2016

التقاضل و التكامل

التفاضل و التكامل

أعداد الاستاذ

عبدالسلام محمد علي

2015-2016

الاشتقاق Differentiation

المشتقة

١ ـ المشتقة باستخدام التعريف

يرمز للمشتقة الأولى بإحدى الرموز $f^{/}(x)$, $y^{/}$, $\frac{dy}{dx}$

يرمز للمشتقة الثانية بإحدى الرموز $f^{//}(x)$, $y^{//}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

يقال للدالة الحقيقية $y = f(x)$ انها قابلة للاشتقاق عند $x_\circ$ في مجال الدالة اذا كانت الغاية الاتية موجودة

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

-

مثال / جد $f(x) = x^2$ جد $f^{/}(3)$ باستخدام التعريف

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2-(3)^2}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9+6\Delta x+(\Delta x)^2-9}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} 6 + \Delta x = 6 + 0 = 6$$

مثال / اذا كانت $f(x) = x^2 + x + 1$ هل الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + (2+\Delta x) + 1 - [(2)^2 + 2 + 1]}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 + \Delta x + 1 - 7}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(5 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} 5 + \Delta x = 5 + 0 = 5$$

الدالة قابلة للاشتقاق

ملاحظة / الدالة كثيرة الحدود تكون قابلة للاشتقاق عند اي نقطة

ملاحظة / اذا كانت النقطة $x = a$ تنتمي لمجال تعريف الدالة وكانت الدالة يتغير تعريفها في يمين ويسار النقطة $x = a$ فعند البحث عن قابلية الاشتقاق عند $x = a$ لابد من بحث المشتقة

من اليمين واليسار للدالة عند $x = a$ والمقارنة بينهما فاذا كان

$f^{/}(a^+) = f^{/}(a^-)$ الدالة قابلة للاشتقاق

$f^{/}(a^+) \neq f^{/}(a^-)$ الدالة غير قابلة للاشتقاق

مثال / لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 3 \\ 2x + 4 & x < 3 \end{cases}$ هل f قابلة للاشتقاق عند $x = 3$ ؟ بين ذلك

المشتقة من اليمين

$$f^{/}(3^{+}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3^{+}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 + 1 - (3)^2 - 1}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3^{+}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - 9 - 1}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3^{+}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3^{+}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3^{+}) = \lim_{\Delta x \to 0} 6 + \Delta x = 6 + 0 = 6$$

المشتقة من اليسار

$$f^{/}(3^{-}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3^{-}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(3+\Delta x) + 4 - 2(3) - 4}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3^{-}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6 + 2\Delta x + 4 - 6 - 4}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3^{-}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

$$f^{/}(3^{+}) \neq f^{/}(3^{-})$$

الدالة غير قابلة للاشتقاق

ملاحظة ١ / اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فانها تكون مستمرة عند نفس النقطة والعكس غير صحيح

ملاحظة ١ / اذا كانت الدالة غير مستمرة عند $x = a$ فانها تكون غير قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة

والعكس غير صحيح

مثال / جد $f(x) = x^2 + 5x$ جد $f^{/}(3)$ باستخدام التعريف

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2+5(2+\Delta x)-[(2)^2+5(3)]}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9+6\Delta x+(\Delta x)^2+10+5\Delta x-(4+15)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{19+11\Delta x+(\Delta x)^2-19}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(11+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} 11 + \Delta x = 11 + 0 = 11$$

تطبيقات على المشتقة

١ـ التطبيقات الهندسية

لإيجاد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للدالة .

١ـ نجد نقطة التماس (x_1 , y_1) **وذلك بتعويض قيمة** x **في الدالة الاصلية ونجد قيمة** y

٢ـ نشتق الدالة ثم نعوض قيمة x **في المشتقة فنحصل ميل المماس** m

٣ـ نعوض نقطة التماس والميل في المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$

مثال/ اذا كان $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ **جد باستخدام التعريف** $f^{/}(2)$ **ثم جد معادلة المماس للمنحني عند هذه النقطة**

الحل / نعوض قيمة $x = 2$ **في الدالة الأصلية** $f(x)$

$f(x) = 2(2)^2 + 3(2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15 \longrightarrow (2 , 15)$

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(2+\Delta x)^2+3(2+\Delta x)+1-15}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8+8\Delta x+2(\Delta x)^2+6+3\Delta x+1-15}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(11+2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} 11 + 2\Delta x = 11 + 0 = 11$$

نعوض نقطة التماس $(2 , 15)$ **والميل** $= 11$ **في معادلة المماس**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 15 = 11(x - 2)$$
$$y - 15 = 11x - 22$$
$$11x - y + 15 - 22 = 0$$
$$11x - y - 7 = 0$$

مثال / لتكن $f(t) = 2t^2 + 3$ تمثل حركة جسم في اي لحظة بالأمتار جد موقع الجسم وسرعته بعد 2 ثانية من بدأ الحركة .

الحل /

لايجاد موقع الجسم نعوض $t = 2$ في الدالة الأصلية

$$f(2) = 2(2)^2 + 3 = 8 + 3 = 11$$

سرعة الجسم = المشتقة عند $t = 2$

$$f^{/}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(2+\Delta t)^2+3-11}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8+8\Delta t+2(\Delta t)^2+3-11}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8\Delta t+2(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(8+2\Delta t)}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} 8 + 2\Delta t = 8 + 0 = 8$$ متر / ثا

مثال / لتكن $v(t) = 3t^2$ جد التعجيل بعد 2 ثانية .

الحل /

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(2+\Delta t)-v(2)}{\Delta t}$$

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(2+\Delta t)^2-3(2)^2}{\Delta t}$$

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12+12\Delta t+3(\Delta t)^2-12}{\Delta t}$$

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12\Delta t+3(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(12+3\Delta t)}{\Delta t} = 12 + 3(0) = 12$$

قواعد المشتقة

١ـ مشتقة الثابت = صفر

مثال / جد المشتقة للدوال الآتية

1- $f(x) = 6 \Longrightarrow f'(x) = 0$

2- $f(x) = \sqrt{5} \Longrightarrow f'(x) = 0$

3- $f(x) = a \Longrightarrow f'(x) = 0$

٢ـ مشتقة المتغير $f(x) = x^n$ $\qquad f'(x) = nx^{n-1}$ $\qquad f(x) = x^2$

مثال / جد المشتقة للدوال الآتية

1) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

2) $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$

3) $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$

4) $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3$

5) $f(x) = x^5 \Longrightarrow f'(x) = 5x^4$

6) $f(x) = 2x \Longrightarrow f'(x) = 2$

7) $f(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'(x) = 6x$

8) $f(x) = 5x^3 \Longrightarrow f'(x) = 15x^2$

9) $f(x) = x^{-2} \Longrightarrow f'(x) = -2x^{-3}$

10) $f(x) = x^{-3} \Longrightarrow f'(x) = -3x^{-4}$

11) $f(x) = x^{-4} \Longrightarrow f'(x) = -4x^{-5}$

12) $f(x) = 3x^{-5} \Longrightarrow f'(x) = -15x^{-6}$

مشتقة الجذور

1) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

4) $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

6) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^{-2}} = x^{-\frac{2}{3}} \Longrightarrow f^{/}(x) = -\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$

٣ـ مشتقة دوال كثيرة الحدود

$f(x) = h(x) \mp g(x) \Longrightarrow f^{/}(x) = h^{/}(x) \mp g^{/}(x)$

1) $f(x) = 3x^5 + 7x \Longrightarrow f^{/}(x) = 15x^4 + 7$

2) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 6 \Longrightarrow f^{/}(x) = 12x^3 - 8x$

3) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x \Longrightarrow f^{/}(x) = 4x + \frac{1}{2}$

4) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 9 \Longrightarrow f^{/}(x) = x - 4x^2$

5) $f(x) = \frac{1}{5}x^{-2} - \frac{2}{7}x^{-3} + 9 \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{-2}{5}x^{-3} + \frac{6}{7}x^{-4}$

٤ـ مشتقة حاصل ضرب دالتين = الاولى في مشتقة الثانية + الثانية في مشتقة الاولى

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \longrightarrow f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

الحل /

$f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

$f'(x) = (x^4 - x^2 + 1)(30x^5 - 3) + (5x^6 - 3x)(4x^3 - 2x)$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$ عند $x = 2$

الحل /

$f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$

$f'(x) = (4 - x)(2x) + (x^2 + 3)(-1)$

$f'(2) = (4 - 2)(2(2)) + (2^2 + 3)(-1) = 2(4) + (7)(-1) = 8 - 7 = 1$

٥ـ مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\dfrac{\text{المقام في مشتقة البسط – البسط في مشتقة المقام}}{\text{المقام}^2}$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^4+1}$ ***عند*** $x = 1$

الحل/

$$f'(x) = \frac{(x^4+1)(3x^2) - (x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1^4+1)(3\times1^2) - (1^3+1)(4\times1^3)}{(1^4+1)^2} = \frac{2\times3 - 2\times4}{2^2} = \frac{6-8}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=\frac{4-5x}{x^2+x+1}$ عند $x = -1$

الحل/

$$f^{/}(x)=\frac{(x^2+x+1)(-5)-(4-5x)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f^{/}(-1)=\frac{((-1)^2+(-1)+1)(-5)-(4-5(-1))(2(-1)+1)}{((-1)^2+(-1)+1)^2}$$

$$f^{/}(-1)=\frac{(1-1+1)(-5)-(4+5)(-2+1)}{(1-1+1)^2}=\frac{-5-(9)(-1)}{1}=-5+9=4$$

---

٦ - مشتق القوس مرفوعة الى أس = الاس في القوس مرفوع الى الأس - ١ في مشتقة داخل القوس

$$f(x)=[h(x)]^n \Longrightarrow f'(x)=n[h(x)]^{n-1}(h'(x))$$

مثال / جد المشتقة الدوال الآتية $f(x)=(1-x)^3$

الحل/

$$f'(x)=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=(x^3+x^2+x+1)^5$

الحل/

$$f'(x)=5(x^3+x^2+x+1)^4(3x^2+2x+1)$$

مثال / اذا كانت $f(x)=(x^2-3)^4$ جد $f^{/}(x)$, $f^{//}(x)$ عند $x = 2$

الحل/

$$f^{/}(x)=4(x^2-3)^3(2x)=8x(x^2-3)^3$$

$$f^{/}(2)=8(2)(2^2-3)^3=16(1)^3=16$$

$$f^{//}(x)=8x(3)(x^2-3)^2(2x)+(x^2-3)^3(8)$$

$$f^{//}(x)=48x^2(x^2-3)^2+8(x^2-3)^3$$

$$f^{//}(2)=48(2)^2(2^2-3)^2+8(2^2-3)^3=192+8=200$$

ملاحظة / مشتقة الجذر التربيعي = مشتقة داخل الجذر على ٢ في الجذر

$f(x) = \sqrt{\quad} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\quad}}$

مثال / اذا كانت $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 5}$ **جد** $f^{/}(x)$

الحل /

$$f^{/}(x) = \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2-5}}$$

مثال / اذا كانت $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ **جد** $f^{/}(x)$

الحل /

$$f^{/}(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+1}}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $y = x^4 + 5x^3 + 3$ **جد** $y^{/} \;,\; y^{//}$

الحل

$y^{/} = 4x^3 + 15x^2$

$y^{//} = 12x^2 + 30x$

مثال/ اذا كانت $f(x) = 2x^3 + 4 + \frac{3}{x}$ **جد** $f^{/}(x)$ ، $f^{//}(x)$ ، $f^{//}(-1)$

الحل/

$f(x) = 2x^3 + 4 + 3x^{-1}$

$f^{/}(x) = 6x^2 - 3x^{-2} \Longrightarrow f^{/}(x) = 6x^2 - \frac{3}{x^2}$

$f^{//}(x) = 12x + 6x^{-3} \Longrightarrow f^{//}(x) = 12x + \frac{6}{x^3}$

$f^{//}(-1) = 12(-1) + \frac{6}{(-1)^3} = -12 - 6 = -18$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ عند $x = 0$

الحل /

$$f(x) = (2x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$f^{/}(x) = \frac{-1}{2}(2x+2)^{\frac{1}{2}}(2) = -\sqrt{2x+1}$$

$$f^{/}(0) = -\sqrt{2(0)+1} = -\sqrt{1} = -1$$

==

س٣ / جد المشتقة للدالة $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4$ عند $x = 1$

الحل /

$$f^{/}(x) = 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3\left(\frac{(x+1)(1)-x(1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f^{/}(1) = 4\left(\frac{1}{1+1}\right)^3\left(\frac{(1+1)(1)-1(1)}{(1+1)^2}\right)$$

$$f^{/}(1) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{2-1}{4}\right) = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

==

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = x + \frac{3}{x^2+1}$ عند $x = -1$

الحل /

$$f^{/}(x) = 1 + \frac{-3(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f^{/}(x) = 1 - \frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f^{/}(-1) = 1 - \frac{6(-1)}{((-1)^1+1)^2} = 1 + \frac{6}{(2)^2}$$

$$= 1 + \frac{6}{(2)^2} = 1 + \frac{6}{4} = \frac{4+6}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

==

س٣/ اذا كانت $f(x) = (x^3+3x^2-3)^{\frac{3}{2}}$ $f^{/}(x)$, $f^{/}(2)$

الحل /

$$f^{/}(x) = \frac{3}{2}(x^3+3x^2-3)^{\frac{1}{2}}(3x^2+6x) = \frac{3}{2}(3x^2+6x)\sqrt{x^3+3x^2-3}$$

$$f^{/}(2) = \frac{3}{2}(3(2)^2+6(2))\sqrt{2^3+3(2)^2-3}$$

$$= \frac{3}{2}(12+12)\sqrt{8+12-3} = \frac{3}{2}(24)\sqrt{17} = 36\sqrt{17}$$

تطبيقات على المشتقة

١- التطبيقات الهندسية

لإيجاد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للدالة .

١- نجد نقطة التماس (x_1 , y_1) **وذلك**

أ – اذا كانت x **معلومة في السؤال نعوض قيمة** x **في الدالة الاصلية ونجد قيمة** y

ب – اذا كانت y **معلومة في السؤال نعوض قيمة** y **في الدالة الاصلية ونجد قيمة** x

٢- نشتق الدالة ثم نعوض قيمة x **في المشتقة فنحصل ميل المماس** m

٤- نعوض نقطة التماس والميل في المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$

ملاحظة / ميل العمودي على المماس = - مقلوب ميل المماس

اي ميل العمود $= -\dfrac{1}{\text{ميل المماس}}$

==

مثال ١ / جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 5x + 2$ **عند** $x = 1$

الحل/

نجد نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة $x = 1$ **في الدالة**

$$y = f(1) = (1)^2 - 5(1) + 2 = 1 - 5 + 2 = -2$$

نقطة التماس هي $(1 , -2)$

نشتق الدالة ونعوض قيمة $x = 0$ **في المشتقة لايجاد الميل** $\qquad f'(x) = 2x - 5$

$$m = f'(1) = 2(1) - 5 = -3$$

نعوض نقطة التماس $(1 , -2)$ **والميل في معادلة التماس** $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 2 = -3(x - 1)$$

$$y + 2 = -3x + 3$$

$$3x + y + 2 - 3 = 0$$

معادلة المماس هي $3x + y - 1 = 0$

مثال٢ / جد معادلة المماس والعمودي على المماس للمنحني $y = \frac{2x+1}{3-x}$ عندما y = 5

الحل /

نعوض قيمة y = 5 في الدالة الأصلية لإيجاد قيمة x

$$5 = \frac{2x+1}{3-x}$$

$$5(3-x) = 2x + 1$$

$$5(3-x) = 2x + 1$$

$$15 - 5x = 2x + 1$$

$$5x + 2x = 15 - 1 \implies 7x = 14 \implies x = 2$$

نقطة التماس (2 , 5)

نشتق الدالة

$$y' = \frac{(3-x)(2) - (2x+1)(-1)}{(3-x)^2}$$

$$y' = \frac{6 - 2x + 2x + 1}{(3-x)^2} = \frac{7}{(3-x)^2}$$

ونعوض قيمة x = 2 في المشتقة لايجاد الميل

$$m = y' = \frac{7}{(3-2)^2} = 7$$

نعوض نقطة التماس(2 , 5) والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 5 = 7(x - 2)$$

$$y - 5 = 7x - 14$$

$$7x - y - 14 + 5 = 0 \implies 7x - y - 9 = 0$$ **معادلة المماس**

ميل المستقيم المعلوم = $- \frac{1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{7}$

$$y - 5 = \frac{-1}{7}(x - 2)$$

$$7(y - 5) = -1(x - 2)$$

$$7y - 35 = -x + 2$$

$$x + 7y - 35 - 2 = 0$$

معادلة العمود $$x + 7y - 37 = 0$$

مثال٣ / جد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$ عند $x = 5$

الحل/ نعوض النقطة x=5 في الدالة الأصلية

$$f(5) = \sqrt[3]{5+3} = 2$$

نقطة التماس (5 , 2)

نشتق الدالة ونعوض قيمة x = 5 في المشتقة لايجاد الميل

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}}(1) = \frac{1}{3(x+3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(5) = \frac{1}{3\sqrt{(5+3)^2}} = \frac{1}{3(2)^2} = \frac{1}{12}$$

نعوض نقطة التماس(5 , 2) والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = \frac{1}{12}(x-5) \Longrightarrow 12(y-2) = x - 5$$

$$12y - 24 = x - 5 \Longrightarrow 12y - x - 24 + 5$$

معادلة المماس $12y - x - 19 = 0$

ملاحظة

١- اذا كان المنحني يتقاطع مع محور السينات نعوض عن $y = 0$ في الدالة ونجد قيم x

٢- اذا كان المنحني يتقاطع مع محور الصادات نعوض عن $x = 0$ في الدالة ونجد قيمy

مثال٤ / جد معادلة المماس للمنحني الدالة $y = x^2 + 1$ عند نقطة تقاطعة مع محور الصادات

الحل / نقطة التقطع مع محور الصادات يعني $x = 0$

$$y = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$$

النقطة هي (0 , 1)

$y = x^2 + 1$

$y' = 2x$

$y' = 2(0) = 0$

الميل = 0

نعوض نقطة التماس(0 , 1) والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 0(x - 0)$

$y - 1 = 0$

معادلة المماس هي $y - 1 = 0$

مثال / جد معادلة المماس للمنحني الدالة $y = x^3 - 2x + \frac{3}{x^2+2}$ عند $x = -1$

الحل/ نجد نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة x = 2 في الدالة

$$y = (-1)^3 - 2(-1) + \frac{3}{(-1)^2+2} = -1 + 2 + \frac{3}{1+2} = 1 + 1 = 2$$

نقطة التماس هي (-1 , 2)

نشتق الدالة ونعوض قيمة x = -1 في المشتقة لايجاد الميل

$$f'(x) = 3x^2 - 2 - \frac{6x}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 - \frac{6(-1)}{((-1)^2+2)^2} = 3 - 2 + \frac{6}{(3)^2}$$

$$f'(x) = 3 - 2 + \frac{6}{(3)^2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

نعوض نقطة التماس(-1 , 2) والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{5}{3}(x - 1)$$

3(y – 2) = 5(x + 1)

3y - 6= 5x + 5

5x - 3y + 6 + 5 = 0

معادلة المماس هي 5x – 3y + 11 = 0

==

ملاحظة / لايجاد نقطة تنتمي الى منحنى الدالة نتبع الخطوات التالية

١ـ نجد ميل المستقيم المعلوم حيث ميل المستقيم المعلوم = $\frac{-\text{معامل } X}{\text{معامل } Y}$

٢ـ اذا كان المستقيم يوازي المماس فان ميل المماس = ميل المستقيم المعلوم

٣ـ اذا كان المستقيم عمودي على المماس فان ميل المماس = ـ مقلوب ميل المستقيم المعلوم

٤ـ نجد المشتقة الاولى للدالة $f'(x)$

٥ـ نضع ميل المماس = المشتقة اي $f'(x) = m$ ثم نبسط ونجد قيم x

٦ـ نعوض قيم x في الدالة الاصلية ونجد قيم y ثم نكتب النقط على شكل (x , y)

ملاحظة / اذا كان مماس يوازي محور السينات فان ميله = صفر

مثال ١/جد النقط على المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y + 2x + 3 = 0$

الحل /

اذا كان المماس يوازي مستقيما معلوما فان ميل المستقيم = ميل المماس ويساوي المشتقة الاولى للدالة

ميل المستقيم المعلوم = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-2}{1} = -2$

نجد المشتقة للدالة

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = m = -2$$

$$2x - 4 = -2 \Longrightarrow 2x = -2 + 4 \Longrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1$$

$$f(1) = (1)^2 - 4(1) + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$$

نقطة التماس $(1 , 2)$

مثال٢/اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + ax + b$ وكان ميل المماس عند $x= -1$ هو 4 وكان المنحني يمر بالنقطة $(-3 , 2)$ جد قيمة b , a

الحل /

$f(x) = x^2 + ax + b$

$f'(x) = 2x + a \Longrightarrow f'(-1) = 4$

$2(-1) + a = 4 \Longrightarrow -2 + a = 4 \Longrightarrow a = 6$

نعوض النقطة $(-3 , 2)$ في الدالة اي $f(-3) = 2$

$(-3)^2 + 6(-3) + b = 2 \Longrightarrow 9 - 18 + b = 2 \Longrightarrow -9 + b = 2 \Longrightarrow b = 11$

مثال٣/جد النقط على المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ بحيث يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات

الحل /

المماس يوازي محور السينات اذن ميله = صفر

المشتقة = صفر

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ نقسم على 3

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

$x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$

عندما $x = 3$ فان

$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4 = \cancel{27} - \cancel{27} - 27 + 4 = -23$

نقطة التماس $(3 , -23)$

عندما $x = -1$ فان

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4 = -1 - 3 - 9 + 4 = -9$

نقطة التماس $(-1 , -9)$

نقاط التماس $(-1 , -9) , (3 , -23)$

س٥/جد النقط على المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ عندما يكون المماس يوازي المستقيم $2x - y = 0$

الحل /

اذا كان المماس يوازي مستقيما معلوما فان ميل المستقيم = ميل المماس ويساوي المشتقة الاولة للدالة

ميل المستقيم المعلوم $= \frac{- x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = \frac{-2}{-1} = 2$

نجد المشتقة للدالة

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 2 \Longrightarrow 2x - 4 = 2 \Longrightarrow 2x = 2 + 4 \Longrightarrow x = 3$$

$$f(3) = (3)^2 - 4(3) + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$$

نقطة التماس $(3 , 2)$

التطبيقات الفيزياوية

١- الزمن ويرمز له بالرمز t

٢- الإزاحة (البعد او الموضع) ويرمز لها بالرمز s(t)

٣- السرعة ويرمز لها بالرمز v(t)

٤- التعجيل ويرمز له بالرمز a(t)

القوانين المستخدمة

١- السرعة = مشتقة الإزاحة ونعبر عن ذلك $v(t) = s'(t)$

٢- التعجيل = مشتقة السرعة ونعبر عن ذلك $a(t) = v'(t)$

==

مثال١ / جسم يتحرك على خط مستقيم وفق القاعدة $s(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 1$ حيث s(t) تقاس بالأمتار والزمن بالدقائق جد موضعه وسرعته وتعجيله بعد (5) دقائق بدأ الحركة .

