Hw. 6 طريقة التعويضات المثلثية

(تمارين محلولة)

Find The following integrations (1

1. $\int \frac{dx}{(9x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

Sol. Let $3x = \sec\theta \Rightarrow 3\,dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$\Rightarrow dx = \frac{\sec\theta\tan\theta}{3}\,d\theta$

$\int \frac{dx}{(9x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\frac{1}{3}\sec\theta\tan\theta}{(\sec^2\theta-1)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{(\tan^2\theta)^{3/2}}$ ← عند الرفع تضرب الأس

$= \frac{1}{3}\int \frac{\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}}{\tan^{3}\theta} = \frac{1}{3}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}$

$= \frac{1}{3}\int \sec\theta \cdot \frac{1}{\tan^2\theta}\,d\theta$

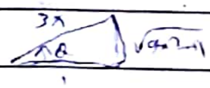
توضيح: $\frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\cancel{\cos\theta}} \cdot \frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$

$= \frac{1}{3}\int \cos\theta \cdot \frac{1}{\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{3}\int \cos\theta\,\sin^{-2}\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{3\sin\theta} + c$

$= -\frac{1}{3}\csc\theta + c$



$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\sqrt{9x^2-1}} + c = -\frac{x}{\sqrt{9x^2-1}} + c$

$$2. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$$

الحل: Let $x = 5\tan\theta \Rightarrow dx = 5\sec^2\theta\, d\theta$

$$\tan\theta = \frac{x}{5}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}} = \int \frac{5\sec^2\theta\, d\theta}{25\tan^2\theta\sqrt{25\tan^2\theta+25}}$$

$$= \int \frac{\cancel{5}\sec^2\theta\, d\theta}{25\tan^2\theta \cdot \cancel{5}\sqrt{\tan^2\theta+1}}$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{25\tan^2\theta\sqrt{\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^{\cancel{2}}\theta\, d\theta}{25\tan^2\theta\, \cancel{\sec\theta}}$$

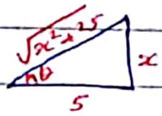
$$= \int \frac{\sec\theta\, d\theta}{25\tan^2\theta} = \frac{1}{25}\int \sec\theta \cdot \frac{1}{\tan^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{1}{\cancel{\cos\theta}} \cdot \frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{25}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{25}\int \cos\theta \sin^{-2}\theta = \frac{1}{25} \cdot \frac{\sin^{-1}\theta}{-1} + C$$

$$= \left(\frac{1}{25}\right)\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right) + C = -\frac{1}{25\sin\theta} + C$$

$$= -\frac{1}{25}\csc\theta + C$$



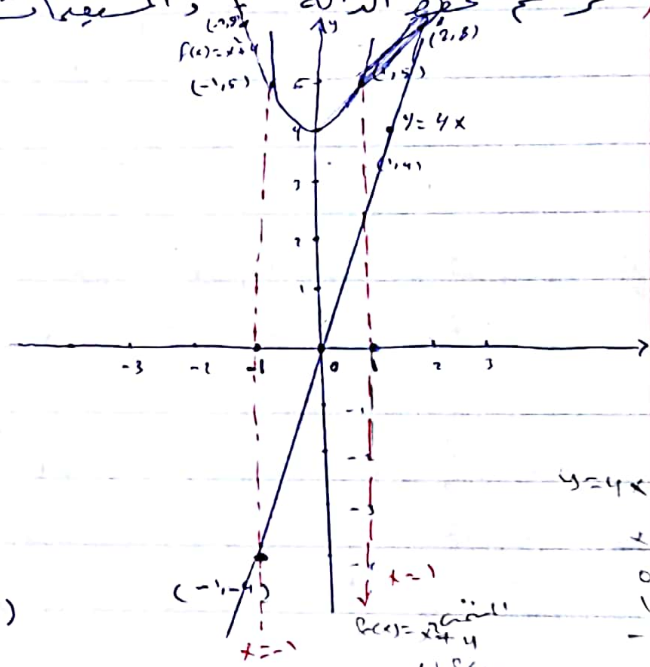
$$= -\frac{1}{25} \cdot \frac{\sqrt{x^2+25}}{x} + C$$

$\frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{1}{\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}}$

تطبيقات على التكامل

مثال(1): جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x)=x^2+4$ والمستقيمات
$y=4x$, $x=-1$, $x=1$

