=x+2 , is f is a mapping function.

Sol.\\ f(1)=1+2=3

f(2)=2+2=4

f(3)=3+2=5

F is not mapping since f(3) ɇ {2,3,4} ,f is not closure.

Example:- let f: z →z such that f(x)= is f mapping?

Sol.\\

ϵz 1. ϵ z then

f is closure اذن

x1 = x2 → f(x1) =x12 ,f(x2)=x22 but x1=x2 *Z* s.t ϵ 2.x1 , x2

**انواع التطبيق** **Type of mapping**

)دالة ثابتة) 1.conestant mapping 11

Let f be a map from A to B f is called (constant mapping) on A if and only if there exist unique element c in B such that it is image for all element in A

Ex.\\ let f : z → z ϶ f(x)=4 Ɍf ={4}

(دالة الذاتية) 2.identity mapping

Let f be a map from A to A f is called identity mapping on A if and only if image all element is equal if self-element

Ex.\\ let f:N → N ϶ f(x)=x

(الدالة المتباينة) 3. injective mapping

(1-1) one to one

Let f be a map from A to B , f is called (1-1)on A if and only if for deference elements is deference image or equal image is implies for equal elements

I . e f:A→B is (1-1) ↔ x1 ,x2 ϵ A s.t f(x1)=f(x2) → x1=x2

Or x1 ≠ x2 → f(x1) ≠ f(x2)

Ex. :-

B A B A

|  |
| --- |
| 1  2  3 |

|  |
| --- |
| 4  6  8 |

|  |
| --- |
| 4  6  8 |

|  |
| --- |
| 1  2  3 |

B A B A

B A

(1-1) f is one to one f is not (1-1)since 2≠3but

F(2)=f(3)

(الدالة الشاملة ) surjective mapping (on to) 4.

F is on to ↔ Ɍf = cod f

yϵ B , xϵ A s.t y= f(x).

Example :-

B A

|  |
| --- |
| 1  2 |

|  |
| --- |
| 4  6  8 |

{4,8} , cod f ={4,6,8} = fɌ

F is not on to

) **الدالة المتقابلة )** Bijective 5.

F is Bijective ↔ f is (1-1) and on to

Example :- give me example such that (on to) not (1-1)

B A

|  |
| --- |
| 1  2  3  4 |

|  |
| --- |
| 7  8  4 |

F is on to since Ɍf = B

F is not (1-1) since 1≠ 2 , f(1) = f(2)

Example :- let A ={1,2,3,4}, B={1,4,9,16} and f :A→B s.t f(x)= what is the type of mapping ?(show that f is Bijective)?

Solution :-

x→

1→1

2→4

3→9

4→16

F is (1-1) since x ≠ y then f(x) ≠ f(y)

F is on to Ɍf = cod f

F is Bijective

Example :- let f: Ɍ → Ɍ s.t f(x)= 5x +1 x ϵ Ɍ prove that f is Bijective mapping ?

Proof: (1) let x1 , x2 ϵ Ɍ s.t f(x1) =f(x2)

5x1+1 =5x2 +1

x1 = x2

f is (1-1)

(2) let y ϵ Ɍ s.t f(x) =y

5x+1=y

5x=y-1

X= y-1/5 ϵ Ɍ

y ϵ Ɍ x ϵ Ɍ ϶ y = f(x)

F is on to

Example:- let f : A→B and A={1,3,5,7,…..}

B={2,4,6,8,…..} s.t f(x) =2x x ϵ A prove that f is Bijective?

Proof:-

?

Ɍf = B [ y ϵ B , x ϵ A s.t f(x) = y ]

Let y=4 ϵ B f(x)=4

2x=4 → x=2 ɇ A

F is not on to

معكوس التطبيق Inverse mapping) )

ليكن f تطبيق متقابل من A الى B و يسمى التطبيق من B الى A (الذي يقوم بعكس ما قام به التطبيق f) ]اي انه تصبح الصورة عنصر والعنصر صورة من خلال معكوس التطبيق f والذي يرمز له بالرمز( )

I . e :A → B ϶ (x) = y x ϵ A ( Bijective)

If f : B → A is a map ϶ =x

Example: in the following mapping is the inverse exist? Why?

B A B A

B A B A

|  |
| --- |
| 1  2  3 |

|  |
| --- |
| 6  7 |

|  |
| --- |
| 1  2 |

|  |
| --- |
| 5  6  7 |

f-1 is not exist f-1 is not exist since f

since f is on to but is (1-1) but f is not

f is not (1-1) on to

A B

|  |
| --- |
| 1  2  3 |

|  |
| --- |
| 4  5  6 |

f-1 is exist since f is (1-1) and on to f is isom.

**تركيب التطبيق composition of mapping ))**

Let f be a mapping from A to B and let g be a mapping from B to C , say for a mapping of define from A to C is composition of mapping g and f and denoted by

g o f : A→C i. e go f (x)= g (f(x))

example : let A={1,2,3} , B={2,4,6}, C={7,9,11} s.t f: A → B ϶ f(a)=2a , g:B → C ϶ f(b)=b+5

find g o f (x)? g o f(1), g o f(2), g o f(3)

solution:-

g o f (x) = g(f(x))=g(2x)=2x+5

g o f (1) =2(1)+5=7

g o f (2) =2(2)+5=9

g o f (3) =2(3)+5=11

example:- let f: N→N s.t f(x)=4 x ϵ N and g:N→N s.t g(x)=3x+1 find g o f(x) and f o g(x)?

solution :-

g o f(x)=g(f(x))=g(4 )=3(4 )+1=12 +1

f o g(x)=f(g(x))=f(3x+1)=4

=

g o f(x) ≠ f o g(x)

مبرهنة: لتكن كل من f: A→B , g :B→C دالة فأن

1.g o f دالة متباينة اذا كان كل من fوg دالة متباينة .

2. g o f دالة شاملة اذا كان كل من fوg دالة شاملة.

البرهان (1):-

نفرض أن f وg دالة متباينة

لتكن g o f(x1)=(g o f)(x2)

g(f(x1))=g(f(x2))

بما ان g متباينة فأن f(x1)=f(x2)

بما ان f متباينة فأن x1 = x2

فأن g o f دالة متباينة

(2) ليكن x ϶ C

بما ان g شاملة فأنه يوجد b ϵ B بحيث أن g(b)=x

بما ان f شاملة يوجد a ϵ A بحيث أن f(a)=b

علية فأن g(f(a))=x

g o f (a)=x

اذن g o f دالة شاملة