الحل/

$$s(5) = (5)^3 + 3(5)^2 + 4(5) + 1 = 125 + 75 + 20 + 1 = 221m$$

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 + 6t + 4$$

$$v(5) = 3(5)^2 + 6(5) + 4 = 75 + 30 + 4 = 109$$

$$a(t) = v'(t) = 6t + 6$$

$$a(5) = 6(5) + 6 = 36$$

==

مثال٢ / يتحرك جسم على خط مستقيم وفق القاعدة $s(t) = t^2 - 20t + 120$ حيث يقاس البعد بالكيلو مترات والزمن بالساعة جد

١- سرعته بعد خمس ساعات .

٢- بُعده عندما تصبح سرعته صفرا .

الحل/

$$1- \; v(t) = s'(t) = 2t - 20$$

$$v(5) = 2(5) - 20 = 10 - 20 = -10$$

٢- بُعده عندما تصبح سرعته صفرا

$$v(t) = 0 \Longrightarrow 2t - 20 = 0 \Longrightarrow 2t = 20 \Longrightarrow t = 10$$

نعوض $t = 10$

$$s(10) = 10^2 - 20(10) + 120 = 100 - 200 + 120 = 20$$

مثال٣ / جسم يتحرك على خط مستقيم وحسب العلاقة $s(t) = \sqrt{2t+1}$ اوجد الزمن الذي يستغرقه حتى تصبح سرعته 1/3 متر/ثا .

الحل/

$$v(t) = s^{/}(t) = \frac{2}{2\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$$

$$v(t) = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{2t+1} = 3$$

$2t + 1 = 9$ *تربيع الطرفين*

$2t = 9 - 1 \Longrightarrow 2t = 8 \Longrightarrow t = 4$

==

مثال٤ / اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t) = t^3 - 6t^2 + 18t + 12$ حيث $s(t)$ تقاس بالأمتار والزمن بالثواني احسب بُعد الجسم عن نقطة بداية الحركة وسرعته عندما يصبح تعجيل صفرا ..

الحل/

$v(t) = s^{/}(t) = 3t^2 - 12t + 18$

التعجيل= صفر

$a(t) = v^{/}(t) = 6t - 12$

$6t - 12 = 0 \Longrightarrow 6t = 12 \Longrightarrow t = 2$

$s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 18(2) + 12 = 8 - 24 + 36 + 12 = -16 + 48 = 32$

$v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 18 = 12 - 24 + 18 = 6$

==

مثال5/قذف جسم نحو الأعلى عن سطح الأرض بإزاحة معطاة وفق العلاقة $s(t) = 96t - 16t^2$ حيث ان الإزاحة $s(t)$ بالأمتار t بالثواني احسب

١- سرعة الجسم بعد ثانيتين ٢- متى تصبح سرعته صفراً .

$1\text{- } V(t) = s^{/}(t) = 96 - 32t$

$V(2) = 96 - 32(2) = 96 - 64 = 32$

٢- عندما تصبح سرعته = صفر

$2\text{- } V(t) = 0 \longrightarrow 96 - 32t = 0$

$32t = 96 \longrightarrow t = 3$

س٦ / جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث بُعده بالأمتار والزمن بالثواني ومعطى العلاقة $s(t) = \sqrt{2t^2 + 18}$ احسب بعده عندما تصبح سرعته 1 متر/ثا .

الحل/

$$v(t) = s^{/}(t) = \frac{4t}{2\sqrt{2t^2+18}} = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}}$$

$$v(t) = 1 \Longrightarrow \frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}} = 1$$

$$\sqrt{2t^2 + 18} = 2t$$

$2t^2 + 18 = 4t^2$ ***تربيع الطرفين***

$$4t^2 - 2t^2 = 18 \Longrightarrow 2t^2 = 18 \Longrightarrow t^2 = 9 \Longrightarrow t = 3$$

$$s(3) = \sqrt{2(3)^2 + 18} = \sqrt{18 + 18} = \sqrt{36} = 6$$

==

س٧ / اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t)= t^3 - 6t^2 + 9t + 7$ حيث s(t) تقاس بالأمتار و الزمن بالثواني **احسب**

١- بُعده الجسم من نقطة بداية الحركة عندما تصبح سرعته صفرا ..

٢- بُعده الجسم من نقطة بداية الحركة عندما يصبح تعجيل صفرا ..

الحل/

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

السرعة = صفر

$$v(t) = 0 \Longrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t - 3)(t - 1) = 0$$

$$t - 3 = 0 \Longrightarrow = 3$$

$$t - 1 = 0 \Longrightarrow = 1$$

عندما $t = 3$ فان

$$s(t) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 7 = 27 - \cancel{54} + \cancel{27} + \cancel{7} = 7$$

عندما $t = 1$ فان

$$s(t) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 7 = 1 - 6 + 9 + 7 = 11$$

التعجيل= صفر

$$a(t) = v^{/}(t) = 6t - 12$$

$$6t - 12 = 0 \Longrightarrow 6t = 12 \Longrightarrow t = 2$$

$$s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 7 = 8 - 24 + 18 + 7 = 9$$

التطبيق الاقتصادي للمشتقة

١ـ نرمز للدالة الكلفة الكلية بالرمز $C(x)$ حيث x يمثل حجم الإنتاج

٢ـ نرمز للدالة الكلفة الحدية بالرمز MC حيث $MC = c'(x)$

٣ـ نرمز معدل الكلفة بالرمز AC ونحصل عليها من $AC = \frac{C(x)}{x}$

٤ـ معدل الكلفة الحدية = مشتقة معدل الكلفة $\frac{d}{dx}(AC)$

==

مثال / لنفرض ان دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة ما $C(x) = 3x^2 - 60x + 1200$ جد

١ـ دالة الكلفة الحدية ٢ـ دالة معدل الكلفة

٣ـ دالة معدل الكلفة الحدية ٤ـ حجم الإنتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة الكلية

الحل/

$$C(x) = 3x^2 - 60x + 1200$$

1) $MC = C'(x) = 6x - 60$

2) $AC = \frac{C(x)}{x} = \frac{3x^2-60x+1200}{x} = 3x - 60 + \frac{1200}{x}$

3) $\frac{d}{dx}AC = 3 + \frac{-1200}{x^2} = 3 - \frac{1200}{x^2}$

لإيجاد حجم الإنتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة نجعل المشتقة الأولى لـ AC صفرا

$$3 - \frac{1200}{x^2} = 0$$

ضرب طرفي المعادلة في x^2

$3x^2 - 1200 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 1200$

$x^2 = 400 \Longrightarrow x = 20$

الكلفة الكلية

$C(x) = 3(20)^2 - 60(20) + 1200 = 1200 - 1200 + 1200 = 1200$

س٨/ لنفرض ان الكلية لصنع x من وحدات سلعة ماهي $c(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$
جد الكلفة الحدية عندما يكون عدد الوحدات المصنوعة 50
الحل /

الكلفة الكلية $c(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$

$$MC = c^{/}(x) = 0 + 30 - \frac{20}{x^2}$$

دالة الكلفة الحدية $MC = 30 - \frac{20}{x^2}$

لايجاد الكلفة الحدية عندما يكون عدد الوحدات = 50

$$MC = c^{/}(50) = 30 - \frac{20}{(50)^2} = 30 - \frac{20}{2500}$$

$$= 30 - \frac{1}{125} = \frac{3750}{125} - \frac{1}{125} = \frac{3749}{125} = 29,992$$

س٩ / لتكن دالة الكلفة الكلية $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ **جد**

١ ـ دالة الكلفة الحدية ***٢ ـ دالة معدل الكلفة الكلية***

الحل

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$$

دالة الكلفة الحدية $MC = c^{/}(x) = x - 2$

$$AC = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5}{x} = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{5}{x}$$

مشتقات الدوال الدائرية

$$1)\ \frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\sin 5x$

الحل / $\frac{d}{dx}\sin 5x = \cos 5x \cdot 5 = 5\cos 5x$

$$2)\ \frac{d}{dx}(\cos y) = -\sin y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\cos \frac{x}{2}$

الحل / $\frac{d}{dx}\cos\frac{x}{2} = -\sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}$

$$3)\ \frac{d}{dx}(\tan y) = \sec^2 y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\tan x^2$

$$\frac{d}{dx}\tan x^2 = \sec^2 x^2 (2x) = 2x\sec^2 x^2$$

$$4)\ \frac{d}{dx}(\cot y) = -\csc^2 y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\cot 8x$

$$\frac{d}{dx}\cot 8x = -\csc^2 8x \cdot 8 = -8\csc^2 8x$$

$$5)\ \frac{d}{dx}(\sec y) = \sec y \tan y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\sec 4x$

الحل $\frac{d}{dx}\sec 4x = \sec 4x \tan 4x \cdot 4 = 4\sec 4x \tan 4x$

$$6)\ \frac{d}{dx}(\csc y) = -\csc y \cot y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\csc 5x$

الحل /

$$\frac{d}{dx}\csc 5x = -\csc 5x \cot 5x \cdot 5 = -5\csc 5x \cot 5x$$

==

مثال / اذا كانت $f(x) = \sin(7x^2 + 4x + 1)$ جد $f^{/}(x)$

الحل /

$$f^{/}(x) = \cos(7x^2 + 4x + 1)(14x + 4)$$
$$=(14x + 4)\cos(7x^2 + 4x + 1)$$

مثال / اذا كانت $f(x) = \sin\sqrt[3]{x}$ جد $f^{/}(x)$

الحل /

$$f(x) = \sin x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \cos x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cos\sqrt[3]{x}$$

مثال / اذا كانت $f(x) = \cos^3 7x$ جد $f^{/}(x)$

$$f^{/}(x) = 3\cos2\ 7x\,(-\sin7x \cdot 7)$$
$$f^{/}(x) = -21\cos2\ 7x \sin 7x$$

==

مثال / اذا كانت $f(x) = \cos 3x - \tan 5x + \sec 4x$ جد $f^{/}(x)$

$$f^{/}(x) = -3\sin 3x - 5\sec^2 5x + 4\sec 4x \tan 4x$$

==

مثال / اذا كانت $f(x) = (\sec 5x)^3$ جد $f^{/}(x)$

الحل /

$$f^{/}(x) = 3(\sec 5x)^2 (\sec 5x \tan 5x)\,5 = 15\sec^3 5x \tan 5x$$

==

اسئلة محلوله

س١ / اذا كانت $y = Sin(5 - x^3)$ جد $y^/$

$y^/ = \cos(5 - x^3)(-3x^2) = -3x^2 \cos(5 - x^3)$

س٢ / اذا كانت $y = \sqrt{\cos(4x+2)}$ جد $y^/$

الحل /

$$y^/ = \frac{-\sin(4x+2)(4)}{2\sqrt{\cos(4x+2)}} = \frac{-2\sin(4x+2)}{\sqrt{\cos(4x+2)}}$$

س٣ / اذا كانت $y = x \, Sec \, x^2$ جد $y^/$

الحل /

$y^/ = x \, Sec \, x^2 \tan x^2 (2x) + \sec x^2 (1) = 2x^2 \, Sec \, x^2 \tan x^2 + \sec x^2$

س٤ / اذا كانت $y = Sin\, 3x \cos 3x$ جد $y^/$

$y^/ = Sin\, 3x(-\sin 3x)(3) + \cos 3x \cos 3x (3) = -3Sin^2 3x + 3\cos^2 3x$

س٥ / اذا كانت $y = \sqrt[3]{\cot^2 4x}$ جد $y^/$

الحل /

$$y = (\cot^2 4x)^{\frac{1}{3}} = (\cot 4x)^{\frac{2}{3}}$$

$$y^/ = \frac{2}{3}(\cot 4x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc 4x)(4) = \frac{-8\csc 4x}{3\sqrt[3]{\cot 4x}}$$

س٦ / اذا كانت $y = \csc^5(x^2 + 1)$ جد $y^/$

الحل /

$y^/ = 5\csc^4(x^2+1)[-\csc(x^2+1)\cot(x^2+1)](2x)$

$= -10\csc^5(x^2+1)\cot(x^2+1)$

س٧ / أذا كانت $y = (\text{Sin } 3x - \cos 3x)^2$ جد y'

الحل /

$y = \text{Sin}^2 3x - 2 \sin 3x \cos 3x + \cos^2 3x$

$y = \text{Sin}^2 3x + \cos^2 3x - 2 \sin 3x \cos 3x$

$y = 1 - \sin 6x$

$y' = - \cos 6x\,(6) = -6 \cos 6x$

==

س٨/ اثبت صحة $\frac{d}{dx}[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax] = a \cos^3 ax$

الحل /

$$\frac{d}{dx}[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax] = \cos ax \cdot a - \sin^2 ax \cdot \cos ax \cdot a$$
$$= a\cos ax - a\sin^2 ax \cos ax$$
$$= a \cos ax\,(1 - \text{six}^2 ax)$$
$$= a \cos ax \cos^2 ax = a \cos^3 ax$$

==

س٩ / اثبت صحة $\frac{d}{dx}(\frac{2-\cos x}{2+\cos x}) = \frac{4 \sin x}{(2+\cos x)^2}$

الحل

$$L \cdot H = \frac{d}{dx}(\frac{2-\cos x}{2+\cos x}) = \frac{(2+\cos x)(\sin x)-(2-\cos x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$$
$$= \frac{2 \sin x + c \cos x \sin x + 2 \sin x - \cos x \sin x}{(2+\cos x)^2}$$
$$= \frac{4 \sin x}{(2+\cos x)^2}$$

==

س١٠/ اذا كانت $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 8 \sin 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 16 \cos 2x$$

س ١١/ اذا كانت $y = \tan x$ فبرهن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = sec^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec x \cdot \sec x \tan x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\ \sec^2 x \tan x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\ (1+\tan^2 x)\tan x$$

نعوض $y = \tan x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\ (1+y^2)\, y = 2y(1+y^2)$$

==

س ١٢/ اذا كانت $y = x \sin x$ فبرهن ان $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = x\cos x + \sin x\,(1) = x\cos x + \sin x$$

$$\frac{dy^2}{d^2x} = x(-\sin x) + \cos x\,(1) + \cos x$$

$$\frac{dy^2}{d^2x} = -x\sin x + 2\cos x$$

$$\frac{dy^2}{d^2x} = -y + 2\cos x$$

$$\frac{dy^2}{d^2x} + y = 2\cos x$$

$$\frac{dy^3}{d^3x} + y^{/} = -2\sin x$$

$$\frac{dy^4}{d^4x} + y^{//} = -2\cos x$$

$$\frac{dy^4}{d^4x} + 2\cos x - y = -\cos x$$

$$\frac{dy^4}{d^4x} + 2\cos x - y + 2\cos x = 0$$

$$\frac{dy^4}{d^4x} + 4\cos x - y = 0$$

س١٣/ اذا كانت $y = \sin 4x \tan 2x$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin 4x \cdot \sec^2 2x + 4\tan 2x \cos 4x$$

==

س١٤/ اذا كانت $y = \tan(\cos x)$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\cos x)(-\sin x) = -\sin x \sec^2(\cos x)$$

==

واجبات

س١/ جد المشتقة للدوال التالية :

a) $f(x) = \sin^3 2x \ \tan x^2$

b) $f(x) = 4x^3 \cot 4x$

c) $f(x) = (2x \sin 5x)^3$

d) $f(x) = (2x \sec 5x)^3$

e) $f(x) = \cos 3x \csc x^3$

g) $f(x) = \frac{x-\cos 3x}{x+\sin 3x}$

k) $f(x) = \sin\left(\frac{x-3}{x+4}\right)$

n) $f(x) = \frac{1+\tan^3(3x^2-4)}{x^2 \sin x}$

m) $f(x) = \sqrt{\sin x + \tan x}$

==

س٢/ اذا كان $y = \frac{a\sin x}{a+b\cos x}$ اثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos x+b}{(a+b\cos x)^2}$

س٣/ اذا كان $y = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ اثبت ان $\frac{dy}{dx} = 2\tan x \sec^2 x$

س٤/ اذا كان $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ اثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cos x}$

الاشتقاق الضمني

اذا كانت y دالة بدلالة x فعند اشتقاق معادلة تحوي على x و (y) بالنسبة (x) نضيف بعد كل مشتقة y أما $\frac{dy}{dx}$ أو $y/$

==

س ١ /اذا كان $x^2 - y^2 = 7y - x$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 7\frac{dy}{dx} - 1$$

$$7\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 2x + 1$$

$$\frac{dy}{dx}(7 + 2y) = 2x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{7+2y}$$

==

س ٢ /اذا كان $x^2 + y^2 = 10$ اثبت ان $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$$

==

س٣/اذا كان $xy^2 - 4x^2 = 7x - 2y$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$$x \cdot 2y\frac{dy}{dx} + y^2(1) - 8x = 7 - 2\frac{dy}{dx}$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 - 8x = 7 - 2\frac{dy}{dx}$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} = 7 - y^2 + 8x$$

$$(2xy + 2)\frac{dy}{dx} = 7 - y^2 + 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7-y^2+8x}{2xy+2}$$

س٤/ اذا علمت بأن $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن على ان $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

الحل /

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 + 1 = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 0 = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

==

س٥/ اذا كانت $y \neq 0\ ,\ x \neq 2$ $\quad 2xy - 4y + 5 = 0$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل /

$$y(2x - 4) + 5 = 0 \qquad\qquad y(2x - 4) = -5$$

$$y = \frac{-5}{2x-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(-5)(2)}{(2x-4)^2} = \frac{10}{(2x-4)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-10[2(2x-4)(2)]}{(2x-4)^4} = \frac{-40(2x-4)}{(2x-4)^4} = \frac{-40}{(2x-4)^3}$$

