فيزياء الصوت و الحركة الموجية

المرحلة الثانية علوم عامة – فيزياء **د- محمد هادي الشمري**

المحاضرة الخامسة :-

الحركة الدورية و الحركة الاهتزازية

الحركة الدورية :-

هي حركة الجسيم باستمرار ذهابا و إيابا و التي تتكرر بفترات زمنية منتظمة.

الحركة الاهتزازية :-

هي حركة الجسيم باستمرار ذهابا و إيابا حول نقطة ثابتة تدعى بموضع التوازن أو الاستقرار.

موضع التوازن أو الاستقرار:-

هي نقطة تنعدم فيها محصلة القوى المؤثرة في الجسيم المهتز و تمثل نقطة سكونه عندما يتوقف عن الاهتزاز.

الحركة الخطية التوافقية البسيطة:-

هي حركة ذلك الجسيم على خط مستقيم بتعجيل يتناسب مقداره طرديا مع ازاحتة عن نقطة ثابتة تمثل موضع توازنه و اتجاهه يكون دائما نحو تلك النقطة (نحو موضع التوازن).

معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة

أذا أزيح الجسيم إزاحة انية طفيفة مقدارها **X** من موضع التوازن (و ضمن حدود المرونة) فان قوة الاستعادة الانية **F** هي

$$F = - k X \text{ -- } 1$$

حيث **k** يمثل ثابت المرونة و الاشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه القوه يعاكس اتجاه زيادة الإزاحة.
و بتطبيق قانون نيوتن الثاني للجسيم المتحرك الذي ينص على أن محصلة القوى المؤثرة في الجسيم $\sum F$ يساوي حاصل ضرب كتلتة **m** في التعجيل المكتسب **a** أي بصيغة رياضية

$\sum F = m\ a$ --- 2

و بما أن محصلة القوى المؤثرة في الجسيم المهتز $= - k\ x$ و كتلة الجسيم المهتز $= m$ و التعجيل الآني المكتسب باتجاه x يساوي d^2x / dt^2
أذن

$\sum F = m\ d^2x / dt^2$ --- 3

و بالقسمة على m نحصل على

$d^2x / dt^2 = - k\ x / m$ --- 4

و أذا فرضنا أن $w^2_0 = k / m$ حيث أن w_0 هو مقدار ثابت يمثل فيزياويا التردد الزاوي للمهتز اذن المعادلة ٤ تصبح

$d^2x / dt^2 = - w^2_0\ x$ --- 5

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تدعى بمعادلة الحركة التوافقية البسيطة.

ملاحظة:-

$T = 2\ \pi \sqrt{m / k}$

$F = 1/ T = (1 / 2\ \pi)\ \sqrt{k / m}$

$w = 2\ \pi\ f = \sqrt{k / m}$

حل معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة

لحل معادلة الحركة التوافقية البسيطة يجب ان نفرض معادلة مشابهه لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة. أن هذا الحل أي حل المعادلة ٥ سوف يوفر لنا معلومات كاملة عن موقع الجسيم المهتز و سرعته و تعجيله في أي لحظة زمنية أذا علمنا الشروط الابتدائية للحركة عند بدء الحركة في زمن $t = 0$

$$X = A \sin at \text{ -- } 6$$

حيث أن **A** يمثل ثابتا اختياريا و أن **a** يمثل ثابت تحويل الزمن الزاوية.

من اشتقاق المعادلة ٦ مرتين نحصل على

$$(dX / dt) = A\, a \cos at$$

$$(d^2X / dt^2) = - A\, a^2 \sin at$$

نعوض عن **X** و d^2X / dt^2 في معادلة ٥ نحصل على

$$- A\, a^2 \sin at = - w^2_0 A \sin at$$

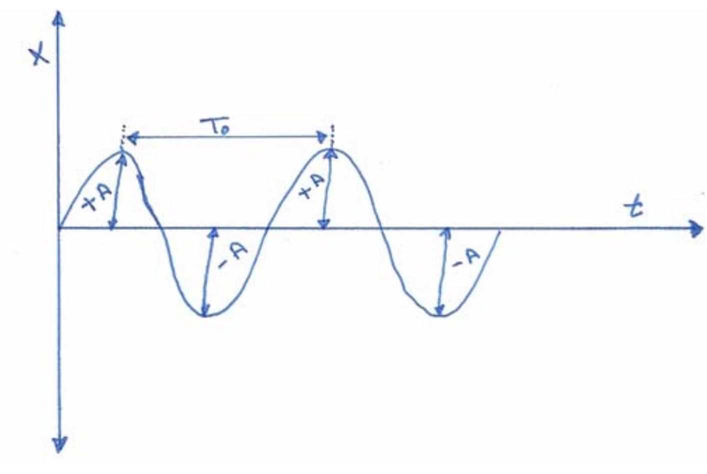
و منها نحصل على

$$w_0 = a$$

و تكون المعادلة ٦ على النحو الأتي

$$X = A \sin w_0 t \text{ -- } 7$$

يمثل هذا الحل حلا خاصا لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة . أن هذا الحل يشير إلى أن الحركة الخطية التوافقية البسيطة هي دالة جيبيه يمكن تمثيلها بالمنحني الجيبي التالي



حيث أن

X تمثل الإزاحة الخطية الآنية للجسيم من موضع التوازن في الزمن **t** .