الحل/ نرسم مخطط الدالة f والمستقيمات الثلاثة كما في الشكل الآتي



المستقيم $y=4x$

x	y
0	0
1	4
-1	-4

x	f(x)
0	4
1	5
-1	5

$\therefore A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

$\therefore A=\int_{-1}^{1} [x^2+4-4x]\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+4x-\cancel{4}^{2}\frac{x^2}{\cancel{2}_1}\Big]_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\Big]_{-1}^{1}$

$=(\frac{1}{3}-2+4)-(-\frac{1}{3}-2-4)$

$=\frac{26}{3}$

مثال(2): جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y=x^2$ والمستقيم $y=2x$

الحل/ اولاً نوجد نقطتي تقاطع منحني الدالة f مع المستقيم وذلك بحل معادلتيهما آنياً

$\therefore y=x^2 \;\&\; y=2x$

$\Rightarrow x^2=2x$

$\therefore x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$

$\therefore$ either $x=0$ OR $x=2$

وبذلك يكون $a=0$, $b=2$

ثم بعد ذلك نرسم المنحني والمستقيم كما يأتي

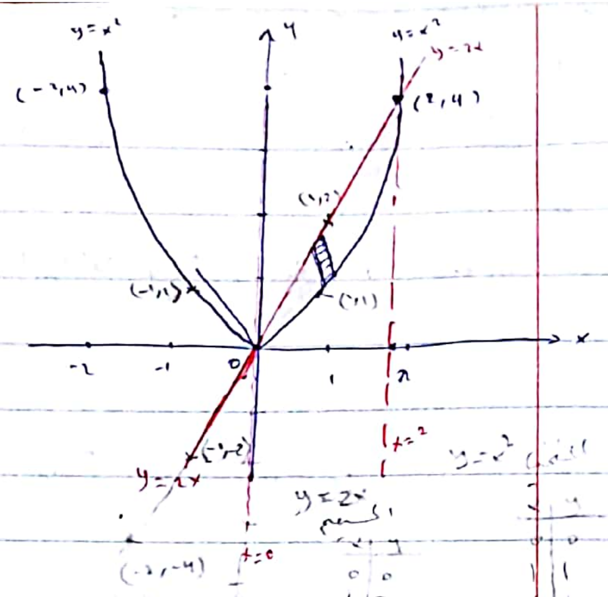
وبتطبيق القاعدة

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$\therefore\ A = \int_0^2 [2x - x^2]\,dx$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = 4 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{12}{3} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$



$y = 2x$

x	y
0	0
1	2
-1	-2
2	4
-2	-4

تمارين واجبة

① في كل من التمارين ١ – ٣ ، جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين المعطيين والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ ، ارسم شكلاً توضيحياً

1. $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$ $\quad a = 0$, $b = 1$

H.W. 2. $y = 5 - 4x$, $y = 3x^2 + 2x + 5$ $\quad a = -2$, $b = 0$

3. $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x$ $\quad a = 1$, $b = 2$

② في كل من التمارين ٤ – ٦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين المعطيين وارسم شكلاً توضيحياً

4. $y = -8$, $y = -x^2 - 4$

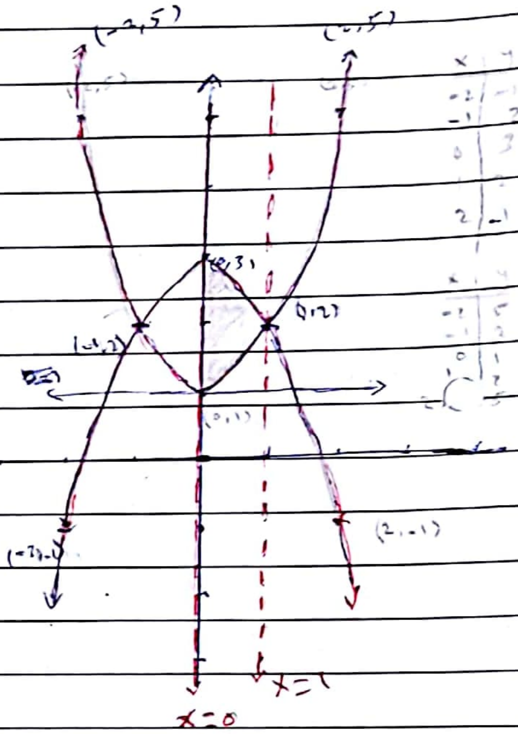
5. $y = -x$, $y = 2 - x^2$

H.W. 6. $y = -x^2 + 5x + 9$, $y = x^2 + 3x + 5$

1

1. $y = 3 - x^2$, $y = x^2 + 1$, $a = 0$, $b = 1$

الحل / نرسم مخطط الدالتين f , g كما في الشكل الآتي:



$\therefore A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

$\therefore A = \int_0^1 [(3 - x^2) - (x^2 + 1)]\,dx$

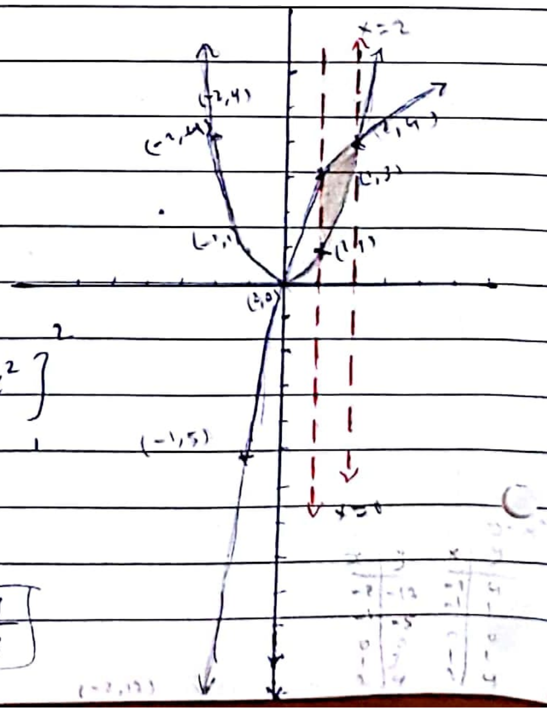
$= \int_0^1 (3 - x^2 - x^2 - 1)\,dx$

$= \int_0^1 (2 - 2x^2)\,dx = 2x - \frac{2}{3}x^3 \Big]_0^1$

$= (2 - \frac{2}{3}) - 0 = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$

2. $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x$, $a = 1$, $b = 2$

الحل / نرسم مخطط الدالتين كما في الشكل الآتي:



$\therefore A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

$\therefore A = \int_1^2 [(-x^2 + 4x) - x^2]\,dx$

$= \int_1^2 (-2x^2 + 4x)\,dx$

$= -2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \Big]_1^2 = \frac{-2x^3}{3} + 2x^2 \Big]_1^2$

$= (\frac{-16}{3} + 8) - (\frac{-2}{3} + 2)$

$= (\frac{-16 + 24}{3}) - (\frac{-2 + 6}{3}) = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$

54

12

3. $y = -8 \quad , \quad y = -x^2 - 4$

الحل/ أولاً نجد نقطتي تقاطع المنحنى مع المستقيم

$\therefore y = -8 \;\&\; y = -x^2 - 4$

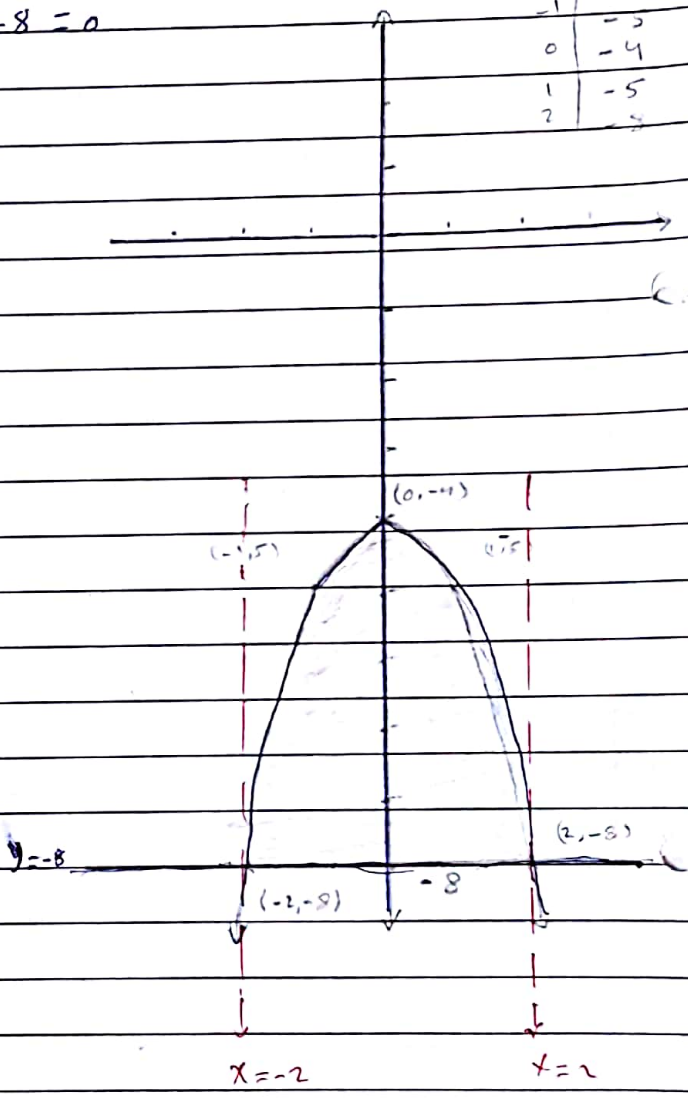
x	y
-2	-8
-1	-5
0	-4
1	-5
2	-8

$\Rightarrow -x^2 - 4 = -8 \Rightarrow x^2 + 4 - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