==

س٦/اذا كانت $x^3 y^2 - 2y = 5x + 3$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$$x^3\, 2y\frac{dy}{dx} + y^2\, (3x^2) - 2\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx}(2x^3y - 2) = 5 - 3y^2x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5-3y^2x^2}{2x^3y-2}$$

مثال٧ / اذا كانت $\text{Sin } xy^2 = 4x - 3y$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل/

$$\cos xy^2 \left(1 \cdot y^2 + x\left(2y\frac{dy}{dx}\right)\right) = 4 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$y^2 \cos xy^2 + 2xy \cos xy^2 \frac{dy}{dx} = 4 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$2xy \cos xy^2 \frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = 4 - y^2 cosxy^2$$

$$(2xy \cos xy^2 + 3)\frac{dy}{dx} = 4 - y^2 cosxy^2$$

$$\frac{dy}{\text{dx}} = \frac{4 - y^2 cosxy^2}{2xy \cos xy^2 + 3}$$

==

مثال٨ / اذا كانت $x^2y + xy^2 = 16$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$x^2\frac{\text{dy}}{\text{dx}} + 2xy + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$x^2\frac{\text{dy}}{\text{dx}} + 2xy\frac{dy}{dx} = -2xy - y^2$$

$$(x^2 + 2xy)\frac{dy}{dx} = -2xy - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - y^2}{x^2 + 2xy}$$

==

مثال /٩ اذا كانت $x^4 + \sin y = x^3y$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$4x^3 + cosy\frac{dy}{dx} = x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y$$

$$cosy\frac{dy}{dx} - x^3\frac{dy}{dx} = 3x^2y - 4x^3$$

$$\frac{\text{dy}}{\text{dx}} = \frac{3x^2y - 4x^3}{\cos y - x^3}$$

مثال ١٠/ اذا كانت $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$x^2(x^2 - 2xy + y^2) = x^2 - y^2$$

$$x^4 - 2x^3y + y^2 = x^2 - y^2$$

$$4x^3 - 2x^3\frac{dy}{dx} - 6x^2y + 2y\frac{dy}{dx} = 2x - 2y\frac{dy}{dx}$$

$$2x^3\frac{dy}{dx} + 4y\frac{dy}{dx} = 2x - 4x^3 + 6x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4x^3 + 6x^2y}{2x^3 + 4y}$$

==

مثال ١١/ اذا كانت $x^3 + y^3 = 16$ جد قيمة $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند النقطة $(2,2)$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y^2\frac{dy}{dx} = -x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^2y^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2xy^{-2} + 2x^2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x}{y^2} + \frac{2x^2}{y^3}\cdot\frac{-x^2}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4}{4} + \frac{8}{8}\cdot\frac{-4}{4} = -1 - 1 = -2$$

==

تمارين

اوجد المشتقة الاولى للدوال التالية :

1) $\sqrt{yx^2 + xy^2} = 0$ 2) $xy - x^3 + y^2 = 4$

3) $\frac{\sin x}{\cos y} = \sin(x - y)$ 4) $y = \sin x \cos y + 6$

5) $\sin(y^2 + x^2) = 2x$

المعدلات المرتبطة بالزمن : وهي عبارة عن تطبيقات على الدالة الضمنية والتي يكون فيها الاشتقاق بالنسبة للزمن t .

لحل هذه التطبيقات نتبع الخطوات التالية :-

١ـ نرسم مخطط توضيحي للسؤال ونعين المعلومات المعطاة في السؤال والمعلومات المطلوبة

٢ـ نكتب الدالة العلاقة التي سنستخدمها في حل السؤال .

٣ـ نشتق الدالة او العلاقة بالنسبة للزمن $\frac{d}{dt}$

٤ـ نعوض عن المعلومات للحصول على المجهول .

٥ـ لا نعوض المعلومات الا بعد الاشتقاق .

بعض العلاقات التي نحتاجها في حل السؤال وهي

١ـ مبرهنة فيثاغورس

٢ـ تشابه المثلثين

٣ـ معادلة الدائرة أو منحنى

==

بعض القوانين التي نحتاج اليها في حل المسائل .

١ـ مساحة المثلث = نصف القاعدة في الارتفاع

٢ـ محيط المثلث = مجموع اطوال اضلاعه الثلاثة .

٣ـ مساحة المربع = مربع طول الضلع .

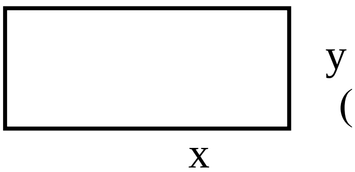
٤ـ محيط المربع = ٤في طول الضلع

$A = x^2$

$p = 4x$

٦ـ مساحة المستطيل = الطول في العرض

٧ـ محيط المستطيل = ٢(الطول + العرض)

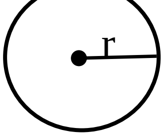


$A = x.\ y$

$p = 2(x + y)$

٨ـ مساحة الدائرة = مربع نصف القطر في النسبة الثابتة

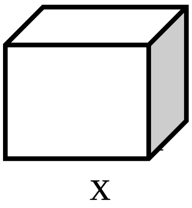
٩ـ محيط الدائرة = ٢ نصف القطر في النسبة الثابتة



$A = \pi r^2$

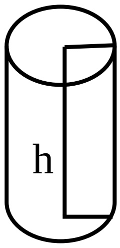
$p = 2\pi r$

١٠- حجم المكعب = (طول الضلع)^{٣}
١١- مساحته الجانبية = ٤(طول الحرف)^{٢}
١٢- مساحته الكلية = ٦(طول الحرف)^{٢}



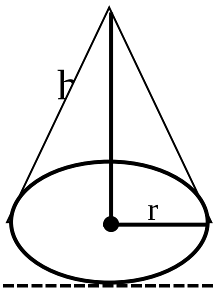
$V = x^3$
$L.A = 4x^2$
$T.A = 6x^2$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة في الارتفاع
المساحة الجانبية = محيط القاعدة في الارتفاع
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ مساحة القاعدة



$v = \pi r^2 h$
$L.A = 2\pi r h$
$L.A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

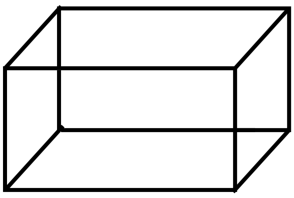
حجم المخروط = مساحة القاعدة في الارتفاع



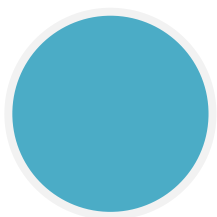
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

حجم متوازي السطوح المستطيلة = مساحة القاعدة في الارتفاع

مساحته الجانبية = محيط القاعدة في الارتفاع
مساحته الكلية = المساحة الجانبية + ٢مساحة القاعدة



الكرة



حجم الكرة = $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

المساحة السطحية للكرة = $A = 4\pi r^2$

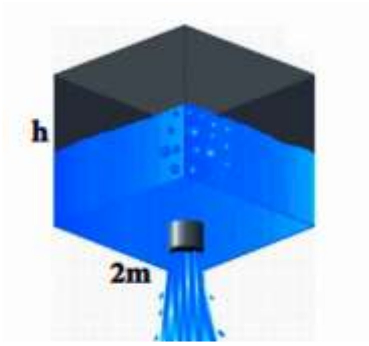
مثال ١/خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها $2m$ يتسرب منه الماء بمعدل $0.4m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t

الحل /

نفرض حجم الماء في الخزان عند اي زمن t هو V

ونفرض ارتفاع الماء في الخزان عند اي زمن t هو h والمطلوب إيجاد $\frac{dh}{dt}$

معدل التناقص $\frac{dV}{dt} = -0.4$



الارتفاع × مساحة القاعدة = حجم الماء

$$V = (2)^2 h$$

العلاقة $V = 4h$

نشتق العلاقة $\frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$

نعوض عن قيمة $\frac{dV}{dt} = -0.4$

$$-0.4 = 4\frac{dh}{dt}$$

معدل تغير انخفاض الماء في الخزان $\frac{dh}{dt} = \frac{-0.4}{4} = -0.1m/h$

==

مثال٢/صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8cm$

الحل /

نفرض طول المستطيل في اية لحظة من الزمن = x

نفرض عرض المستطيل في اية لحظة من الزمن = y

نفرض مساحة المستطيل =A = الطول في العرض

$$A = x.y$$

$$98 = x.y \quad \dots\dots(1)$$

نعوض $y = 8$ في العلاقة(1)

$$98 = x(8) \qquad x = \frac{98}{8} = 12cm$$

نشتق العلاقة (1)

$$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

نعوض

$$0 = 12\frac{dy}{dt} + 8(2)$$

$$12\frac{dy}{dt} = -16 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}cm/s$$

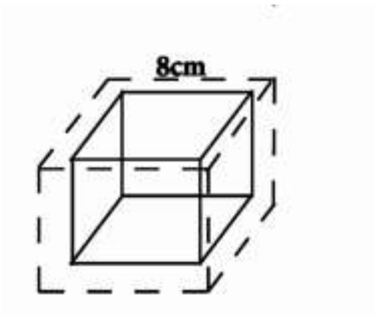
مثال٣/مكعب صلد طول حرفه $8cm$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعبا ، فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك $1cm$

الحل /

نفرض سمك الجليد في اية لحظة $= x$ والمطلوب حساب $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 1$

حجم الجليد = حجم المكعب المغطى بالجليد – حجم المكعب الاصلي

$$V = (8+2x)^3 - 8^3$$



$$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2\left(2\frac{dx}{dt}\right) - 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -6 \quad , \ x = 1 \text{ نعوض}$$

$$-6 = 6(8+2)^2\frac{dx}{dt}$$

$$-1 = 100\frac{dx}{dt} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{100} = -0.01cm/s$$

معدل نقصان سمك الجليد $0.01cm/s$

مثال٦/لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن نقطة $(7,0)$ يساوي $0.2unit/s$ جد معدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x = 4$

الحل/ لتكن $M(x,y)$ ولتكن $N(7,0)$ ولتكن المسافة MN تساوي S

$$S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 10x + 49}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

نعوض عن $x = 4$ وعن $\frac{ds}{dt} = 0.2$

$$0.2 = \frac{8-10}{2\sqrt{16-40+49}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{-2}{2\sqrt{25}}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{-2}{10}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0.2\times10}{-2} = -1\ unit/s$$

مثال٤/سلم طوله $10m$ يستند طرفه الاسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2m/s$ عندما يكون الطرف الاسفل على بعد $8m$ عن الحائط جد :

١ ـ معدل انزلاق الطرف العلوي .

٢ ـ سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض .

الحل / عند اية لحظة من الزمن t نفرض كل من

بعد الطرف السفلي عن القاعدة الحائط = x

بعد الطرف العلوي عن الأرض = y

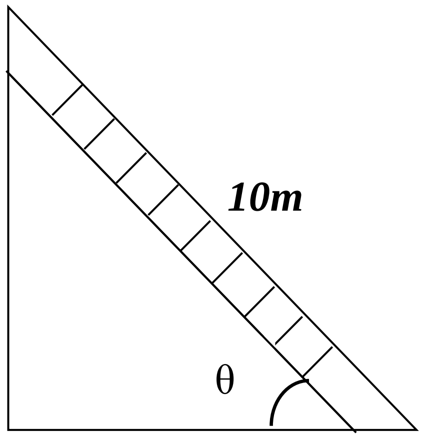
الزاوية بين السلم و الأرض = θ

$x^2 + y^2 = 100 \quad .....(1)$ تطبيق مبرهنة فيثاغورس

نعوض $x = 8$ **في العلاقة (1)**

$64 + y^2 = 100$

$y^2 = 100 - 64 = 36 \implies y = 6m$



نشتق العلاقة (1)

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

نعوض عن كل من $x = 8\,,\ y = 6\ ,\ \frac{dx}{dt} = 2$

$2(8)(2) + 2(6)\frac{dy}{dt} = 0 \qquad 12\,\frac{dy}{dt} = -32$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-32}{12} = \frac{-8}{3}$ معدل انزلاق الطرف العلوي $\frac{8}{3}m/s$

$sin\theta = \frac{y}{10} \ ......(2)$

نشتق العلاقة (2)

$cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\cdot\frac{dy}{dt}$

$\frac{x}{10}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\cdot\frac{dy}{dt}$ لان $cos\theta = \frac{x}{10}$

نعوض عن كل من $x = 8\ ,\ \frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}$

$\frac{8}{10}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\cdot\frac{-8}{3}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3}$ بضرب الطرفين في $\frac{10}{8}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3}\ red/s$ سرعة تغير الزاوية

مثال٥/مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل ، ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5cm^2/s$ بينما يتسرب منه السائل $1cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12cm .

الحل /

نفرض حجم السائل داخل المخروط في آية لحظة = V

نفرض ارتفاع السائل داخل المخروط في آية لحظة = h

نفرض نص القطر السائل داخل المخروط في آية لحظة = r

في الشكل المجاور من استعمال tan θ أو من تشابه المثلثين نحصل على

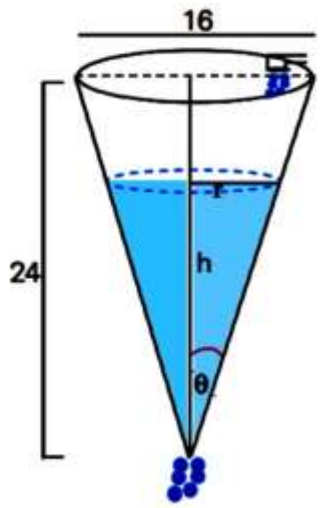
$$\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} \qquad \frac{r}{h} = \frac{1}{3} \qquad r = \frac{1}{3}h \;\ldots.(1)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots\ldots(2)$$

نعوض (1) في (2)

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3$$

نشتق



$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{27}\pi(3h^2)\frac{dh}{dt}$$

$$4 = \frac{1}{9}\pi(12^2)\frac{dh}{dt}$$

$$4 = \frac{1}{9}\pi(144)\frac{dh}{dt}$$

$$4 = 16\pi\frac{dh}{dt} \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{4}{16\pi} = \frac{1}{4\pi}\,cm/s$$

س١/سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2m/s$ فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

الحل /

الحل / عند اية لحظة من الزمن t نفرض كل من

بعد الطرف السفلي عن القاعدة الحائط = x

بعد الطرف العلوي عن الارض = y

طول السلم = L عدد ثابت

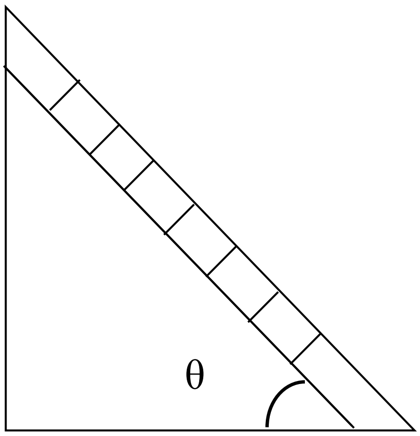
$x^2 + y^2 = L^2 \quad .....(1)$ تطبيق مبرهنة فيثاغورس

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$tan\theta = \frac{y}{x} \qquad tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \qquad \sqrt{3} = \frac{y}{x}$

$\frac{dx}{dt} = 2$ وعن $y = \sqrt{3}\,x$ نعوض قيمة

$2x(2) + 2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt} = 0$



y الحائط

x

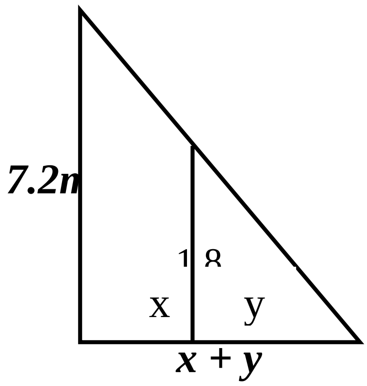
$2x(2 + \sqrt{3}\frac{dy}{dt}) = 0$

$x = 0$ تهمل

$2 + \sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 0 \Longrightarrow \sqrt{3}\,\frac{dy}{dt} = -2$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}m/s$ معدل انزلاق الطرف العلوي

س٢/ عمود طوله $7.2m$ في نهايته مصباح ، يتحرك رجل طوله $1.8m$ مبتعدا عن العمود وبسرعة $30m/min$ ، جد معدل تغير طول ظل الرجل .



الحل // نفرض بعد الرجل عن العمود = x

نفرض طول ظل الرجل = y

من تشابه المثلثين نحصل على

$\frac{1.8}{7.2} = \frac{y}{x+y} \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$

$4y = x + y \Longrightarrow 3y = x$

نشتق العلاقة

$3\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow 3\frac{dy}{dt} = 30$

$\frac{dy}{dt} = 10m/min$

س٣/ لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد احداثيي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M

الحل/ لتكن $M(x, y)$ ولتكن $N\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ولتكن المسافة MN تساوي S

$$S = \sqrt{(x-0)^2 + (y-\tfrac{3}{2})^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

$$S = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

عوضنا عن $y = x^2$

$$S = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y\frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$$

نعوض عن $x = 4$ وعن $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{2}{3}\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}(y-1)}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{y-1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \Longrightarrow 3(y-1) = 2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

بتربيع الطرفين

$$9y^2 - 18y + 9 = 4\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)$$

$$9y^2 - 6y + 9 = 4y^2 - 8y + 9$$

$$5y^2 - 10y = 0$$

$$5y(y-2) = 0$$

$y = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ تهمل

$y = 2 \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \mp\sqrt{2} \Longrightarrow (\mp\sqrt{2}, 2)$

س٤/جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t .

الحل /

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108 \quad \dots\dots\dots(1)$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 8\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$
$$2x\frac{dy}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt} - 8\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt}(2x + 2y + 4 - 8) = 0$$
$$\frac{dy}{dt} \neq 0 \Longrightarrow (2x + 2y + 4 - 8) = 0$$
$$x + y - 2 = 0 \Longrightarrow y = 2 - x \quad \dots\dots(2)$$

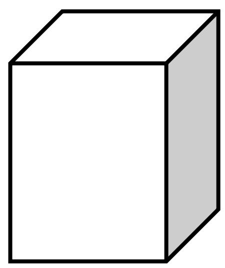
نعوض العلاقة 2 في معادلة الدائرة (1)

$$x^2 + (2 - x)^2 + 4x - 8(2 - x) = 108$$
$$x^2 + 4 - 4x + x^2 + 4x - 16 + 8x = 108$$
$$2x^2 + 8x + 12 = 108$$
$$2x^2 + 8x - 120 = 0$$
$$x^2 + 4x - 60 = 0$$
$$(x + 10)(x - 6) = 0$$
$$x = -10 \Longrightarrow y = 2 + 10 = 12$$
$$x = 6 \Longrightarrow y = 2 - 6 = -4$$

النقطتان هما : $(-10\,,12)\,,\ (6\,,-4)$

س٥/ متوازي سطوح مستطيلة أبعادها تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل ،يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3cm/s$ ، وارتفاع يتناقص بمعدل $0.5cm/s$ جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $4cm$ و الارتفاع $3cm$

الحل /



$\frac{dx}{dt} = 0.3$ نفرض طول القاعدة $x =$

$\frac{dy}{dt} = 0.5$ نفرض الارتفاع $y =$

نفرض الحجم $V=$

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = x^2.y$$
$$\frac{dv}{dt} = x^2\frac{dy}{dt} + 2yx\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dv}{dt} = (4)^2(-0.5) + 2(3)(4)(0.3)$$
$$\frac{dv}{dt} = 16(-0.5) + 24(0.3) = -8 + 7.2 = -0.8\ cm^3/s$$

س١/ اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5\ cm/s$ بحيث يظل حجمها دائما مساويا $320\pi\ cm^3$ جد معدل تغير قطر قاعدتها عندما يكون ارتفاعها $5cm$.
الحل/

س٢/جد نقطة او اكثر تنتمي للدائرة $x^2 + y^2 - 4x = 4$ عندها يكون المعدل الزمن مساويا الى معدل تغير y بالنسبة للزمن t.

س٣/ طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الاول بسرعة $80km/h$ وتسير سيارة على الطريق الاخر بسرعة $60km/h$ جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة .

س٤/ بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه غاز فاذا كان معدل نقصان نصف قطره $\frac{7}{22} cm/s$ بحيث يبقى محافظا على شكله فعندما يكون نصف قطره $10cm$ جد :
١ـ معدل نقصان حجمه ٢ـ معدل نقصان مساحته السطحية .
الحل/

$$v = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\left(\frac{22}{7}\right)(100)\left(-\frac{7}{22}\right) = -400\ cm^3/s$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} = 8\left(\frac{22}{7}\right)(10)\left(-\frac{7}{22}\right) = -80\ cm^2/s$$

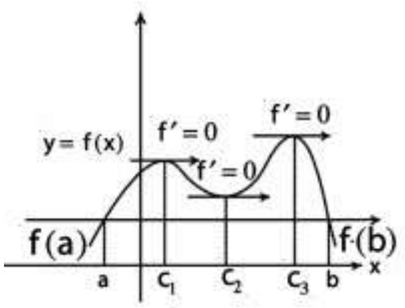
مبرهنتا رول والقيمة الوسطة

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة عند العدد c يقال عن c بأنه عدد حرج اذا كان $f^{/}(c) = 0$
او ان الدالة غير قابلة للاشتقاق في c وتسمى النقطة $(c, f(c))$ بالنقطة الحرجة

مبرهنة رول

تتحقق مبرهنة رول اذا تحقق الشروط التالية :
١- اذا كانت الدالة f(x) مستمرة في الفترة المغلقة [a,b]
٢- اذا كانت الدالة f(x) قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b)
٣- $f(b) = f(a)$

فانه يوجد على الأقل قيمة واحده C تنتمي الى (a,b)
وتحقق $\boldsymbol{f^{/}(x) = 0}$



مثال١ / بين هل ان الدالة $f(x) = (2-x)^2$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x \in [0,4]$ ثم اوجد قيم c

الحل / ١ - الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0,4]$ لانها كثيرة الحدود

٢ - الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$ لانها كثيرة الحدود

$3)\ \boldsymbol{f(a) = f(0) = (2-0)^2 = 4 \quad , \quad f(b) = f(4) = (2-4)^2 = 4}$

$\therefore\ \boldsymbol{f(0) = f(4)}$

الدالة تحقق مبرهنة رول

$\boldsymbol{f^{/}(x) = 2(2-x)(-1) = -4 + 2x}$

$\boldsymbol{f^{/}(c) = -4 + 2c}$

$\boldsymbol{f^{/}(c) = 0 \Longrightarrow -4 + 2c = 0 \Longrightarrow 2c = 4 \Longrightarrow c = 2 \in (0,4)}$

مثال٢/ بين هل ان الدالة $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x \in [-1, 1]$ ثم اوجد قيم c

الحل /

١ - الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لانها كثيرة الحدود

٢ - الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لانها كثيرة الحدود

$$3)\ f(a) = f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = 5$$

$$f(b) = f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3 = 9 + 3 - 1 = 11$$

$$\therefore\ f(-1) \neq f(1)$$

الدالة لا تحقق مبرهنة رول لان شرط الثالث لم يتحقق

==

مثال٣ / بين هل الدالة $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \in [-1, 2] \\ -1 & x \in [-4, -1) \end{cases}$ **تحقق مبرهنة رول ثم اوجد قيم c**

الحل / مجال الدالة $[-4, 2]$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1} x^2 + 1 = 1 + 1 = 2 = L_1 \\ \lim_{x \to -1} -1 = -1 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore$ الدالة ليست مستمرة لان $L_1 \neq L_2$ في الفترة $[-4, -2]$

$\therefore$ الدالة لا تحقق مبرهنة رول

==

مثال٤ / بين هل ان الدالة $f(x) = k$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x \in [a, b]$ ثم اوجد قيم c

الحل /

١ - الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 4]$ لانها دالة ثابتة

٢ - الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 4)$ لانها دالة ثابتة

$$3)\ f(a) = f(b) = k$$

الدالة تحقق مبرهنة رول . وان قيمة c يمكن ان تكون اي قيمة ضمن الفترة $[a, b]$

س١/ اوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول للدالة $f(x) = x^3 - 9x \ , \ x \in [-3, 3]$

الحل /

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-3, 3]$ لانها كثيرة الحدود

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-3, 3)$ لانها كثيرة الحدود

$$3)\ f(a) = f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$$
$$f(b) = f(3) = (3)^3 - 9(3)^3 = 27 - 27 = 0$$
$$\therefore\ f(-3) = f(3)$$

الدالة تحقق مبرهنة رول

$$f^{/}(x) = 3x^2 - 9$$
$$f^{/}(c) = 3c^2 - 9$$
$$f^{/}(c) = 0 \Longrightarrow 3c^2 - 9 = 0$$
$$3c^2 = 9 \Longrightarrow c^2 = 3 \Longrightarrow c = \mp\sqrt{3} \in (-3, 3)$$

==

س٢/ اوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول للدالة $f(x) = 2x + \frac{2}{x} \ , \ x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

الحل /

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ لان $0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ لان $0 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$$3)\ f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$$
$$f(b) = f(2) = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$$
$$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$$

الدالة تحقق مبرهنة رول

$$f(x) = 2x + 2x^{-1} \Longrightarrow f^{/}(x) = 3 - 2x^{-2}$$
$$f^{/}(c) = 2 - 2c^{-2} = 3 - \frac{2}{c^2}$$
$$f^{/}(c) = 0 \Longrightarrow 3 - \frac{2}{c^2} = 0$$
$$\frac{3c^2 - 2}{c^2} = 0 \Longrightarrow 2c^2 - 2 = 0 \Longrightarrow c^2 - 1 = 0$$
$$(c-1)(c+1) = 0 \qquad c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \qquad or \quad c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

س٣/ اوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول للدالة $f(x) = (x^2 - 3)^2 \ , \ x \in [-1, 1]$

الحل /

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لانها كثيرة الحدود

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لانها كثيرة الحدود

$$3) \ f(a) = f(-1) = (1-3)^2 = 4 \quad , \quad f(b) = f(1) = (1-3)^2 = 4$$

$$\therefore \ f(-1) = f(1)$$

الدالة تحقق مبرهنة رول

$$f^/(x) = 2(x^2 - 3)(2x) = 4x(x^2 - 3)$$

$$f^/(c) = 4c(c^2 - 3)$$

$$f^/(c) = 0 \implies -4c(c^2 - 3) = 0$$

$$4c = 0 \implies c = 0 \in (-1, 1)$$

$$c^2 = 3 \qquad c = \mp\sqrt{3} \notin (-1, 1)$$

س٤/ بين ان الدالة $f(x) = cos2x + 2cos\ x$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[0, 2\pi]$

ثم جد قيمة C

الحل / مجال الدالة هو R

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 2\pi]$

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 2\pi)$

$$3) \ f(a) = f(0) = COS\ 0 + 2COS\ 0 = 1 + 2(1) = 3$$

$$f(b) = f(2\pi) = cos2(2\pi) + 2cos2\pi = cos4\pi + cos2\pi = 1 + 2 = 3$$

الدالة تحقق مبرهنة رول لان $f(0) = f(2\pi)$

$$f^/(x) = -2sin\ 2x - 2sinx$$

$$f^/(c) = -2sin\ 2c - 2sinc$$

$$f^/(c) = 0 \implies -2sin\ 2c - 2sinc = 0$$

$$sin2c + sinc = 0 \qquad 2sinc\ cosc + sinc = 0$$

$$sin\ c\ (2cos\ c + 1) = 0$$

$$sin\ c = 0 \qquad c = 0, \pi, 2\pi \qquad c = \pi \in (0, 2\pi)$$

$$2cos\ c + 1 = 0 \qquad cos\ c = -\frac{1}{2}$$

يكون $cos\ c$ سالب في الربع الثاني والثالث

$$c = \tau - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi) \qquad or \qquad c = \tau + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)$$

س٥/ بين ان الدالة $f(x) = sin2x + 2sin\ x$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[0, 2\pi]$
ثم جد قيمة C

الحل/ مجال الدالة هو R

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 2\pi]$

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 2\pi)$

$3)\ f(a) = f(0) = Sin\ 0 + 2Sin\ 0 = 0 + 0 = 0$

$f(b) = f(2\pi) = sin2(2\pi) + 2sin2\pi = 0 + 0 = 0$

الدالة تحقق مبرهنة رول لان $f(0) = f(2\pi)$

$f^{/}(x) = 2cos\ 2x + 2cosx$

$f^{/}(c) = 2cos\ 2c + 2cosc$

$f^{/}(c) = 0 \implies 2cos\ 2c + 2cosc = 0$

$cos2c + cosc = 0 \qquad 2cos^2c - 1 + cosc = 0$

$2cos^2c + cos\ c - 1 = 0$

$(2cos\ c - 1)(cos\ c + 1) = 0$

$cos\ c = \frac{1}{2} \qquad c = \frac{\pi}{3} or \frac{5\pi}{6} \in (0, 2\pi)$

$cos\ c = -1 \qquad c = \pi \in (0, 2\pi)$

س٦/ بين ان الدالة $f(x) = 2sin2x + cos4x$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[0, 2\pi]$
ثم جد قيمة C

الحل/ مجال الدالة هو R

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0, 2\pi]$

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 2\pi)$

$3)\ f(a) = f(0) = 2Sin\ 0 + cos\ 0 = 0 + 1 = 1$

$f(b) = f(2\pi) = 2sin2(2\pi) + cos4(2\pi) = 0 + 1 = 1$

الدالة تحقق مبرهنة رول لان $f(0) = f(2\pi)$

$f^{/}(x) = 4cos\ 2x - 4sin\ 4x$

$f^{/}(c) = 4cos\ 2c - 4sin\ 4c$

$f^{/}(c) = 0 \implies 4cos\ 2c - 4sin\ 4c = 0$

س١/ بين ان الدالة $f(x) = 2cos^2x + 2cos\ x - 3$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[0, 2\pi]$ ثم جد قيمة C

س٢/هل الدالة $f(x) = \sqrt{1 - cos\ x}$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[o, \pi]$ ثم جد قيمة C

س٣/ بين هل الدالة $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x \in [1,5] \\ x^2 - 2 & x \in [-3,1) \end{cases}$

تحقق مبرهنة رول ثم اوجد قيم c

س٤/ اذا كانت الدالة $f(x) = cos2x + 2cos\ x$ تحق قشروط مبرهنة رول على الفترة $[a, \pi]$ جد قيمة a

س٥/هل الدالة $f(x) = \frac{x^2-4x}{x+2}$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[o, 4]$ ثم جد قيمة C

مبرهنة القيمة المتوسطة

اذا كانت f(x) دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a, b]$ و قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) فانه يوجد على الاقل قيمة واحدة c تنتمي للفترة (a, b) وتحقق

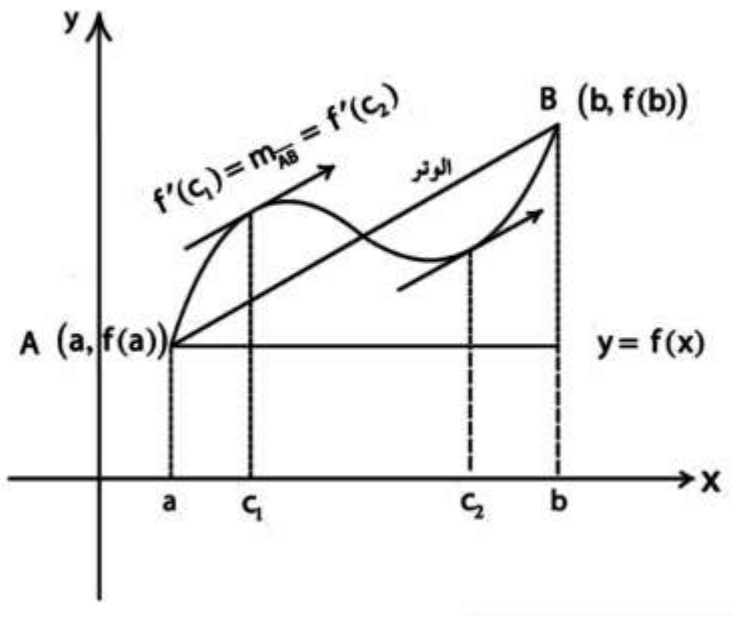
$$f^{/}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad or \quad f(b) - f(a) = f^{/}(c)(b - a)$$

ملاحظة / ١ ـ ميل المماس = المشتقة الاولى للدالة اي $f^{/}(c)$

٢ ـ تسمى العلاقة $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ميل الوتر

والمخطط التالي يعطي التفسير الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة:

المماس يوازي الوتر $\overline{AB}$



ميل الوتر المار بالنقطتين A, B يساوي $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ميل المماس للمنحني عند c = المشتقة الاولى للدالة عند c $\left(f^{/}(x)\right)$

لكن المماس والوتر متوازيان لذا ميلاهما $f^{/}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

مثال١/ برهن ان الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 4$ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[-1, 7]$ واوجد قيم c

الحل /

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 7]$ لانها كثيرة الحدود

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 7)$ لانها كثيرة الحدود

$f^{/}(x) = 2x - 6$ $\quad\quad$ $f^{/}(c) = 2c - 6$ **ميل المماس**

$f(b) = f(7) = (7)^2 - 6(7) + 4 = 49 - 42 + 4 = 11$

$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 4 = 1 + 6 + 4 = 11$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(7)-f(-1)}{7+1} = \frac{11-11}{8} = 0$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 6 = 0$ $\quad\quad$ $2c = 6$ $\quad\quad$ $c = 3 \in (-1, 7)$

==

مثال١/ برهن ان الدالة $f(x) = x^3 - x - 1$ تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[-1, 2]$ واوجد قيم c

الحل /

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$ لانها كثيرة الحدود

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 2)$ لانها كثيرة الحدود

$f^{/}(x) = 3x^2 - 1$ $\quad\quad$ $f^{/}(c) = 3c^2 - 1$ **ميل المماس**

$f(b) = f(2) = (2)^3 - (2) - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$

$f(a) = f(-1) = (-1)^3 - (-1) - 1 = -1 + 1 - 1 = -1$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \frac{5+1}{3} = 2$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$3c^2 - 1 = 2$ $\quad\quad$ $3c^2 = 3$

$c^2 = 1$ $\quad\quad$ $c = 1 \in (-1, 2)$ $\quad$ *or* $\quad$ $c = -1 \notin (-1, 2)$

مثال١/ برهن ان الدالة $x \in [-4,0]$ $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ***تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم*** c

الحل/ مجال الدالة

$25 - x^2 \geq 0 \qquad x^2 \leq 25 \qquad -5 \leq x \leq 5$

الفترة $[-4,0]$ ***جزء من مجال الدالة***

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0,4]$ ***لانها جزء من المجال***

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$ ***لانها جزء من المجال***

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \qquad f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$ ***ميل المماس***

$f(a) = f(-4) = \sqrt{25-(-4)^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$

$f(b) = f(0) = \sqrt{25-0^2} = \sqrt{25} = 5$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(-4)-f(0)}{0+4} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{25-c^2} = -2c$

$25 - c^2 = 4c^2 \qquad 5c^2 = 25 \qquad c^2 = 5$

$c = \sqrt{5} \notin (-4,0) \qquad or \qquad c = -\sqrt{5} \in (-4,0)$

===

مثال٢/ اذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$, $f:[0,b] \longrightarrow R$ ***وكانت*** f ***تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند*** $c = \frac{2}{3}$ ***فجد قيمة*** b

الحل/

$f'(x) = 3x^2 - 8x \qquad f'(c) = 3c^2 - 8c$

$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right) \qquad f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-12}{3} = -4$ ***ميل المماس***

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(0)}{b-0} = \frac{b^3-4b^2}{b} = b^2 - 4b$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر $\qquad b^2 - 4b = -4$

$b^2 - 4b + 4 = 0$

$(b-2)^2 = 0 \qquad b - 2 = 0 \qquad b = 2$

مثال٣/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة المتوسطة للدالة $h(x) = x^2 - 4x + 5$
على الفترة $[-1, 5]$ ***وان تحققت المبرهنة ، جد قيم*** c ***الممكنة***
الحل /

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 5]$ ***لانها كثيرة الحدود***

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 5)$ ***لانها كثيرة الحدود***

$f'(x) = 2x - 4$ ***ميل المماس*** $f'(c) = 2c - 4$

$f(b) = f(5) = (5)^2 - 4(5) + 5 = 25 - 20 + 5 = 10$

$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 1 + 4 + 5 = 10$

ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-1)}{5+1} = \frac{10-10}{6} = 0$

ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 4 = 0 \qquad 2c = 4 \qquad c = 2 \in (-1, 5)$

===

مثال٤/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة المتوسطة للدالة $h(x) = \frac{4}{x+2}$
على الفترة $[-1, 2]$ ***وان تحققت المبرهنة ، جد قيم*** c ***الممكنة***
الحل /

١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1, 2]$ ***لان*** $-2 \notin [-1, 5]$

٢ ـ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 5)$ ***لان*** $-2 \notin (-1, 5)$

$f'(x) = \frac{-4}{(x+2)^2}$ ***ميل المماس*** $f'(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$

$f(b) = f(2) = \frac{4}{2+2} = 1$

$f(a) = f(-1) = \frac{4}{-1+2} = 4$

ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \frac{1-4}{3} = -1$

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{-4}{(c+2)^2} = -1 \qquad (c+2)^2 = 4 \qquad c + 2 = \mp 2$

$c = 2 - 2 = 0 \in (-1, 2) \qquad or \qquad c = -2 - 2 = -4 \notin (-1, 2)$

مثال٥/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة المتوسطة للدالة $h(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$
على الفترة $[-2,7]$ **وان تحققت المبرهنة ، جد قيم** c **الممكنة**

الحل / مجال الدالة R

الفترة $[-2,7]$ **جزء من مجال الدالة**
١ ـ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2,7]$ **لانها جزء من المجال**

٢ ـ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = -1$ **لان** $-1 \in (-2,7)$

لا يمكن تطبيق مبرهنة القيمة المتوسط لان الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = -1$

===

واجب

س١/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = cos^3x - sin^3\,x$
على الفترة $[0, 2\pi]$ **وان تحققت جد قيمة** C

س٢/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = cos2x - 2cos^2\,x$
على الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ **وان تحققت جد قيمة** C

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

اذا كانت f(x) دالة مستمرة ومعرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) فانه $b = a + h$ حيث $h \in R$ وحسب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على

$$f'(c) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f(a+h) = f(a) + hf'(c)$$

ملاحظة / عندما يكون اقتراب b من a قربا كافيا في هذه الحالة يكون h صغيرة ويصبح الوتر صغيرا ونهايتيه قريبتان من a أي ان المماس عند C سيكون مماسا للمنحني عند نقطة قريبة جدا من النقطة حيث $x = a$ ولذلك يصبح

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

يستخدم القانون $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ للتقريب
ويسمى المقدار $hf'(a)$ التغير التقريبي للدالة

مثال / جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريبا مناسبا للعدد $\sqrt{26}$

الحل /

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

اقرب مربع كامل للعدد 26 هو 25 لذلك نفرض $a = 25$

$b = 26 \quad , \quad a = 25 \qquad\qquad h = b - a = 26 - 26 = 1$

مشتقة الدالة $f^{/}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f^{/}(a) = f^{/}(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$f(a+h) = f(a) + hf^{/}(a)$$

$$\sqrt{26} = f(25+1) \cong f(25)1f^{/}(25)$$

$$\sqrt{26} \approx 5 + 0.1 \qquad\qquad \sqrt{26} = 5.1$$

مثال/٢/اذا كان $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

الحل /

$$f(1) = 1^3 + 3(1)^2 + 4(1) + 5 = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$$

$$f^{/}(x) = 3x^2 + 6x + 4$$

$$f^{/}(1) = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 3 + 6 + 4 = 13$$

$$\boxed{\begin{array}{c} b = 1.001 \\ a = 1 \\ \hline h = b - a = 0.001 \end{array}}$$

$$f(a+h) = f(a) + hf^{/}(a)$$

$$f(1.001) = f(1) + (0.001)f^{/}(1)$$

$$= 13 + (0.001)(13) = 13.013$$

مثال/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقربا لثلاث مراتب عشرية

$\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

الحل /

$a = 1 \quad , \ b = 0.98 \qquad h = b - a = -0.02$

$f(x) = x^{\frac{3}{5}} + x^4 + 3$ الدالة

$f^{/}(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + 4x^3$

$f(a) = f(1) = 1 + 1 + 3 = 5$

$f^{/}(a) = f^{/}(1) = \frac{3}{5}(1)^{-\frac{2}{5}} + 4(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$

نعوض بالقانون

$\boldsymbol{f(a+h) = f(a) + hf^{/}(a)}$

$\boldsymbol{f(0.98) = f(1) + (-0.02)f^{/}(1)}$

$= 5 - 0.02 = 4.908$

$\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3 \cong 4.908$

مثال/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقربا لثلاث مراتب عشرية $\sqrt[3]{7.8}$

