محاضرات الاحتمالات المتقدمه

المرحله الثانيه

اعداد ا.م منتهى عبد الرزاق

م. م مصطفى ستار

مجموعه *تعاريف*

التجربه العشوائه:

هي التجربه التي تكون نتائجها غير معلومه بشكل دقيق

المتغير العشوائي: radom variable

هي قيمه عدديه نتيجه من نتائج التجربه ويرمز لها بالرمز x

المتغير العشوائي:

هو داله تمثل العلاقه بين فضاء العينه س ومجموعه الاعداد الحقيقيه ولها صفات وخصائص معينه

وهناك نوعان من المتغير العشوائي

المتغير العشوائي المتقطع او المنفصل

Discrete Random variable

وهو المتغير الذي يأخذ قيم صحيحة سواء كانت سالبة أو موجبة أي يمكن كتابة المتغير العشوائي بصورة متقطعة أو منفصلة أي يأخذ أعداد محددة أو معدودة مثل عدد طلاب ، عدد حوادث الطرق

دالة كتلة الأحتمالية :-

Probability mass function (P.m.f)

تحقق الشروط التالية :-

1- $0 \leq p(x) \leq 1$
2- $\sum_{\forall x \in x} p(x) = 1$

$$P(x) = \begin{cases} P(x=x_i) \text{ if} & x = x_1, x_2, \ldots x_n \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

Ex:- 1- show tat p(x) is (p.m.f)

$$P(x) = \begin{cases} x/21 & x=1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

2_ find p(x=3) , p(x>3) , p(x≥ 3), $p(x = 3.5)$ $p(x = 7)$, $p(x = 0)$

3_ draw figure of p(x)

1_sol:

$\forall x$: $p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) + p(x = 5)$+ p(x=6)

1/21+2/21+3/21+4/21+5/21+6/21

=1

Is e.mf

2_ p(x=3) = 3/21

P(x>3) = p(x=4) + p(x=5) +p(x=6)

= 4/21 + 5/21 + 6/21 = 15/21

P(x≥ 3)= p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) +p(x=6)

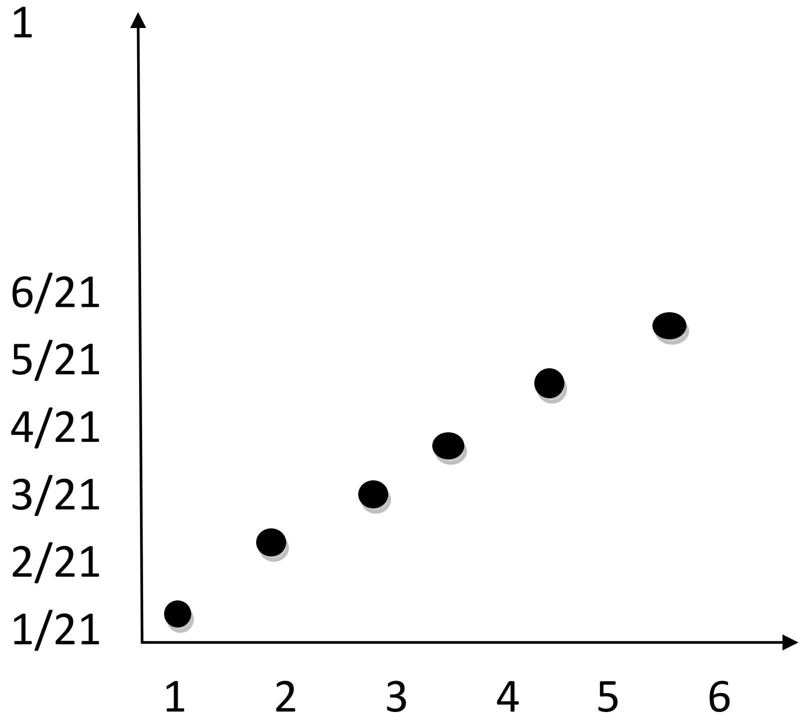
= 3/21 + 4/21 + 5/21 + 6/21 = 18/21

P(x=3.5) = 0

P(x = 7) = 0

P(x=0) = 0

3) p(x)



EX:-

$$P(x) = \begin{cases} 2k & x=0 \\ K & x=1 \\ 3k & x=2 \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

1_ find k

$2k + k + 3k = 1$

$6k = 1$ $k = 1/6$

$P(x) = 2/6 = 1/3$; $x = 0$

$1/6$; $x = 1$

$3/6 = ½$, $x = 2$

0 other wise

find1-p(1.5) , p(x>0) ,p(x≥0) ,p(x=2)

solution:

1-p(x=1.5) =0

2=p(x >0) =p(x=1)+p(x=2)= 1/6 +3/6 =4/6=2/3

3- p(x≥0) =p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=2/6+1/6+3/6=6/6=1
4- p(x=2)=2/3

2- continuause random variab le:

The random variable belong to the interval &satisfy

1- $\int_x p(x) = 1$

2-$0 \leq p(x) \leq 1$

Ex: show that f(x) is p.d.f

$F(x)2/x^3$ $1 \leq x \leq \infty$

Find p(x≥ 1),p(x>1),p(x≤ 1) p(1< x < ∞),p(1< x < 2)

S0l.