A يمثل سعة الاهتزاز و تساوي أقصى قيمة للإزاحة من موضع التوازن.

w_0 يمثل التردد الزاوي و يساوي $2\pi / T_0$.

T_0 يمثل الزمن الدوري للحركة الخطية التوافقية البسيطة و يساوي $1/ f_0$.

f_0 يمثل تردد الحركة الخطية التوافقية البسيطة .

أن هذا الحل يحتوي على ثابت اختياري واحد لذلك لا يعتبر حلا كاملا لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حيث من المعلوم أن الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية يجب ان يتضمن ثابتين اختياريين .

أذن في الحقيقة هناك حلا أخر مناسبا هو

$$X = B \cos bt \text{ --- } 8$$

و بأخذ المشتقة الأولى و الثانية للمعادلة ٨ نحصل على

$$(dX / dt) = - b B \sin bt \text{ ------------------------------ } 9$$

$$(d^2X / dt^2) = - b^2 B \cos bt \text{ --------------------------- } 10$$

و من تعويض المعادلتين ٨ و ١٠ في المعادلة ٥ نحصل على

$$- b^2 B \cos bt = - w_0^2 B \cos bt$$

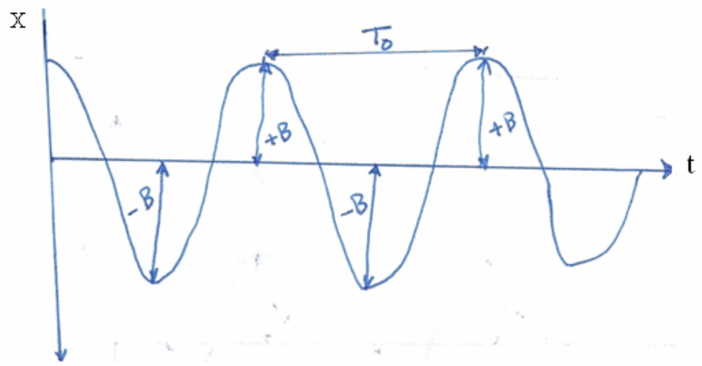
و منها نحصل على

$$w_0^2 = b$$

أذن

$$X = B \cos w_0 t \text{ -- } 11$$

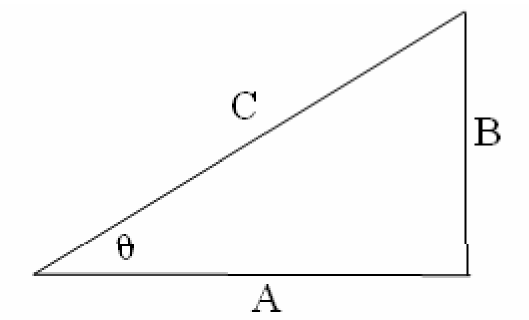
ان هذا الحل يمثل حلا خاصا أيضا لأنة يحتوي على ثابت اختياري واحد و يمكن تمثيل هذا الحل بمنحني الجيب تمام كما في الشكل أدناه



و لما كانت المعادلتين ٧ و ١١ مستقلتين عن بعضهما البعض و كل منها يمثل حلا خاصا يختلف عن الأخر لذلك يمكن اعتبار مجموع هذين المعادلتين حلا أخر للمعادلة ٥ و بذلك يصبح

$$X = A \sin w_0\, t + B \cos w_0\, t \quad \text{------------------} \quad 12$$

ان هذا الحل يحتوي على ثابتين اختياريين A و B لذلك يمكن اعتبارها حلا عاما و كاملا للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة و يمكن تبسيط هذا الحل بفرض ان A و B يمثلان طول ضلعين قائمين في مثلث قائم طول وتره C كما في الشكل أدناه



اذن

$$C^2 = A^2 + B^2$$

و من المثلثات لدينا

$$\sin \theta = B / C \quad \text{------------------} \quad 13$$

$$\cos \theta = A / C \quad \text{------------------} \quad 14$$

و من المعادلتين السابقتين (١٣ و ١٤) نحصل على

$\tan \theta = B / A$ كيف ؟

و بضرب الطرف الأيمن من المعادلة ١٢ و القسمة عل C نحصل على

$$X = C\,[\,(A / C) \sin w_0 t + (B / C) \cos w_0 t\,]$$

و من تعويض معادلة ١٣ و ١٤ نحصل على

$$X = C\,(\cos \theta \sin \theta\, w_0 t + \sin \theta \cos \theta\, w_0 t)$$

أذن $X = C \sin (w_0 t + \theta)$ ------------------ 15

ان هذه المعادلة تمثل ايظا حلا عاما للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لأنها تتضمن ثابتين اختيارين هما **C** و **θ**

و حيث ان

C تمثل سعة الاهتزاز .

θ تمثل الطور الابتدائي لحركة الجسيم .