الحل /

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ الدالة

$a = 8 \quad , \ b = 7.8 \quad , \ h = b - a = -0.2$

$f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$f^{/}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f^{/}(a) = f^{/}(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$

نعوض بالقانون

$\boldsymbol{f(a+h) = f(a) + hf^{/}(a)}$

$\boldsymbol{f(7.8) = f(8) + (-0.2)f^{/}(8)}$

$= 2 - (0.2)(0.083) = 2 - 0.0166 = 1.9834$

$\sqrt[3]{7.8} \cong 1.9834$

مثال/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقربا لثلاث مراتب عشرية $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

الحل /

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}$ الدالة

$a=16 \quad , \quad b=17 \quad , \quad h=b-a=1$

$f(a)=f(16)=\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}=4+2=6$

$f^{/}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$f^{/}(a)=f^{/}(16)=\frac{1}{2\sqrt{16}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{4+1}{32}=\frac{5}{32}=0.156$

نعوض بالقانون

$$\boldsymbol{f(a+h)=f(a)+hf^{/}(a)}$$

$$\boldsymbol{f(17)=f(16)+(1)f^{/}(16)}$$

$$=6+0.156=6.156$$

$$\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}\cong 6.156$$

مثال/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقربا لثلاث مراتب عشرية $\sqrt[3]{0.12}$

الحل /

$f(x)=\sqrt[3]{x} \qquad a=0.125 \qquad b=0.12 \qquad h=b-a=$
0.005

$f(a)=f(0.125)=\sqrt[3]{0.125}=0.5$

$f^{/}(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f^{/}(a)=f^{/}(0.125)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(0.125)^2}}=\frac{1}{3(0.25)}=\frac{1}{0.75}=1.333$

نعوض بالقانون

$$\boldsymbol{f(a+h)=f(a)+hf^{/}(a)}$$

$$\boldsymbol{f(0.12)=f(0.125)+(0.005)f^{/}(0.125)}$$

$$=0.5+(0.005)(1.333)=0.5+0.006665\cong 0493335$$

$$\sqrt[3]{0.12}\cong 0.493335$$

مثال / لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة ؟

الحل

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \qquad a = 8 \qquad b = 8.06 \qquad h = b - a = 0.06$

$f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

$f^/(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f^/(a) = f^/(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{3(2)} = \frac{1}{3}$

$hf^/(a)$

$hf^/(8) \cong (0.06)\left(\frac{1}{3}\right) = 0.02$ التعير التقريبي

==

س٢/a/ جد تقريبا باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

الحل /

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ الدالة

$a = 64 \quad , \quad b = 63 \quad , \quad h = b - a = -1$

$f(a) = f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$

$f^/(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f^/(a) = f^/(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{3+1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} = 0.083$

نعوض بالقانون

$f(a+h) = f(a) + hf^/(a)$

$f(63) = f(64) + (-1)f^/(64)$

$\qquad = 12 - 0.083 = 11.917$

$\sqrt{63} + \sqrt[4]{63} \cong 11.917$

س٢/ جد تقريبا باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $(1.04)^3 + 3(1.04)^4$

الحل /

$f(x) = x^3 + 3x^4$ الدالة

$a = 1 \quad , \quad b = 1.04 \quad , \quad h = b - a = 0.04$

$f(a) = f(1) = 1 + 3 = 4$

$f^/(x) = 3x^2 + 12x^3$

$f^/(a) = f^/(1) = 3(1)^2 + 12(1)^3 = 3 + 12 = 15$

نعوض بالقانون

$$f(a+h) = f(a) + hf^/(a)$$

$$f(63) = f(1) + (0.04)f^/(1)$$

$$= 4 + 0.04(15) = 4 + 0.60 = 4.6$$

$$(1.04)^3 + 3(1.04)^4 \cong 4.6$$

==

س٢/ جد تقريبا باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

الحل /

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \qquad a = 8 \quad , \quad b = 9 \quad , \quad h = b - a = 1$

$f(a) = f(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

$f^l(x) = -\frac{1}{3\sqrt{x^4}} \qquad \Longrightarrow \qquad f^l(a) = f^/(8) = -\frac{1}{3\sqrt{8^4}} = -\frac{1}{3(16)} = -\frac{1}{48}$

نعوض بالقانون

$$f(a+h) = f(a) + hf^/(a)$$

$$f(9) = f(8) + (1)f^/(8)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{48}\right) = \frac{24-1}{48} \cong \frac{23}{48}$$

س٢/ جد تقريبا باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\frac{1}{101}$

الحل /

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad a=100\ ,\quad b=101\quad ,\quad h=b-a=1$$

$$f(a)=f(100)=\frac{1}{100}=0.01$$

$$f^{/}(x)=-\frac{1}{x^2}\quad\Longrightarrow\quad f^{/}(a)=f^{/}(100)=-\frac{1}{(100)^2}=-0.0001$$

نعوض بالقانون

$$f(a+h)=f(a)+hf^{/}(a)$$

$$f(101)=f(100)+(1)f^{/}(100)$$

$$=0.01-0,0001\cong 0.0099$$

س٢/ جد تقريبا باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt{\frac{1}{2}}$

الحل/ $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.5}=\sqrt{0.50}$

$$f(x)=\sqrt{x}\qquad a=0.49\qquad b=0.50\qquad h=b-a=0.01$$

$$f(a)=f(0.49)=\sqrt{0.49}=0.7$$

$$f^{/}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad\Longrightarrow\quad f^{/}(a)=f^{/}(0.49)=\frac{1}{2\sqrt{0.49}}=\frac{1}{2(0.7)}=\frac{1}{1.4}=0.71$$

نعوض بالقانون

$$f(a+h)=f(a)+hf^{/}(a)$$

$$f(0.50)=f(0.49)+(0.01)f^{/}(0.49)$$

$$=0.7+0,01(0.71)=0.7+0.0071\cong 0.7071$$

مثال /يراد طلاء مكعب طول ضلعه $10cm$ فاذ كان سمك الطلاء 0.15 cm اوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل /

$$b = 10.3$$
$$a = 10$$
$$h = b - a = 0.3$$

$v(x) = x^3$ حجم المكعب

$v^/(x) = 3x^2$

$v^/(a) = v^/(10) = 3(10)^2 = 300$

$hv^/(10) \cong (0.3)(300) = 90cm^3$ حجم الطلاء

==

مثال/مكعب طول حرفة $9.98cm$ جد حجمة بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل / ليكن V حجم المكعب الذي طول حرفة x

$$b = 9.98$$
$$a = 10$$
$$h = b - a = -0.02$$

$v(x) = x^3$ حجم المكعب

$x \in [9.98.10]$

$v(10) = (10)^3 = 1000$

$v^/(x) = 3x^2$

$v^/(10) = 3(10)^2 = 300$

$\boldsymbol{v(a+h) = v(a) + hv^/(a)}$

$v(9.98) \cong 1000 + (-0.02)(300) \cong 994cm^3$

==

مثال/٣ كره نصف قطرها $6cm$ طليت بطلاء سمكه $0.1\ cm$ جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل /

$v = \frac{4}{3}\pi r^3$, $a = 6$, $b = 6.1$ $h = 0.1$

$v^/ = 4\pi r^2$

$hv^/(a) =$ حجم الطلاء

$hv^/(a) = 0.1(4\pi(6)^2 = 14.4\pi cm^3$

مثال٤/كره حجمها $84\pi\ cm^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة .

الحل /

$v=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad ,a=6 \quad , \ b=6.1 \quad , \quad h=0.1$

$84\pi=\frac{4}{3}\pi r^3$

$21=\frac{1}{3}r^3$

$r^3=63 \quad \Longrightarrow \quad r=\sqrt[3]{63}$

$f(x)=\sqrt[3]{x} \quad \Longrightarrow \quad a=64 \quad \Longrightarrow \quad b=63 \quad \Longrightarrow \quad h=-1$

$f(a)=f(64)=\sqrt[3]{64}=4$

$f^{/}(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \Longrightarrow \quad f^{/}(a)=f^{/}(64)=\frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{3(16)}=\frac{1}{48}=0.02$

نعوض بالقانون

$f(a+h)=f(a)+hf^{/}(a)$

$f(63)=f(64)+(-1)f^{/}(64)$

$=4-1(0.02)=4-0.02\cong 3.98\ cm$

مثال٥/مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فإذا كان ارتفاعه يساوي $2.98\ cm$ فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة او نتيجتها .

الحل /

الارتفاع = طول قطر القاعدة

$h=2r$

$r=\frac{1}{2}h \qquad$ -------(1)

$v=\frac{\pi}{3}r^2h \quad$ -------(2)

$v=\frac{\pi}{3}(\frac{1}{2}h)^3h \qquad$ **بتعويض () في ()**

$v=\frac{\pi}{12}h^3 \qquad a=3 \ , \ b=2.98 \qquad ,h=b-a=-0.02$

$f(a)=f(3)=\frac{\pi}{12}(3)^3=\frac{9\pi}{4}=2.25\pi$

$v^{/}=\frac{\pi}{4}h^2 \qquad v^{/}=f^{/}(a)=f^{/}(3)=\frac{\pi}{4}(3)^2=\frac{9\pi}{4}=2.25\pi$

نعوض بالقانون

$f(a+h)=f(a)+hf^{/}(a)$

$f(2.98)=f(3)+(-0.02)f^{/}(3)$

$=2,25\pi-0.02(2.25\pi)=2.25-0.005\cong 2.245\ cm^3$

س١/اذا كان $f(x) = \sqrt[3]{2x+6}$ فجد بصورة تقريبية $f(1.02)$

س٢/اذا كان $f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

س٤/اذا كان $f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ فجد بصورة تقريبية $f(1.01)$ باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة

س٥/اذا كان $f(x) = \sqrt{4x+5}$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

س٦/اذا كان $f(x) = \sqrt{3x+1}$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

س٧ / جد باستخدام التفاضلات بصورة تقريبية $\sqrt[3]{26}$

س٨ / جد باستخدام التفاضلات بصورة تقريبية $\sqrt[3]{126}$

س٩ / جد باستخدام التفاضلات بصورة تقريبية $\sqrt[3]{-9}$

س١٠ / جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريبا مناسبا للعدد $\sqrt{143}$

س١١ / جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريبا مناسبا للعدد $\sqrt{99}$

س١٢ / جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريبا مناسبا للعدد $\sqrt{098}$

س١٣ / جد باستخدام التفاضلات بصورة تقريبية $\sqrt[4]{13.86}$

س١٥ / جد باستخدام التفاضلات بصورة تقريبية $\sqrt[3]{25.97}$

س١٦ / جد باستخدام التفاضلات بصورة تقريبية $\sqrt{15^{-1}}$

س١٨ / جد باستخدام التفاضلات بصورة تقريبية $\sqrt[4]{0.008}$

س١/ مربع مساحته $50\ cm^2$ جد طول ضلعه بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

س٢/ مربع مساحته $48\ cm^2$ جد طول ضلعه بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

س٣/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات طول ضلع مربع مساحته $101\ cm^2$

س٤/ باستخدام مفهوم التفاضلات جد حجم كرة طول نصف قطرها $2.99\ cm$ بصورة تقريبية .

س٥/ جد حجم كره طول نصف قطرها $3.001cm$ بصورة تقريبية

باستخدام مفهوم التفاضلات

س٦/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات طول ضلع مربع مساحته $101\ cm^2$

س٧/مكعب حجمه $124cm^3$ جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية طوله ضلعه .

س٨/مخروط دائري قائم ارتفاعه حجمه $210\ cm^3$ فجد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته

اذا كان ارتفاعه $10\ cm$

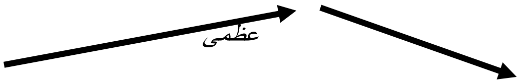
س٩/ كره نصف قطرها $6cm$ طليت بطلاء سمكه $0.1\ cm$ جد حجم الطلاء بصورة تقريبية

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

النقطة الحرجة ومناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى

١- نجد المشتقة الاولى
٢- نجعل المشتقة = صفراً ونجد قيم x
٣- نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة
٤- نضع قيم x على خط الاعداد
٥- نأخذ قيمة اكبر واصغر من x ونعوضها في المشتقة $f'(x)$
٦- اذا كانت اشارة $f'(x)$ الموجبة تمثل مناطق التزايد واذا كانت $f'(x)$ سالبة تمثل مناطق التناقص
٧- اذا كانت الدالة متزايد قبل النقطة الحرجة ومتناقصة بعد النقطة الحرجة فالنقطة نهاية عظمى

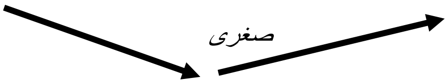
اشارة $f'(x)$ + + + + + a - - - - - -



٨- اذا كانت الدالة متناقصة قبل النقطة الحرجة و متزايد بعد النقطة الحرجة فالنقطة صغرى

- - - - - - a + + + + + + + +

اشارة $f'(x)$



==

مثال ١/ جد النقاط الحرجة ومناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^2$

الحل/ ١- نجد المشتقة

$F'(x) = 2x$

٢- نجعل المشتقة = صفر $2x = 0$ $x = 0$

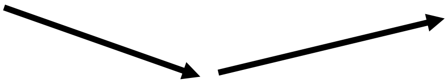
٣- نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة

$f(0) = (0)^2 = 0$

النقطة (0 , 0) نقطة حرجة

٤- نضع قيم x على خط الاعداد

اشارة $f'(x)$ - - - - - -   0   + + + + + + + +



الدالة متزايدة في $\{x : x > 0\}$

الدالة متناقصة في $\{x : x < 0\}$

مثال٢ / جد النقاط الحرجة ومناطق التزايد و التناقص للدالة $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

الحل/ ١ - نجد المشتقة

$$f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$$

٢ - نجعل المشتقة = صفر

$$9 + 6x - 3x^2 = 0$$

$$-3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3 \qquad or \qquad x = -1$$

٣ - نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة

$$f(3) = 27 + 27 - 27 = 27$$

$$f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5$$

النقاط الحرجة هي (3, 27) , (-1 , -5)

٤ - نضع قيم x على خط الاعداد

$$f^{/}(x) \; - - - - - \; ^{-}1 + + + + + + 3 - - - - - -$$

الدالة متناقصة في {x : x > 3 }

الدالة متناقصة في {x : x < -1 }

الدالة متزايدة في (-1 , 3)

مثال٣ / جد النقاط الحرجة ومناطق التزايد و التناقص للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

الحل/ ١ - نجد المشتقة

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

المشتقة غير معرفة اذا كانت x=0 اي x=0 عدد حرج

٤ - نضع قيم x على خط الاعداد

$$f^{/}(x) \; - - - - - \; (0) + + + + + +$$

الدالة متناقصة في $\{x: x < 0\}$

الدالة متزايدة في $\{x: x > 0\}$

مثال / جد النقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت للدالة $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الحل/ ١- نجد المشتقة

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

٢- نجعل المشتقة = صفر $3x^2 - 18x + 24 = 0$

نقسم المعادلة على 3 $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$(x - 4)(x - 2) = 0$$

$$x - 4 = 0 \longrightarrow x = 4$$

$$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$$

٣- نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة

$$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 64 - 144 + 96 = 16$$

$$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 8 - 36 + 48 = 20$$

النقاط الحرجة هي $(2, 20)$, $(4, 16)$

٤- نضع قيم x على خط الاعداد

أشارة $f'(x)$ + + + + 2 - - - - - 4 + + + + + + +

عظمى صغرى

الدالة متزايدة في $\{x : x > 4\}$ و الدالة متزايدة في $\{x : x < 2\}$

الدالة متناقصة في $(2, 4)$

نقطة نهاية صغرى $(4, 16)$ نقطة نهاية عظمى $(2, 20)$

مثال / جد النقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت للدالة $f(x) = 1 + (x - 2)^2$

الحل/ ١- نجد المشتقة

$$f'(x) = 2(x - 2)(1)$$

٢- نجعل المشتقة = صفر $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$

$$f(2) = 1 + (2 - 2)^2 = 1$$

النقاط الحرجة هي $(2, 1)$

أشارة $f'(x)$ - - - - - - 2 + + + +

صغرى

نقطة نهاية صغرى $(2,1)$

مثال / جد النقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت للدالة $f(x) = 1-(x-2)^2$

الحل/ ١ ـ نجد المشتقة

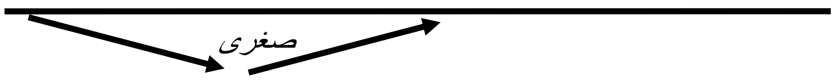
$F'(x) = -2(x-2)(1)$

٢ـ نجعل المشتقة = صفر $x-2 = 0 \qquad x = 2$

$f(2) = 1+(2-2)^2 = 1$

النقاط الحرجة هي $(2, 1)$

أشارة $f'(x)$ $\quad + + + + + \quad 2 - - - - - -$



نقطة نهاية عظمى $(2,1)$

==

مثال / جد النقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت للدالة $f(x) = x^3\,(-4 + x)$

الحل / $f(x) = -4x^3 + x^4$

١ ـ نجد المشتقة

$F'(x) = -12x^2 + 4x^3$

٢ـ نجعل المشتقة = صفر $-12x^2 + 4x^3 = 0$

$4x^2(-3 + x) = 0$

$4x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

$-3 + x = 0 \Longrightarrow x = 3$

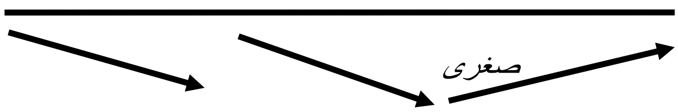
$f(0) = (0)^3\,(-4 + 3) = 0$

$f(3) = (3)^3\,(-4 + 3) = -27$

النقاط الحرجة هي $(3, -27)$, $(0 , 0)$

ـ نضع قيم x على خط الاعداد

أشارة $f'(x)$ $\quad - - - - - - \quad 0 - - - - - \quad 3 \quad + + + + \; + +$



نقطة نهاية صغرى (3 , -27) *نقطة (0 , 0) نقطة حرجة وليست نهاية*

الدالة لا تمتلك نهاية عظمى

التقعر و التحدب ونقاط الانقلاب

لايجاد التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب نتبع الخطوات التالية

١- نجد المشتقة الثانية للدالة
٢- نجعل المشتقة الثانية = صفراً ونجد قيم x
٣- نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة انقلاب
٤- نضع قيم x على خط الاعداد
٥- نأخذ قيمة اكبر واصغر من x ونعوضها في المشتقة f ″(x)
٦- اذا كانت اشارة f ″(x) الموجبة تمثل منطقة تقعر واذا كانت f ″(x) سالبة تمثل منطقة تحدب

==

مثال / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب و التقعر للدالة $f(x) = x^2$

الحل /

$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2$

لا توجد نقاط انقلاب لان المنحني مقعر فقط

==

مثال / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب و التقعر للدالة $F(x) = x^3$

الحل /

١- نجد المشتقة الثانية

$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = 6x$

٢- نجعل المشتقة الثانية = صفر $6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$

أشارة $f''(x)$ - - - - - - 0 + + + + + +

تحدب تقعر

الدالة مقعرة في $\{x : x > 0\}$
الدالة محدبة في $\{x : x < 0\}$
نقطة الانقلاب هي $(0 , 2)$

س١ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب و التقعر للدالة $f\,(x) = 3 - 2x - x^2$

الحل /

$$f\,'(x) = -2 - 2x$$
$$f\,''(x) = -2 < 0$$

لا توجد نقاط انقلاب لان المنحني محدب فقط

==

س٣/ جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب و التقعر للدالة $f(x) = 4x^3 - x^4$

الحل /

١ـ نجد المشتقة الثانية

$$f\,'(x) = 12x^2 - 4x^3$$

$$f^{//}(\mathrm{x}) = 24\mathrm{x} - 12x^2$$

$$24x - 12x^2 = 0$$

$$12x(2 - x)$$

$$12x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

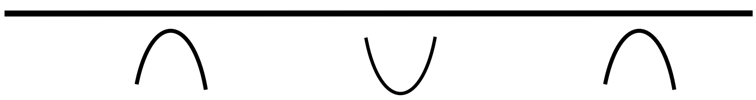
$$2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$$f(0) = 0 - 0 = 0$$

$$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4 = 32 - 16 = 16$$

أشارة $f\,''(x)$ - - - - - - 0 + + + + +2 - - - - - - - - -



تحدب تقعر

الدالة محدبة في $\{x : x > 2\}$ الدالة محدبة في $\{x : x < 0\}$

الدالة مقعرة في الفترة المفتوحة $(0,2)$

نقطتا الانقلاب هما $(0\,,0), (2,16)$

س٤ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب و التقعر للدالة $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