$\Rightarrow a = -2 \;,\; b = 2$



الارتفاع القائمة

$\therefore \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

$\therefore \int_{-2}^{2} [(-x^2 - 4) - (-8)]\, dx$

$= \int_{-2}^{2} (-x^2 - 4 + 8)\, dx$

$= \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\, dx$

$= -\frac{x^3}{3} + 4x \Big]_{-2}^{2}$

$= \left(\frac{-8}{3} + 8\right) - \left(+\frac{8}{3} + 4(-2)\right) = \left(\frac{-8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)$

$= \left(\frac{-8+24}{3}\right) - \left(\frac{8-24}{3}\right)$

$= \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

55

3

4. $y = -x \quad , \quad y = 2 - x^2$

الحل/ أولاً نجد نقطتي تقاطع منحنيي الدالتين f و g من المعادلتين

$\because \; y = -x \quad , \quad y = +2 - x^2$

$\therefore \; 2 - x^2 = -x$

$\Rightarrow \; x^2 - x - 2 = 0$

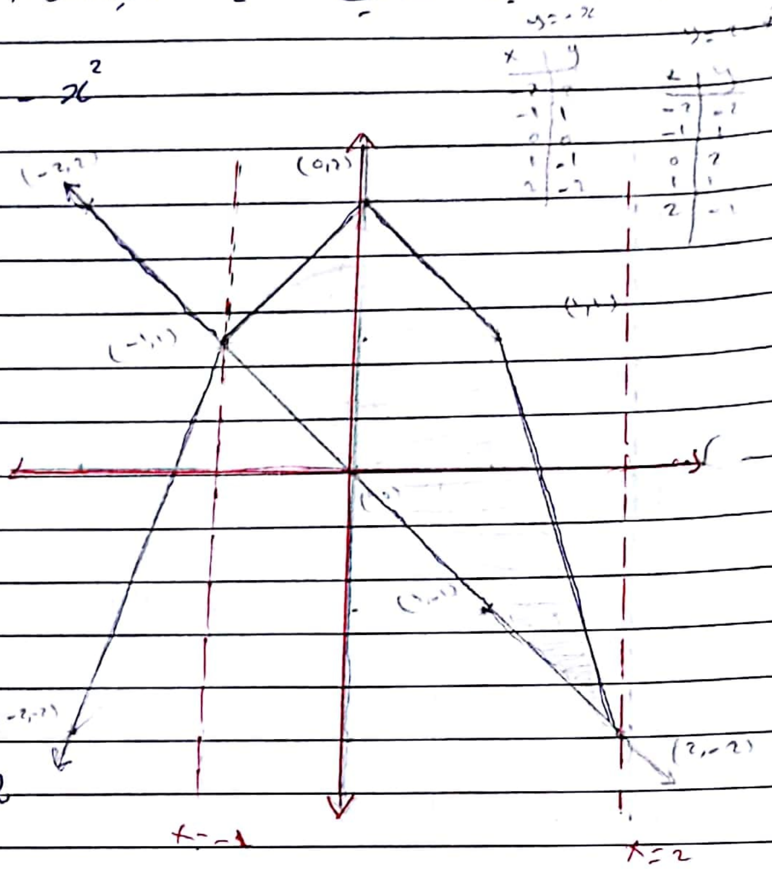
$\therefore \; (x-2)(x+1) = 0$

$\therefore$ either $x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

or $(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

$\Rightarrow a = -1 \;\&\; b = 2$



الآن نطبق القانون

$\because \; A = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\, dx$

$\therefore \; A = \int_{-1}^{2} \{(2 - x^2) - (-x)\}\, dx$

$= \int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)\, dx$

$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big]_{-1}^{2} = \left(4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$

$= \left(\frac{24 - 16 + 12}{6}\right) - \left(\frac{-12 + 2 + 3}{6}\right) = \frac{20}{6} - \left(\frac{-7}{6}\right) = \frac{27}{6}$