1-$\int_1^\infty 2/x\wedge 3$ dx=1

F(x) is p.d.f

2-p(x$\geq$ 1)=1

D**efiniton:**

أذا كان x متغير عشوائي يمتلك دالة أحتمالية فأذا كان f(g(x)) دالة حقيقية فأن التوقع الرياضي للدالة g(x) يرمز له E(g(x) معطى لل صيغة الأتية :

E(g(x)) = $\sum g(x)p(x) if\ x\ is\ discrete$

= $\int g(x)p(x)d(x)\ \ if\ x\ is\ continuse$

Propertie of expectation :-

-E (c) =c

-E(cx)=cE(x)

-E (xy)= E(x)E(y)   iff x , y are independ

Var(x)= E(x^2)-(E(x))^2

E(x)=mean

E(x^2)=$\sum x^2$p(x)

=$\int x^2$dx

Ex: let x be arandom variable with the probability function

x	1	2	3
P(x)	1/4	1/4	1/4

-pr0ve that p(x) is p.m.f

-draw fiqure

-find p(x=1), p(x>1) p(x≥1)

-find E(x) ,E(x+4),E(2x-8)

- find variance of x

Sol:

-$\sum p(x)$ **=1**

¼+1/4+1/2 =1

P(x) is p.m.f

-p(x=1)=1/4

-p(x> 1)=1/4 + ½ =3/4

-p(x≥1) = ¼ +1/4 +1/2 =1

-E(x)=$\sum x$p(x)

= 1.1/4 + 2. ¼ +3. ½ =9/4

- E(x+4) = E(x)+4=9/4 +4 =25 /4

Ex:let we have f(x)=1/3 $1< x < 4$

-show that f(x) is p.d.f

-find p(x> 4),p(x>1),p(x>3)

-find E(x), E(x+9)

-find variance

Sol: $\int f(x)d(x) = \int_1^4 1/3 dx = 1$

Is p.d.f

$P(x>4) = 0$

$P(x> 1) = 1$

$P(x>3) = \int_3^4 \frac{1}{3} dx = 1/3$

Moment generating function: ***الداله المولده للعزوم***

Mgf =M^t_x = $E(e^{tx}) = \sum_{\forall x} e^{tx}\ p(x)$ if x is discreat r.v

$= \int e^{tx} f(x)$ if x is continuous r.v

$M_x^- = M_1 = Ex$

$M_x^- = M_2 = Ex^2$ when time t=0

Ex :

F(x) = ¼ if x=0

=1/2 if x=1

=1/4 if x=2

Find M.g.f

-find mean ,vairince by M.g.f

Sol :

M_x^t= E (e^{tx}) =$\sum e^{tx}$ p(x)

=1/4 e^{0t} + ½ e^t +1/4 e^{2t}

E(x)=M^- =1/2 e^t +1/4 e^{2t} =1 when t=0

E x^2 = M^{--} =1/2 e^t +2/2 e^{2t} =1

Ex :

P(x) = ¼ $\quad 1 < x < 5$

Find mean and var.

E(x) =$\int_1^5 xp(x)$ =3

E(x^2) =$\int_1^5 x^2$ ¼ dx = 31/3

Var (x) =Ex^2 -(Ex)

=31/3 -3^2 =4/3

M^t =E e^{tx} =$\int_1^5 e^{tx}$ p(x) dx =$\int_1^5 e^{tx}$ ¼ dx

Joint probability function

Let x,y be random var. then f(x,y) is j.p.f if

$0 \leq f(x,y) \leq 1$

$\sum_{\forall x} \sum_{\forall y} f(x,y) = 1$ If (x , y) are discrete random variables

If (x,y) are continues then

_ $0 \leq f(x,y) \leq 1$

$$\iint_{\forall y} f(x,y)dydx$$

Ex : let f(x,y)= (x+y)/15 x=1,2 y=0,1,2

x/y	0	1	2	P(x)
1	1/15	2/15	3/15	6/15
2	2/15	3/15	4/15	9/15
P(y)	3/15	5/15	7/15	1

Find p(x=2,y=1) =3/15

P($x \leq 2, y = 2) = p(x = 2, y = 2) +$

4/15 +3/15 =7/15

P(x=-2,y=2) =0

Marginal of x

x	1	2
P(x)	6/15	9/15

Marginal of y

y	0	1	2
P(y)	3/15	5/15	7/15

Ex =$\sum_{=\forall x} p(x) = \frac{1.6}{15} + \frac{2.9}{15} = 24/15$

Ey= =0+1/15 +2.7/15 =19/15

Exy=0.1.1/15+1.1.2/15+1.2.3/15 + 2.0.2/15 +2.1.3/15+2.2.4/15

=30/15

C0r(x,y)=Exy-ExEy=30/15-24/15.19/15

<u>Correlation coefficient:</u>

If $P_{x,y} \geq o.5$ strong

If $P_{x,y} < 0.5$ weak

If $P_{x,y}=0$ no realation

Condition function and condition propertie

Let x,y b e r.v then $P(x/y) = (p(x \cap y)/p(y)$

$=(f(x,y))/ f(y) \quad ;f(y) \neq 0$

Ex:

x\y	0	2	P(x)
0	1/4	1/4	2/4
1	0	1/4	1/4
2	0	1/4	1/4
P(y)	1/4	3/4	1

1-show that $P_{x,y}$ is J.p.m

2- Find p(x),p(y)
3- Find E(x),Ey)
4- Find $P_{x,y}$
5- Find p(x/y=2)
6- Find p(y/x=1)
7-

Sol:

x/y	0	2	P(x)
0	1/4	1/4	2/4
1	0	1/4	1/4
2	0	1/4	1/4
P(y)	1/4	3/4	1

Marginal of x

X	0	1	2
P(x)	2/4	1/4	1/4

E(x)= 0.2/4 +1.1/4 +2.1/4=3/4

$E(x^2)=5/4$

Marginal of y

y	0	2	
P(y)	1/4	3/4	

$E(y) = 0.\ 1/4 + 2\ .\ 3/4 = 3/2$

$E(y^2) = 3$

$Var(x) = 11/16$

$Var(y) = 3/4$

$Cov(x,y) = Exy - ExEy = 3/8$

$P_{x,y} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{88}}$

$P(x/y = 2)$

x	0	1	2
P(x/y=2)	$\frac{1/4}{3/4}$	$\frac{1/4}{3/4}$	$\frac{1/4}{3/4}$

x	0	1	2
P(x/y=2)	1/3	1/3	1/3

EX:- given the J.p.d.f of x and y

If $f(x,y) = \begin{cases} 6x^2y & 0 < x < 1 \\ & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$

1) find marginal of x and marginal of y

2) find cov (x,y)

3) find p (x/y) , p(y/x) , p(y/x=1/4)

Sol:

$P(x)=\int_0^1 6xydy$

$=3x^2$

Marginal x is $p(y)= \int_0^1 6xydx$

$=2y$

Chapter 3

ان للمتغيرات العشوائيه لها تطبيقات كثيره ومن هذه التطبيقات (تجارب ذي الحدين ،برنولي، بانوميل)

لكل تجربه عدد من المحاولات نفرضه n

-ان المحاولات مستقله عن بضها

-لكل محاوله نتيجتين نجاح وفشل

ملاحظه :

عندما عدد المحاولات =١ تسمى برنولي وعندما عدد المحاولات $n>1$ تسمى بانوميل

<u>Bernouili distribution :</u>

$P+q=1$

$P = E(x)$,$var(x) = pq$,$M_x^t = q+p\,e^t$

P =النجاح

q =الفشل

$P(x) = p^x q^{(1-x)}$ $x=0,1$

$=0$ o.w

Ex: x-$B(1,1/3)$

Find mean ,var(x) ,M_x^t

$P(x) = (1/3)^x.(2/3)^{1-x}$ $x=0,1$

Mean $=p=1/3$

Var =pq =1/3 . 2/3 =2/9

M_x^t =2/3 +1/3 e^t

Binomial distribution:

P(x) = n!/x!(n-x)! $p^x q^{n-x}$

E(x) np

Var(x) =npq

m.g.f =$(q+pe^t)^n$

Ex: x- B (20, ½)

P= ½ , q=1-p =1/2

E(x) =np =20 .1/2 =10

Var(x)npq = 20 .1/2 .1/2 =5

P(x=2) =20!/2! .18! .$(1/2)^2$.$(1/2)^{18}$

Ex:

P(x) =1/4 0<x<10

=0 o.w

E(x) = $\int_0^{10} x\left(\frac{1}{4}\right) dx$

pisson distribution توزيع بواسون

وهو التوزيع للمحاولات التي لا يكون لها حد اعلى وكذلك للحالات التي تظهر الحاجة لتحديد عدد الحالات لفترة زمنية مثل عدد المكالمات المستلمة في بدالة معينة لفترة زمنية

$P(x=x)=\mu^{x}\, e^{-\mu}\ /x!$

$\mu \quad =Np=E(x) \qquad , \qquad var(x)= \ \mu$

$m.g.f = e^{\mu(et\ -1)}$

مثال:

اذا كان احد البنوك يستلم بمعدل ٦ شيكات بدون رصيد في اليوم اوجد احتمال انه يستلم ٤ شيكات بدون رصيد في يوم معين

الحل:

$P(x=4)=6^{4}e^{-6}\ /4!$