الحل /

١ـ نجد المشتقة الثانية

$$f'(x) = 4x^3 + 6x$$
$$f''(x) = 12x^2 + 6$$

الدالة f مقعرة في R ولا توجد نقطة انقلاب

==

س٥ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب و التقعر للدالة $f(x) = 4 - (x + 2)^4$

الحل /

١ـ نجد المشتقة الثانية

$$f'(x) = -4(x+2)^3\,(1)$$
$$f''(x) = -12(x+2)^2$$
$$-12(x + 2)^2 = 0 \Longrightarrow x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$$f(x) = 4 - (-2 + 2)^4 = 4$$

اشارة $f''(x)$ - - - - - - -2 - - - - - - - -

الدالة مقعرة في { x : x >- 2 }

الدالة محدبة في { x : x < -2 }

نقطة الانقلاب هي (0 , 3)

س٥ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب و التقعر للدالة $f(x) = x + \frac{1}{x} \;, x \neq 0$

س٧ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب و التقعر للدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

الحل /

١- نجد المشتقة الثانية

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6$

٢- نجعل المشتقة الثانية = صفر $12x - 6 = 0 \Longrightarrow 12x = 6 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$$f(1) = 2\left({}^{1}/_{2}\right)^{3} - 3\left({}^{1}/_{2}\right)^{2} - 12\left({}^{1}/_{2}\right) + 1 = \frac{2}{8} - \frac{3}{4} - 6 + 1 = -\frac{11}{2}$$

$f^{/}(x) \quad - - - - - - \quad {}^{1}/_{2} \quad + + + + + +$

تحدب تقعر

الدالة مقعرة في $\{x : x > {}^{1}/_{2}\}$

الدالة محدبة في $\{x : x < {}^{1}/_{2}\}$

نقطة الانقلاب هي $(\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$

اختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى او الصغرى المحلية

١- نجد المشتقة الاولى اي $f^{/}(x)$

٢- نجعل $f^{/}(x) = 0$ ونجد قيم x

٣- نجد المشتقة الثانية $f^{//}(x)$

٤- نعوض قيم x في $f^{//}(x)$ ونلاحظ اشارة $f^{//}(a)$ فاذا كانت

أ- $f^{//}(x) > 0$ فان الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

ب- $f^{//}(x) < 0$ فان الدالة تمتلك نهاية عظمى محلية

ت- $f^{//}(x) = 0$ غير معرفة اي لايصح هذا الاختبار

==

مثال ١/ باستخدام المشتقة الثانية اذا امكن جد النهايات المحلية للدالة

$$\boldsymbol{f(x) = 6x - 3x^2 - 1}$$

الحل /

$f^{/}(x) = 6 - 6x$

$f^{/}(x) = 0 \Longrightarrow 6 - 6x = 0 \Longrightarrow 6x = 6 \Longrightarrow x = 1$

$f^{//}(x) = -6 \Longrightarrow f^{//}(1) = -6 < 0$

بما ان $f^{/}(1) = 0$, $f^{//}(1) < 0$ اذا توجد نهاية عظمى محلية عند $x = 1$

نعوض قيمة $x = 1$ في الدالة الاصلية لايجاد النهاية العظمى

$$\boldsymbol{y = f(1) = 6 - 3 - 1} = 2$$

==

مثال ٢/ باستخدام المشتقة الثانية اذا امكن جد النهايات المحلية للدالة

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x}$$

الحل /

$\boldsymbol{f^{/}(x) = 3x^2 - 6x - 9}$

$\boldsymbol{f^{/}(x) = 0}$

$\boldsymbol{3x^2 - 6x - 9 = 0}$

$\boldsymbol{x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad \div 3}$

$\boldsymbol{(x - 3)(x + 1) = 0 \Longrightarrow x = 3 \quad or \quad x = -1}$

$\boldsymbol{f^{//}(x) = 6x - 6 \Longrightarrow f^{//}(3) = 18 - 6 = 12 > 0}$

اذا توجد نهاية صغرى محلية عند $\boldsymbol{f(3) = 27 - 27 - 27 = -27}$

$\boldsymbol{f^{//}(-1) = -6 - 6 = -12 < 0}$

اذا توجد نهاية صغرى محلية عند $\boldsymbol{f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5}$

مثال ٣/ باستخدام المشتقة الثانية اذا امكن جد النهايات المحلية للدالة

$$f(x) = 4 - (x+1)^4$$

الحل /

$f^{/}(x) = -4(x+1)^3$

$f^{/}(x) = 0$

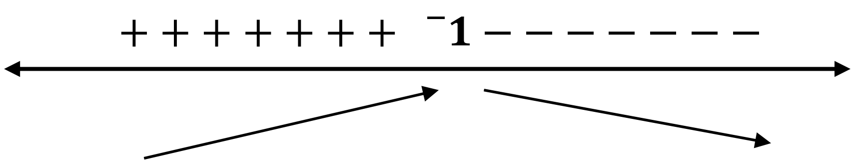
$-4(x+1)^3 = 0 \qquad x + 1 = 0 \qquad x = -1$

$f^{//}(x) = -12(x+1)^2 \qquad f^{//}(-1) = -12(-1+1)^2 = 0$

هذه الطريقة لا تصح

$f^{//}(-1) = -6 - 6 = -12 < 0$

اذا توجد نهاية صغرى محلية عند $f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$



توجد للدالة نهاية عظمى محلية هي $f(-1) = 4 - (-1+1)^4 + 9 = 4 + 9 = 13$

مثال / باستخدام المشتقة الثانية اذا امكن جد النهايات المحلية للدالة

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2} \qquad x \neq 0$$

الحل /

$f(x) = x - 4x^{-2}$

$f^{/}(x) = 1 + 8x^{-3}$

$f^{/}(x) = 0$

$1 + 8x^{-3} = 0 \qquad \frac{8}{x^3} = - \qquad x^3 = -8 \qquad x = -2$

$f^{//}(x) = -24x^{-4} \qquad f^{//}(-2) = \frac{-24}{(-2)^4} = \frac{-24}{16} < 0a$

بما ان $f^{/}(-2) = 0$, $f^{//}(-2) < 0$ اذا توجد نهاية عظمى محلية عند $x = -2$

نعوض قيمة $x = -2$ في الدالة الاصلية لايجاد النهاية العظمى

$$y = f(1) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3$$

ملاحظات / لإيجاد الثوابت مثل a , b , c

١ـ اذا أعطيت لنا في السؤال إحداثيات نقطة حرجة او نهاية عظمى او صغرى مثل (a, b)

نستخدم هذه النقطة مرتين مرة الأولى هي $f(a) = b$ ومرة الثانية $f'(a) = 0$

٢ـ اذا أعطيت لنا في السؤال إحداثيات (نقطة انقلاب مثل (a , b))نستخدم هذه النقطة مرتين

مرة الاولى هي $f(a) = b$ ومرة الثانية $f''(a) = 0$

٣ـ اذا كان للدالة نهاية عظمى او صغرى او حرجة عند النقطة a فان a تمثل الاحداثي y للنقطة

٤ـ اذا كان للدالة نقطة انقلاب عند النقطة a فان $f''(a) = 0$

٥ـ اذا كان للدالة محدبة في $\{x > a\}$ او مقعرة في $\{x < a\}$ فان $f''(a) = 0$

٦ـ ميل المماس = المشتقة الاولى للدالة عند نقطة التماس (a, b) اي $m = f'(a)$

٧ـ ميل معادلة المماس هو $m = -\frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}}$

مثال/١/ لتكن $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, $a \in R$ فجد قيمة a علما ان الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ ثم بين ان الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

الحل /

$$f(x) = x^2 + ax^{-1}$$
$$f'(x) = 2x - ax^{-2}$$
$$f''(x) = 2 + 2ax^{-3}$$
$$f''(1) = 0$$
$$2 + 2a(1)^{-3} = 0 \Longrightarrow 2 + 2a = 0 \Longrightarrow 2a = -2 \Longrightarrow a = -1$$
$$f(x) = x^2 - x^{-1}$$
$$f'(x) = 2x + x^{-2}$$
$$f'(x) = 0$$
$$2x + x^{-2} = 0 \Longrightarrow 2x^3 + 1 = 0$$
$$2x^3 = -1 \Longrightarrow x^3 = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$
$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$
$$f''\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 2 + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 + 4 = 6 > 0 \ , \forall x \in R$$

تو جد نهاية صغرى محلية عند $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ لا تمتلك f نهاية عظمى محلية

مثال٢/عين قيمتي الثابتين لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب ؟

الحل /

$$f^{/}(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f^{/}(2) = 0 \qquad 3(2)^2 + 2a(2) + b = 0 \Longrightarrow 12 + 4a + b = 0 \quad ..(2)$

$f^{/}(-1) = 0 \qquad 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \Longrightarrow 3 - 2a + b = 0 \quad ..(1)$

بالطرح

$$9 + 6a = 0 \Longrightarrow a = \frac{-2}{3}$$

نعوض قيمة $a = \frac{-2}{3}$ في معادلة (1)

$$12 + 4\left(\frac{-2}{3}\right) + b = 0 \Longrightarrow 36 - 8 + 3b = 0 \Longrightarrow b = -6$$

تكون الدالة $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$ ولايجاد نقطة الانقلاب نجد المشتقة الثانية

$$f^{/}(x) = 3x^2 - 3x - 6$$

$$f^{//}(x) = 6x - 3$$

$$f^{//}(x) = 0 \Longrightarrow 6x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$- - - - - - - - - - \ \frac{1}{2} \ + + + + + + + + + + +$$

الدالة مقعرة عند النقطة $\left\{x : x < \frac{1}{2}\right\}$ و الدالة محدبة عند النقطة $\left\{x : x > \frac{1}{2}\right\}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} + 3 = \frac{-2}{8} - \frac{24}{8} = \frac{-26}{8} = -\frac{13}{2}$$

مثال٣/ اذا كان منحني الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ **مقعر في** $\{x; x < 1\}$ **ومحدب في** $\{x; x > 1\}$ **ويمس المستقيم** $y + 9x = 28$ **عند النقطة** $(3, 1)$ **فجد قيم الإعداد الحقيقية** a, b, c

الحل /

بما ان الدالة مستمرة لانها كثيرة الحدود ، مقعرة في $\{x: x < 1\}$

$$f^{/}(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f^{//}(x) = 6ax + 2b$$

$$f^{//}(1) = 0 \Longrightarrow 6a + 2b = 0 \Longrightarrow 3a + b = 0 \Longrightarrow b = -3a \ldots (1)$$

نشتق معادلة المستقيم $y + 9x = 28$

$$\frac{dy}{dx} + 9 = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -9 = m$$ ميل المماس

ميل المنحني للدالة ***f(x)*** **عند** ***x=3*** **هو** $f^{/}(3)$

$$f^{/}(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) = m$$

$$27a + 6b = -9 \quad \ldots\ldots (2)$$

نعوض (1) في (2)

$$27a + 6(-3a) = -9$$

$$27a - 18a = -9$$

$$9a = -9 \Longrightarrow a = -1$$

$$b = -3(-1) = 3$$

النقطة (3.1) **تحقق معادلة منحني الدالة** $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ **ونعوض عن قيم** ***a, b***

$$1 = (-1)(3)^3 + 3(3)^2 + c$$

$$1 = -27 + 27 + c \Longrightarrow c = 1$$

مثال٤/ اذا كان منحني الدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب $x = 1$ فجد قيمة الثوابت $a, c \in R$

الحل/

بما ان للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1$ فاذا $f^{//}(1) = 0$

$f^{/}(x) = 3ax^2 + 6x$

$f^{//}(x) = 6ax + 6$

$f^{//}(1) = 0 \Longrightarrow 6a + 6 = 0 \Longrightarrow 6a = -6 \Longrightarrow a = -1$

$\therefore f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

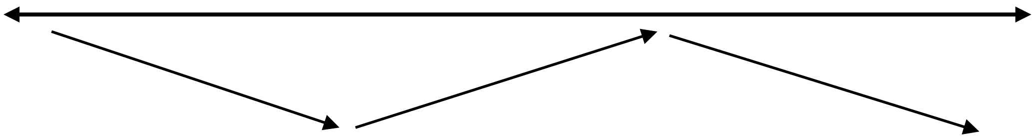
بما ان للدالة نهاية عظمى $= 8$ فاذا $f^{/}(x) = 0$

$f^{/}(x) = -3x^2 + 6x$

$f^{/}(x) = 0$

$-3x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow -3x(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad or \quad x = 2$

$- - - - - - - \quad 0 + + + + + + + 2 - - - - - - - - -$



تمتلك نهاية عظمى عند $x = 2$

النقطة $(2, 8)$ نهاية عظمى وتحقق معادلة المنحني $f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

$8 = -(2)^3 + 3(2)^2 + c$

$8 = -8 + 12 + c \Longrightarrow c = 8 - 4 = 4$

س١/لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث ان $b \in R$, $a \in \{-4, 8\}$ جد قيمة a اذا كانت الدالة :

١ ـ الدالة محدبة ٢ ـ الدالة مقعرة

الحل /

س٢/اذا كانت $(2,6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x) = a - (x-b)^4$ فجد قيمة a , b وبين نوع النقطة الحرجة

س٣/اذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من g , f متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1, -11)$ فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$

س٤/اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة $c \in R$ ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه .

س٥/اذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $\forall x > 1$ ومحدبة $\forall x < 1$ للدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 5)$ فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$

س٦/لتكن $a \in R/\{0\}$, $x \neq 0$, $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ برهن ان الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

س٧/ المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند (2,-1) وكانت له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيمة $a, b, c \in R$ وما نوع النهاية .

رسم المخطط البياني للدالة

١ - أوسع مجال للدالة -:

أ - أوسع مجال للدالة كثيرة الحدود هو R

ب - أوسع مجال للدالة الكسرية = R ماعدا القيم التي تجعل المقام = صفر

٢ - التناظر

أ - اذا كانت $f(-x) = f(x)$ متناظرة حول محور الصادات

ب - اذا كانت $f(-x) = -f(x)$ متناظرة حول نقطة الاصل

٣ - نقاط تقاطع المحورين

أ - نجعل $x = 0$ ونجد قيم y

ت - نجعل $y = 0$ ونجد قيم x

٤ - المحاذات (للدالة الكسرية فقط) مثل $\frac{g(x)}{h(x)}$

أ - المحاذي العمودي نجعل $h(x) = 0$ ونجد قيم x

ب - المحاذي الافقي نجعل الدالة بدلالة y أي $\frac{g(y)}{h(y)}$

ونجعل $h(y) = 0$ ونجد قيم x

٥ - نشتق الدالة ونجد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها (عظمى او صغرى)

٦ - نجد المشتقة الثانية ونجد مناطق التقعر والتحدب ونقط الانقلاب ان وجدت

٧ - نجد نقاط اضافية ان احتجنا الى ذلك

٨ - نعين النقاط (التقاطع والمحاذيات والحرجة والانقلاب) بالمستوى الاحداثي

مثال/ بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

١ - اوسع مجال R

٢- التقاطع مع محور الصادات $(\mathbf{0,4}) \Longrightarrow \boldsymbol{y = f(0) = 0 - 0 + 4 = 4} \Longrightarrow \boldsymbol{x = 0}$

٣- التناظر $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4 \neq f(x)$

لا يوجد تناظر مع محور الصادات او نقطة الاصل لان $\boldsymbol{f(-x) \neq f(x)}$ **or** $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$

٤- المحاذيات لاتوجد لان الدالة ليست نسبية

٥- نشتق الدالة نجد النهايات العظمى والصغرى $f^{/}(\mathrm{x}) = 3x^2 - 6\mathrm{x}$

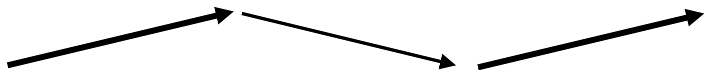
$3x^2 - 6x = 0 \qquad x(3x - 6) = 0$

$x = 0 \quad or \quad 3x - 6 = 0 \Longrightarrow 3x = 6 \Longrightarrow x = 2$

$f(0) = 0 - 0 + 4 = 4 \quad , \quad f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$

نقطة $(0 , 4) , (2 , 0)$ حرجة

أشارة $f'(x)$ + + + + + + 0 - - - - - - 2 + + + + + +



الدالة متزايدة في $\{x : x > 2\}$ و متزايدة في $\{x : x < 0\}$

الدالة متناقصة في الفترة $(0 , 2)$

نقطة $(0 , 4)$ نهاية عظمى محلية

نقطة $(2 , 0)$ نهاية صغرى محلية

٦- نجد المشتقة الثانية لايجاد التقعر والتحدب

$f''(x) = 6x - 6$

نجعل المشتقة الثانية = صفر $6x - 6 = 0 \qquad 6x = 6 \qquad x = 1$

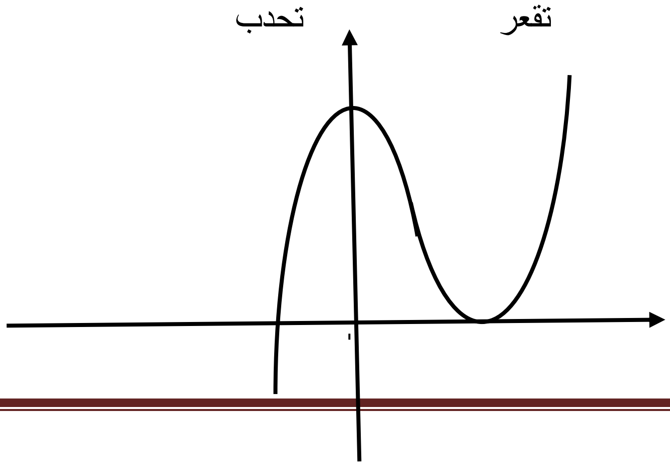
$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$

أشارة $f''(x)$ - - - - - - 1 + + + + + + +

الدالة مقعرة في $\{x : x > 1\}$

الدالة محدبة في $\{x : x < 1\}$

نقطة الانقلاب هي $(1 , 2)$



س١ / ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x) = x^5$

١ - اوسع مجال R

٢- التقاطع مع محور الصادات (0,0) $y = f(0) = 0$ $x = 0$

التقاطع مع المحور الصادات (0,0) $x = 0$ $0 = x^5$ $y = 0$

٣- التناظر $f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$

٤- المحاذيات لاتوجد لان الدالة ليست نسبية

٥- نشتق الدالة نجد النهايات العظمى والصغرى

$f^{/}(\mathrm{x}) = 5x^4$

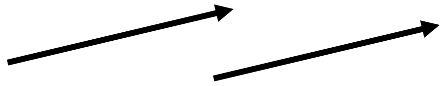
$5x^5 = 0$ $x^5 = 0$ $x = 0$

$x = 0$ or $3x - 6 = 0 \Longrightarrow 3x = 6 \Longrightarrow x = 2$

$f(0) = 0$

نقطة (0 , 0)حرجة

أشارة f ′ (x) + + + + + + 0 + + + + +



الدالة متزايدة في {x : x > 0} و متزايدة في {x : x < 0}

لا توجد نهاية عظمى محلي و نهاية صغرى محلية

٦- نجد المشتقة الثانية لايجاد التقعر والتحدب

$f''(x) = 20x^3$

$20x^3 = 0$ $x = 0$ نجعل المشتقة الثانية = صفر

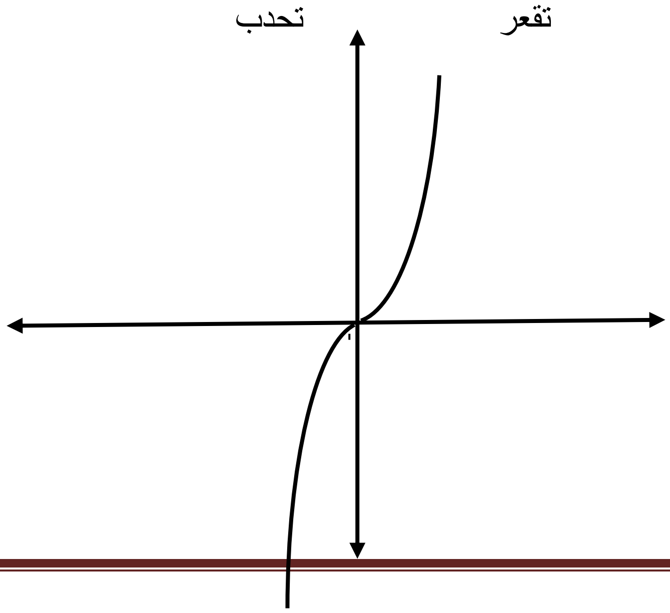
$f(0) = (0)^5 = 0$

أشارة f ″(x) - - - - - - 0 + + + + + +

الدالة مقعرة في {x : x > 0}

الدالة محدبة في {x : x < 0}

نقطة الانقلاب هي (0 , 0)



س٤ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

١ - اوسع مجال R/{-1}

٢- التقاطع مع محور الصادات $(\mathbf{0}, -\mathbf{1})$ $\boldsymbol{x = 0 \Longrightarrow \quad y = f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1 \Longrightarrow}$

التقاطع مع المحور الصادات $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$ $\quad \boldsymbol{3x - 1 = 0} \quad \boldsymbol{\frac{3x-1}{x+1} = 0} \quad \boldsymbol{y = 0}$

٣- التناظر $\quad f(-x) = \frac{-3x-1}{-x+1} = -x^3 - 3x^2 + 4 \neq f(x)$

لا يوجد تناظر مع محور الصادات او نقطة الاصل لان $\boldsymbol{f(-x) \neq f(x)}$ **or** $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$

٤- المحاذيات لاتوجد لان الدالة ليست نسبية

٥- نشتق الدالة نجد النهايات العظمى والصغرى $\quad f^{/}(x) = 3x^2 - 6x$

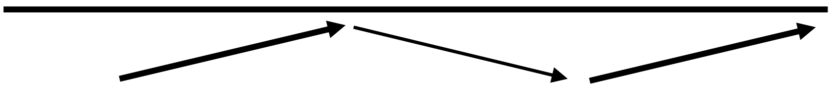
$3x^2 - 6x = 0 \qquad x(3x - 6) = 0$

$x = 0 \quad or \quad 3x - 6 = 0 \Longrightarrow 3x = 6 \Longrightarrow x = 2$

$f(0) = 0 - 0 + 4 = 4 \quad , \quad f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$

نقطة (2 , 0), (0 , 4) حرجة

أشارة f ′ (x)   + + + + + + 0 - - - - - - 2 + + + + + +



الدالة متزايدة في { x : x > 2 } و متزايدة في { x : x < 0 }

الدالة متناقصة في الفترة (0 , 2)

نقطة(0 , 4) نهاية عظمى محلية

نقطة(2 , 0) نهاية صغرى محلية

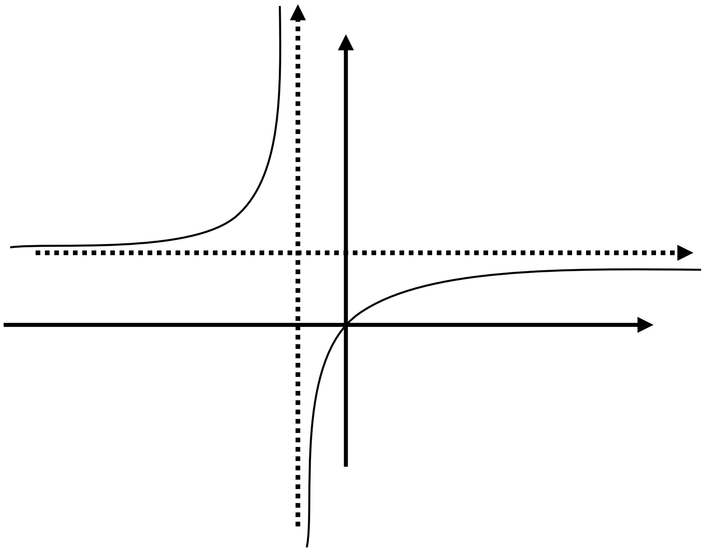
٦- نجد المشتقة الثانية لايجاد التقعر والتحدب

$f''(x) = 6x - 6$

نجعل المشتقة الثانية = صفر $\quad 6x - 6 = 0 \qquad 6x = 6 \qquad x = 1$

$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$

أشارة f ″(x)   - - - - - - 1 + + + + + +



الدالة مقعرة في $\{x : x > 1\}$
الدالة محدبة في $\{x : x < 1\}$
نقطة الانقلاب هي $(1 , 2)$

س١ / ارسم منحنى الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 3$

س٢ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = (x+2)(x-1)^2$

س٣ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

س٤ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$

س٥ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

س٦ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

س٧ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحنى الدالة $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

التكامل

التكامل : هو عملية معاكسة لعملية الاشتقاق ويرمز له بالرمز $\int$

الرمز dx - - - $\int$ يعني التكامل بالنسبة لـ x
لرمز dy - - - $\int$ يعني التكامل بالنسبة لـ y

ملاحظة : ليس لدينا قاعدة لتكامل كل من (١ـ الكسر ٢ـ الجذر ٣ـ حاصل ضرب دالتين)

قواعد التكامل غير المحدد :

١ـ تكامل دالة الثابت

$$\int a\,dx = ax + c$$ حيث c ثابت التكامل

أمثلة/

$1)\ \int 6\,dx = 6x + c$

$2)\ \int -\,dx = -x + c$

$3)\ \int \sqrt{5}\,dx = \sqrt{5}\,x + c$

٢ـ تكامل $\int x^n dx$

$$2)\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

ملاحظة / اذا أردنا ان تكامل المتغير x فأننا نكتب المتغير ونضيف الى الأس واحد ونقسم على الأس
الجديد ونضيف ثابت التكامل c

امثلة /

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$$

$$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$$

$$\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{3x^3} + c$$

$$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{4x^4} + c$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int 5x^3\,dx = \frac{5x^4}{4} + c$$

$$\int 4x^2\,dx = \frac{4x^3}{3} + c$$

تكامل الجذور

1) $\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

2) $\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4}\ x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

3) $\int \sqrt[4]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{4}{5}\ x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c$

4) $\int \sqrt[3]{x^2}\ dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5}\ x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{-1}{2}}\ dx = 2\ x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{\frac{-1}{3}}\ dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\ \sqrt[3]{x^2} + c$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{\frac{-2}{3}}\ dx = \frac{3}{1} x^{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{x} + c$

تكامل الدوال كثيرة الحدود

8) $\int (3x^2\ +\ 5)dx = \frac{3x^3}{3} + 5x + c = x^3 + 5x + c$

9) $\int (5x^2 + 3x - 2)dx = \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + c$

10) $\int \left(\frac{3}{4}x^3 + x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + c$

11) $\int (x^2 + 2x^{-3})dx = \frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{x^3}{3} - x^{-2} + c$

12) $\int (3x^2 + 2x\ + 1)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + c = x^3 + x^2 + x + c$

مثال 1 / جد التكامل $\int(6x^2-4x+3)dx$

الحل //

$$\int(6x^2-4x+3)dx=\frac{6x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+3x+c=2x^3-2x^2+3x+c$$

==

مثال / جد التكامل $\int(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-1)dx$

الحل /

$$\int(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-1)dx=\int(x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{-2}{3}}-1)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-9x^{\frac{1}{3}}-x+c$$

==

مثال 3/ جد التكامل $\int(3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

الحل /

$$\int(3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}})dx=\int\left(3x^2+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=x^3+2x^{\frac{1}{2}}+c$$

==

س13/ جد التكامل $\int(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx$

الحل /

$$\int(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx=\int(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{-2}{3}})dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+c$$

==

مثال/ جد $\int\left(x^3+\frac{2}{x^4}\right)dx$

$$\int\left(x^3+\frac{2}{x^4}\right)dx=\int(x^3+2x^{-4})dx=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^{-3}}{-3}+c$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3x^3}+c$$

==

ملاحظة / ١- التخلص من الأقواس اذا كانت الأقواس ليس لها أس كما في المثال التالي

مثال / جد التكامل $\int (2x+5)(x+1)\,dx$

الحل /

$$\int (2x+5)(x+1)\,dx = \int (2x^2+2x+5x+5)\,dx$$
$$= \int (2x^2+7x+5)\,dx$$
$$= \frac{2x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+5x+c$$

==

مثال / جد التكامل $\int (x^2+1)(2x-3)\,dx$

الحل /

$$\int (x^2+1)(2x-3)\,dx = \int (2x^3-3x^2+2x-3)\,dx$$
$$= \frac{2x^2}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-3x+c$$
$$= \frac{x^2}{2}-x^3+x^2-3x+c$$

==

ملاحظة /٢/ التخلص من القوس اذا كان الأس القوس =2 والمشتقة داخل القوس غير موجودة

مثال/ جد التكامل $\int (3x^2+1)^2\,dx$

الحل /

$$\int (3x^2+1)^2\,dx = \int (9x^4+6x^2+1)\,dx$$
$$= \frac{9x^5}{5}+2x^3+x+c$$

==

مثال/ جد التكامل $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx$

الحل /

$$\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx = \int \frac{4x^4-12x^2+9-9}{x^2}\,dx$$
$$= \int \frac{4x^4-12x^2}{x^2}\,dx$$
$$= \int (4x^2-12)\,dx$$
$$= \frac{4}{3}x^3-12x+c$$

ملاحظة / ٢ـ التخلص من القوس اذا كان الأس القوس =2 والمشتقة داخل القوس غير موجودة

س3/ جد التكامل $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2 dx$

الحل /

$$\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx$$
$$= \int (x^{\frac{3}{2}}+2x+x^{\frac{1}{2}})dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

==

س5/ جد التكامل $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2 dx$

الحل/

$$\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x+4\sqrt{x}+4\right)dx$$
$$= \int (x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

==

٣ـ تكامل دالة مرفوعة الى أس

$$3)\ \int [F(x)]^n f^{/}(x)dx = \frac{[F(x)]^{n+1}}{n+1}+c$$

اذا كانت احد الأقواس مرفوع الى أس وكان القوس الثاني هو مشتقة داخل القوس الأول

فإننا نكامل القوس الأول فقط ونقسم على الأس الجديد ونضيف ثابت c كما في المثال التالي

==

مثال/ جد التكامل $\int (x^2-3)^3 2x\ dx$

الحل /نلاحظ مشتقة داخل القوس = 2x (وهي موجودة)

$$\int (x^2+3)^3\ 2x\ dx = \frac{(x^2+3)^4}{4}+c$$

==

مثال/ جد التكامل $\int (3x^2+8x+5)^6 (3x+4)\ dx$

الحل /نلاحظ مشتقة داخل القوس = $6x^2+8$ (فقط نحتاج 2)

$$\int (3x^2+8x+5)^6\ (3x+4)\ dx = \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6\ (6x+8)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(3x^2+8x+5)^7}{7}+c = \frac{(3x^2+8x+5)^7}{14}+c$$

مثال/ جد التكامل $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2} dx$

الحل /

$$\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2} dx = \frac{1}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2}(2x-4)dx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c$$
$$= \frac{1}{-2(x^2-4x+5)} + c$$

===

ملاحظة / نتعامل مع الجذر معاملة القوس مرفوع الى أس

مثال/ جد التكامل $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$

الحل /

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$
$$= \int \frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$
$$= \int \frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^2}} dx$$
$$= 2\int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx =$$
$$= 2 \cdot \frac{2}{3}(1-\sqrt{x}\,)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}\,(1-\sqrt{x}\,)^{\frac{3}{2}} + c$$

===

مثال/ جد التكامل $\int \frac{(3-\sqrt{5x}\,)^7}{\sqrt{7x}} dx$

$$\int \frac{(3-\sqrt{5x}\,)^7}{\sqrt{7x}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{(3-\sqrt{5x}\,)^7}{\sqrt{x}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} \int (3-\sqrt{5x}\,)^7 \left(\frac{-\sqrt{5}}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx\right)$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \cdot \frac{(3-\sqrt{5x}\,)^8}{8} + c$$

===

مثال/ جد التكامل $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4} dx$

$$\int \frac{x}{(3x^2+5)^4} dx = \frac{1}{6}\int (3x^2+5)^{-4}\, 6x dx$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(3x^2+5)^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{18(3x^2+5)^3} + c$$

==

مثال/ جد التكامل $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\, dx$

$$\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\, dx = \int 2(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int (2x+3)^{\frac{3}{2}}\, 2dx = \frac{2}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}} + c$$

مثال/ جد التكامل $\int (x^2+5)^2(5x+x^3)\, dx$

$$\int (x^2+5)^2(5x+x^3) dx = \int (x^2+5)^2(x^2+5)x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+5)^3\, 2x dx = \frac{1}{8}(x^2+5)^4 + c$$

==

مثال / جد التكامل $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}} dx$

الحل /

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}} dx = \frac{-1}{4}\int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}(-4x^3) dx$$

$$= \frac{-1}{4} \cdot \frac{5}{4}(5-x^4)^{\frac{4}{5}} + c = \frac{-5}{16}(5-x^4)^{\frac{4}{5}} + c$$

==

اذا كانت مشتقة داخل القوس غير موجودة فتوجد حالتين :-

الحالة الاولى : استخدام المربع الكامل اذا كانت الحدود ثلاث كما في الأمثلة الآتية

مثال/ جد التكامل $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\, dx$

الحل /

$$\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\, dx = \int (x+5)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5}(x+5)^{\frac{5}{3}} + c$$

مثال/ جد التكامل $\int \frac{dx}{x^2-14x+49}$

الحل /

$$\int \frac{dx}{x^2-14x+49} = \int \frac{dx}{(x-7)^2} dx$$
$$= \int (x-7)^{-2} dx$$
$$= \frac{(x-7)^{-1}}{-1} + c$$
$$= \frac{-1}{x-7} + c$$

==

مثال/ جد التكامل $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-10x+25}} dx$

الحل /

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-10x+25}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[5]{(x-5)^2}} dx$$
$$= \int (x-5)^{\frac{-2}{5}} dx = \frac{5}{3}(x-5)^{\frac{3}{5}} + c$$
$$= \frac{5\sqrt[5]{(x-5)^3}}{3} + c$$

==

مثال/ جد التكامل $\int x\sqrt{x-1}\, dx$

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int (x-1+1)\sqrt{x-1} dx$$
$$= \int (x-1)\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}\, dx$$
$$= \int (x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2} dx$$
$$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + c$$

==

الحالة الثانية : استخراج العامل المشترك كما في الأمثلة الآتية

==

مثال/ جد التكامل $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\, dx$

الحل/

$$\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\, dx = \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\, dx = \int x\ \sqrt[3]{(3-5x^2)}\, dx$$
$$= \frac{-1}{10}\int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}(-10x)\, dx = \frac{-1}{10}\cdot\frac{3}{4}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$$
$$= \frac{-3}{40}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$$

ملاحظة /

اذا كانت الدالة كسرية وكل من البسط والمقام ليس مرفوع الى أس في هذه الحالة نستخدم التحليل

مثال/ جد التكامل $\int \frac{x^4-8x}{x-2}\,dx$

الحل /

$$\int \frac{x^4-8x}{x-2}\,dx = \int \frac{x(x^3-8)}{x-2}\,dx$$
$$= \int \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\,dx$$
$$= \int x(x^2+2x+4)\,dx$$
$$= \int (x^3+2x^2+4x)\,dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + c$$

مثال/ جد التكامل $\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}\,dx$

الحل /

$$\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}\,dx = \int \frac{9x^4-24x^2+16-16}{x^2}\,dx$$
$$= \int \frac{9x^4-24x^2}{x^2}\,dx = \int 9x^2-24\,dx$$
$$= 3x^3-24x+c$$

مثال/ جد التكامل $\int \frac{x}{\sqrt{x+5}}\,dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+5}}\,dx = \int \frac{x+5-5}{\sqrt{x+5}}\,dx = \int \frac{x+5}{\sqrt{x+5}} - \frac{5}{\sqrt{x+5}}\,dx$$
$$= \int (x+5)^{1/2} - 5(x+5)^{-1/2}\,dx$$

مثال/ جد التكامل $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (x-1+1)\sqrt{x-1}\,dx$$
$$= \int (x-1)\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}\,dx$$
$$= \int (x-1)^{3/2} + (x-1)^{1/2}\,dx$$
$$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + c$$

1) $\int x(x^2+3)^3 dx$

2) $\int \frac{x^4-16}{x-2} dx$

3) $\int \frac{x^4-27x}{x^3+3x^2+9x} dx$

4) $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2 dx$

5) $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}} dx$

6) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+16x+64}} dx$

7) $\int \sqrt[3]{x^5+2x^3}\, dx$

8) $\int \sqrt[5]{x^5-2x^8}\; xdx$

9) $\int \frac{(x+2)^2}{x+1} dx$

10) $\int \frac{x^3-2x^2+1}{5x^5} dx$

القواعد الاساسية

للتكاملات الدوال المثلثية

أعداد الأستاذ

عبدالسلام محمد علي

2014 - 2015

العلاقات بين الدوال المثلثية

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

$$\sin x = \frac{1}{\csc x} \quad , \quad \cos x = \frac{1}{\sec x} \quad , \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

أمثله

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x \quad , \quad \sin 8x = 2\sin 4x \cos 4x$$

$$\sin^2 2x = (2\sin x \cos x)^2 = 4\sin^2 x \cos^2 x$$

مثال / جد $2\sin 3x \cos 3x$

$$2\sin 3x \cos 3x = \sin 6x$$

جيب تمام ضعف الزاوية

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad or \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

تكامل الدوال المثلثية

1) $\int \boldsymbol{sin\, ax\, dx} = \frac{-1}{a} \boldsymbol{cos\, ax + c}$

2) $\int \boldsymbol{cos\, ax\, dx} = \frac{1}{a} \boldsymbol{sin\, ax + c}$

3) $\int \boldsymbol{sec^2\, ax\, dx} = \frac{1}{a} \boldsymbol{tan\, ax + c}$

4) $\int \boldsymbol{csc^2\, ax\, dx} = \frac{-1}{a} \boldsymbol{cot\, ax + c}$

5) $\int \boldsymbol{sec\, ax\, tan\, ax\;\; dx} = \frac{1}{a} \boldsymbol{sec\, ax + c}$

6) $\int \boldsymbol{csc\, ax\, cot\, ax\;\; dx} = \frac{-1}{a} \boldsymbol{csc\, ax + c}$

==

مثال ١ / اوجد $\int \sin(2x+4)dx$

الحل/

$$\int \sin(2x+4)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+4)(2dx) = \frac{-1}{2}\cos(2x+4) + c$$

==

مثال ٢ / اوجد $\int x^2 Sinx^3 dx$

$$\int x^2 Sinx^3 dx = \frac{1}{3}\int Sinx^3(3x^2 dx) = \frac{-1}{3} cosx^3 + c$$

==

مثال٣ / / اوجد $\int \cos x + x^{-2}\, dx$

الحل /

$$\int \cos x + x^{-2}\, dx = \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \sin x - x^{-1} + c$$

==

مثال٤ / اوجد $\int\; x + \sec x \tan x\, dx$

$$\int\; x + \sec x \tan x\, dx = \frac{x^2}{2} + \sec x + c$$

==

مثال٥ / اوجد $\int 9 \sin 3x\, dx$

الحل /

$$\int 9 \sin 3x\, dx = 3\int 3\sin 3x\, dx = -3\cos 3x + c$$

مثال/٦ جد $\int \frac{2sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

الحل /

$$\int \frac{2sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\int sin\sqrt[3]{x}\ \ x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= 2\times 3\int sin\sqrt[3]{x}\ \ \left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= -6cos\sqrt[3]{x} + c$$

مثال /٧ جد $\int \frac{cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$

الحل /

$$\int \frac{cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} = -\,2\int (cos\sqrt{1-x}\,)\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)dx = -2\ sin\sqrt{1-x} + c$$

مثال/٨ جد $\int sec^2 4x\ dx$

الحل / $\int sec^2 4x\ dx = \frac{1}{4}tan\ 4x + c$

س/٩ جد $\int csc^2 2x\ dx$

$$\int csc^2 2x\ dx = \frac{-1}{2}cot\ 2x + c$$

اذا كان احدى الدوال الستة موجودة ومرفوعة الى قوة معينة و كانت مشتقتها موجودة

$$\int [f(x)]^n\, f^/(x)dx\ = \frac{[f(x)]^n}{n+1} + c$$

مثال 10 / اوجد $\int sin^4x\ cos\ x\ dx$

الحل /

دالة مرفوعة الى أس *مشتقة الدالة*

$$\int sin^4x\ cos\ x\ dx = \frac{1}{5}sin^5\ x + c$$

مثال11 / اوجد $\int tan^6x\ sec^2x$

الحل /

الدالة ومرفوعة الى أس مشتقة الدالة

$$\int tan^6x\ sec^2x\ dx = \frac{1}{7}tan^7x + c$$

$\int Sin^n x dx$ أو $\int cos^n x dx$ حيث n عدد زوجي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة

$$\int sin^n x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx \qquad or \qquad \int cos^n x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx$$

مثال ١/ جد $\int sin^2 x dx$

$$\int Sin^2 x dx = \int \frac{1-cos2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{4} \int cos2x\, 2dx$$
$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sin2x + c$$

===

مثال ١١/ جد $\int sin^2 3x\, dx$

$$\int sin^2 3x\, dx = \int \frac{1-cos6x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{12} \int cos6x\, 2dx$$
$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} Sin6x + c$$

===

مثال ١٣/ جد $\int cos^2 5x\, dx$

$$\int cos^2 5x\, dx = \int \frac{1+cos10x}{2} dx$$
$$= \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{20} \int cos10x\ \ 10dx$$
$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{20} Sin10x + c$$

===

مثال ٢/ جد $\int cos^2 x dx$

$$\int cos^2 x dx = \int \frac{1+cos2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{4} \int cos2x\, 2dx$$
$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} sin2x + c$$

مثال ٣/ اوجد $\int Sin^4xdx$

$$\int Sin^4xdx = \int \frac{(1-cos2x)^2}{4}dx$$
$$= \int \frac{1-2cos2x+cos^2 2x}{4}dx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx - \int \frac{cos2x}{2}dx + \int \frac{1}{4}cos^2 2xdx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx - \int \frac{cos2x}{2}dx + \int \frac{1}{4}\left(\frac{1+cos4x}{2}\right)dx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx - \int \frac{cos2x}{2}dx + \int \frac{1}{8}dx + \int \frac{cos4x}{8}dx$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{Sin2x}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}Sin4x + c$$

==

س٤ / جد $\int cos^4 3x\, dx$

$$\int cos^4xdx = \int (cos^2x)^2\, dx = \int [\tfrac{1}{2}(1+cos2x)]^2 dx$$
$$= \int \frac{1}{4}(1+2cos2x+cos^2 2x)dx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx + \int \frac{cos2x}{2}dx + \int \frac{1}{4}cos^2 2xdx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx + \int \frac{cos2x}{2}dx + \int \frac{1}{4}\left(\frac{1+cos4x}{2}\right)dx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx + \int \frac{cos2x}{2}dx + \int \frac{1}{8}dx + \int \frac{cos4x}{8}dx$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{Sin2x}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}Sin4x + c$$

==

س٤ / جد $\int cos^4 3x\, dx$

$$\int cos^4 3xdx = \int (cos^2 3x)^2\, dx = \int [\tfrac{1}{2}(1+cos6x)]^2 dx$$
$$= \int \frac{1}{4}(1+2cos6x+cos^2 6x)dx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx + \int \frac{cos6x}{2}dx + \int \frac{1}{4}cos^2 6xdx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx + \int \frac{cos6x}{2}dx + \int \frac{1}{4}\left(\frac{1+cos12x}{2}\right)dx$$
$$= \int \frac{1}{4}dx + \int \frac{cos6x}{2}dx + \int \frac{1}{8}dx + \int \frac{cos12x}{8}dx$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{Sin6x}{12} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}Sin12x + c$$

$\int Sin^n xdx$ أو $\int cos^n xdx$ حيث n عدد فردي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int Sin^n xdx = \int sin^{n-1}x \sin x = \int (1 - cos^2 x)^{\frac{n}{2}} sinx$$

$$\int cos^n xdx = \int cos^{n-1}x \cos x = \int (1 - sin^2 x)^{\frac{n}{2}} cosx$$

مثال ١/ جد $\int sin^3 x\, dx$

الحل/

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x \sin^2 3x\, dx = \int \sin x(1 - \cos^2 x)\, dx$$

$$= \int (\, sinx - cos^2 x\, sinx\,)dx$$

$$= -cos\, x + \frac{1}{3} cos^3 x + c$$

===

مثال2/ اوجد $\int cos^3 x\, dx$

الحل /

$$\int cos^3 x\, dx = \int cos\, x\, cos^2 x\, dx$$

$$= \int cos\, x(\, 1 - sin^2 x)dx$$

$$= \int (\, cosx - sin^2 x\, cosx\,)dx$$

$$= Sin\, x - \frac{1}{3} Sin^3 x + c$$

===

مثال٣/ جد $\int sin^5 x\, dx$

الحل/

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin x \sin^4 3x\, dx = \int \sin x(1 - \cos^2 x)^2\, dx$$

$$= \int sinx(\, 1 - 2\, cos^2 x + cos^4 x\,)dx$$

$$= -cos\, x + \frac{2}{3} cos^3 x - \frac{cos^5 x}{5} + c$$

===

مثال٤/ جد $\int sin^5 x\, dx$

الحل/

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos x \cos^4 3x\, dx = \int \cos x(1 - \sin^2 x)^2\, dx$$

$$= \int cosx(\, 1 - 2\, sin^2 x + sin^4 x\,)dx$$

$$= sin\, x - \frac{2}{3} sin^3 x + \frac{sin^5 x}{5} + c$$

$\int cot^n xdx$ أو $\int tan^n xdx$ حيث $n \geq 2$ لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int tan^n x\, dx = \int tan^{n-1} x\, tan^2 x\, dx = \int tan^2 x(\, sec^2 x - 1)$$

$$\int cot^n x\, dx = \int cot^{n-1} x\, cot^2 x\;\; dx = \int cot^2 x(\, csc^2 x - 1)$$

1) $\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c = ln\,|secx| + c$

2) $\int\; tan^2 xdx\;\; = \int\;\; (sec^2 x - 1\,)dx\;\; = \;tanx - \;x\; + \;c$

3) $\int tan^3 x\, dx = \int tan\, x\, tan^2 xdx = \int tanx(Sec^2 x - 1)dx$

$$= \int tanx\, sec^2 x - tan\, x = \frac{1}{2} tan^2 x + ln|cos\, x| + c$$

4) $\int tan^4 x\, dx = \int tan^2\, x\, tan^2 xdx$

$$= \int tan^2 x(Sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int tan^2 x\, sec^2 x - tan^2\, x$$

$$= \frac{1}{3} tan^3 x - tanx + \;x\; + \;c$$

5) $\int tan^5 x\, dx = \int tan^3\, x\, tan^2 xdx = \int tan^3 x(Sec^2 x - 1)dx$

$$= \int tan^3 x\, sec^2 x - tan^3\, x$$

$$= \int tan^3 x\, sec^2 x - \; tan\, x\, tan^2 xdx$$

$$= \int tan^3 x\, sec^2 x - \; tanx(Sec^2 x - 1)dx$$

$$= \frac{1}{4} tan^4 x - \frac{1}{2} tan^2 x - ln|cos\, x| + c$$

استنتاج $\int tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1} tan^{n-1} x - \int tan^{n-2}\, x\, xdx$

6) $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c =$

7) $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1)dx = -\cot x - x + c$

8) $\int \cot^3 x\, dx = \int \cot x \cot^2 x dx = \int \cot x(\csc^2 x - 1)dx$

$$= \int \cot x \csc^2 x - \cot x = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + c$$

---

9) $\int \cot^4 x\, dx = \int \cot^2 x \cot^2 x dx$

$$= \int \cot^2 x(\csc^2 x - 1)dx$$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x$$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + c$$

---

10) $\int \cot^5 x\, dx = \int \cot^3 x \cot^2 x dx$

$$= \int \cot^3 x(\csc^2 x - 1)dx$$

$$= \int \cot^3 x \csc^2 x - \cot^3 x$$

$$= \int \cot^3 x \csc^2 x - \cot x \cot^2 x dx$$

$$= \int \cot^3 x \csc^2 x - \cot x(\csc^2 x - 1)dx$$

$$= \int \cot^3 x \csc^2 x - \cot x \csc^2 x - \cot x\, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + c$$

استنتاج

$$\boxed{\int \cot^n x\, dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x\, dx}$$

$\int sec^n x dx$ أو $\int csc^n x dx$ حيث n عدد زوجي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int sec^n x\, dx = \int sec^2 x\, sec^{n-2} x dx = \int sec^2 x\,(tan^2 x + 1)^{n-2} dx$$

$$\int csc^n x\, dx = \int csc^2 x\, csc^{n-2} x dx = \int csc^2 x\,(cot^2 x + 1)^{n-2} dx$$

$$\int sec^2 x\, dx = tan\, x + c$$

==========

$$\int sec^4 x\, dx = \int sec^2 x\,(tan^2 x + 1) dx$$
$$= \int tan^2 x\, sec^2 x + sec^2 x$$
$$= \frac{1}{3} tan^3 x + tanx + c$$

==========

$$\int sec^6 x\, dx = \int sec^2 x\,(tan^2 x + 1)^2 dx$$
$$= \int sec^2 x\,(tan^4 x + 2tan^2 x + 1) dx$$
$$= \int tan^4 x\, sec^2 x + tan^2 x\, sec^2 x + sec^2 x$$
$$= \frac{1}{5} tan^5 x + \frac{1}{3} tan^3 x + tanx + c$$

==========

$$\int csc^2 x\, dx = -cot\, x + c$$

==========

$$\int csc^4 x\, dx = \int csc^2 x\,(cot^2 x + 1) dx$$
$$= \int cot^2 x\, csc^2 x + csc^2 x$$
$$= -\frac{1}{3} cot^3 x - cotx + c$$

==========

$$\int csc^6 x\, dx = \int csc^2 x\,(cot^2 x + 1)^2 dx$$
$$= \int csc^2 x\,(cot^4 x + 2cot^2 x + 1) dx$$
$$= \int cot^4 x\, csc^2 x + cot^4 x\, csc^2 x + csc^2 x$$
$$= -\frac{1}{5} cot^5 x - \frac{1}{3} cot^3 x - cotx + c$$

$\int csc^n x dx$ أو $\int sec^n x dx$ حيث n عدد فردي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1} tanx\, sec^{n-2}\, x + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2} x\, dx$$

$$\int csc^n x\, dx = -\frac{1}{n-1} cotx\, csc^{n-2}\, x + \frac{n-2}{n-1}\int csc^{n-2} x\, dx$$

$$\int sec\, x\, dx = \int secx\, \frac{sec\, x + tan\, x}{sec\, x + tan\, x} dx$$

$$= \int \frac{sec^2\, x + sec\, x\, tan\, x}{sec\, x + tan\, x} dx$$

$$= ln|sec\, x + tan\, x| + c$$

==========

$$\int sec^3 x\, dx = \frac{1}{2} tanx\, sec\, x + \frac{1}{2}\int sec\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} tanx\, sec\, x + \frac{1}{2} ln|sec\, x + tan\, x| + c$$

==========

$$\int sec^5 x\, dx = \frac{1}{4} tanx\, sec\, x + \frac{3}{4}\int sec^3\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{4} tanx\, sec\, x + \frac{3}{8} tanx\, sec\, x + \frac{3}{8}\int sec\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{4} tanx\, sec\, x + \frac{3}{8} tanx\, sec\, x + \frac{3}{16} ln|sec\, x + tan\, x| + c$$

==========

$$\int csc\, x\, dx == \int \frac{csc^2\, x + csc\, x\, cot\, x}{csc\, x + cot\, x} dx = -\, ln|csc\, x + cot\, x| + c$$

==========

$$\int csc^3 x\, dx = -\frac{1}{2} cotx\, sec\, x + \frac{1}{2}\int csc\, x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} cotx\, sec\, x - \frac{1}{2} ln|csc\, x + cot\, x| + c$$

$$\int csc^5 x\, dx = -\frac{1}{4} cotx\, csc\, x + \frac{3}{4}\int csc^3\, x\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} cotx\, csc\, x - \frac{3}{8} cotx\, csc\, x + \frac{3}{8}\int csc\, x\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} cotx\, csc\, x - \frac{3}{8} cotx\, csc\, x - \frac{3}{16} ln|csc\, x + cot\, x| + c$$

$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$ حيث n ,m أعداد فردية لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int sin^{n-1} x\, cos^m x\, sin\, x\, dx = \int (1 - cosx)^{n-1} x\, cos^m x\, sinx\, dx$$

$$\int sin^n x\, cos^{m-1} x\, cosx\, dx = \int sin^n x\, (1 - sinx)^{m-1} x\, cosx\, dx$$

$$\int sin^3 x\, cos^3 x\, dx = \int sin^3 x\;\; cos^2 x cos\, x\, dx$$

$$= \int sin^3 x (1 - sin^2 x)\, cos\, x\, dx$$

$$= \int sin^3 x\, cos\, x - \; sin^5 x\, cos\, x\, dx$$

$$= \frac{sin^4 x}{4} - \frac{sin^6 x}{6} + c$$

حل آخر

$$\int sin^3 x\, cos^3 x\, dx = \int sin^2 x\, sin\, x\, cos^3\, x\, dx$$

$$= \int (1 - cos^2 x)\, sin\, x cos^3\, x\, dx$$

$$= \int cos^3 x\, sin\, x - \; cos^5\, x\, sin\, x\, dx$$

$$= -\frac{cos^4 x}{4} + \frac{cos^6 x}{6} + c$$

==

$$\int sin^5 x\, cos^3 x\, dx = \int sin^5 x\;\; cos^2 x cos\, x\, dx$$

$$= \int sin^5 x (1 - sin^2 x)\, cos\, x\, dx$$

$$= \int sin^5 x\, cos\, x - \; sin^7 x\, cos\, x\, dx$$

$$= \frac{sin^6 x}{6} - \frac{sin^8 x}{8} + c$$

==

$$\int sin^3 x\, cos^5 x\, dx = \int sin^2 x\, sin\, x\, cos^5\, x\, dx$$

$$= \int (1 - cos^2 x)\, sin\, x\, cos^5 dx$$

$$= \int cos^5 x\, sin\, x - \; cos^7\, x\, sin\, x\, dx$$

$$= -\frac{cos^6 x}{6} + \frac{cos^8 x}{8} + c$$

$$\int sin^n x \, cos^m x \, dx$$

١ - اذا كان m عدد فردي n عدد زوجي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة التالية

$$\int sin^n x \, cos^{m-1} x \, cosx \, dx = \int sin^n x \, (1 - sinx)^{m-1} x \, cosx \, dx$$

١ - اذا كان m عدد زوجيي n عدد فردي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة التالية

$$\int sin^{n-1} x \, sin \, xcos^m x dx = \int sinx \, (1 - cosx)^{m-1} x \, cos^m x \, dx$$

$$\int sin^3 x \, cos^2 x \, dx = \int sin^2 x \, sinx \, cos^2 \, x \, dx$$
$$= \int (1 - cos^2 x) sin \, x \, cos^2 \, x \, dx$$
$$= \int cos^2 x \, sin \, x - \, cos^4 \, x \, sin \, x \, dx$$
$$= -\frac{cos^3 x}{3} + \frac{cos^5 x}{5} + c$$

مثال /

$$\int sin^4 x \, cos^3 x \, dx = \int sin^4 x \;\; cos^2 \, xcos \, x \, dx$$
$$= \int sin^4 x (1 - sin^2 x) \, cos \, x \, dx$$
$$= \int sin^4 x \, cos \, x - \, sin^6 \, x \, cos \, x \, dx$$
$$= \frac{sin^5 x}{5} - \frac{sin^7 x}{7} + c$$

===

مثال /

$$\int sin^5 x \, cos^4 x \, dx$$
$$= \int sin^4 x \, sinx \, cos^4 \, x \, dx$$
$$= \int (1 - cos^2 x) \, ^2 sin \, x \, cos^4 \, x \, dx$$
$$= \int (1 - 2cos^2 x + cos^4 x) sin \, x \, cos^4 x dx$$
$$= \int cos^4 x \, sin \, x - \, 2cos^6 \, x \, sin \, x + cos^8 x \, sin \, x \, dx$$
$$= -\frac{cos^5 x}{5} + \frac{2cos^7 x}{7} - \frac{cos^9 x}{9} + c$$

$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$ حيث n ,m أعداد زوجية

١- اذا كانت $n = m$ فان

$$\int sin^n x\, cos^m x \quad dx = \frac{1}{2^n} \int sin^n 2x\, dx$$

$$\int sin^2 x\, cos^2 x\, dx = \frac{1}{4} \int sin^2 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{8} \int 1 - cos4x\, dx$$
$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} sin\, 4x + c$$

==

$$\int sin^4 x\, cos^4 x\, dx = \frac{1}{16} \int sin^4 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{16} \int \frac{(1-cos2x)^2}{4} dx$$
$$= \frac{1}{64} \int 1 - 2cos2x + cos^2 2xdx$$
$$= \frac{1}{64} \int 1 - 2cos2xdx + \frac{1}{128} \int 1 + cos4xdx$$
$$= \frac{1}{64} x - \frac{1}{64} sin2x + \frac{1}{128} x + \frac{1}{512} sin\, 4x + c$$

$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$ حيث n ,m أعداد زوجية

١- اذا كانت $n < m$ فان

$$\int sin^n x\, cos^m x \quad dx = \int sin^n x\, cos^n x\, cos^{m-n}$$
$$= \frac{1}{2^n} \int sin^n 2x\ \ cos^{m-n} dx$$

$$\int sin^2 x\, cos^4 x\, dx = \int sin^2 x\, cos^2 x\, cos^2 x\, dx$$
$$= \frac{1}{8} \int sin^2 2x\, (1 + cos2x) dx$$
$$= \frac{1}{8} \int sin^2 2x + sin\, ^2 2x\, cos2x\, dx$$
$$= \frac{1}{16} \int 1 - cos4x + \frac{1}{8} \int sin\, ^2 2x\, cos2x\, dx$$
$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} sin4x + \frac{1}{48} sin^3 2x + c$$

$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$ حيث n ,m أعداد زوجية

١- اذا كانت $n > m$ فان

$$\int sin^n x\, cos^m x \quad dx = \int sin^{n-m} x\, sin^m x\, cos^m x$$

$$= \frac{1}{2^n} \int sin^n 2x \;\; cos^{m-n} dx$$

$$\int sin^4 x\, cos^2 x\, dx = \int sin^2 x\, sin^2 x\, cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int sin^2 2x\, (1 - cos2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int sin^2 2x - sin^2 2x\, cos2x\, dx$$

$$= \frac{1}{16} \int 1 - cos4x - \frac{1}{8} \int sin^2 2x\, cos2x\, dx$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} sin4x - \frac{1}{48} sin^3 2x + c$$

==

$$\int sin^6 x\, cos^2 x\, dx$$

$$= \int sin^4 x\, sin^2 x\, cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int sin^2 2x\, (1 - cos2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8} \int sin^2 2x (1 - 2cos\, 2x + cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int sin^2 2x - 2sin^2 2x\, cos\, 2x + sin^2 2x cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - cos4x) dx - \frac{1}{8} \int sin^2 2x\, (2cos\, 2x) dx + \frac{1}{16} \int sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} sin4x - \frac{1}{24} sin^3 2x + \frac{1}{32} \int 1 - cos4x\, dx$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} sin4x - \frac{1}{24} sin^3 2x + \frac{1}{32} x - \frac{1}{128} sin4x + c$$

$$\int tan^n x\, sec^m x\, dx$$

١ - اذا كان m عدد زوجي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة التالية

$$\int tan^n x\, sec^{m-2} x\, sec^2 x\, dx = \int tan^n x\, (1 + tanx)^{m-2} x\, sec^2 x\, dx$$

$$\int tan^3 x\, sec^4 x\, dx = \int tan^3 x\, sec^2 x\, sec^2 x\, dx$$
$$= \int tan^3 x\, (1 + tan^2 x) sec^2 x\, dx$$
$$= \int (tan^3 x\, sec^2 x + tan^5 x sec^2 x\, dx$$
$$= \frac{tan^4 x}{4} + \frac{tan^6 x}{6} + c$$

==

$$\int tan^2 x\, sec^6 x\, dx = \int tan^2 x\, sec^4 x\, sec^2 x\, dx$$
$$= \int tan^2 x\, (1 + tan^2 x)^2 sec^2 x\, dx$$
$$= \int tan^2 x\, (1 + 2tan^2 x + tan^4) sec^2 x\, dx$$
$$= \int (tan^2 x + 2tan^4 x + tan^6) sec^2 x\, dx$$
$$= \frac{tan^3 x}{3} + \frac{2tan^5 x}{5} + \frac{tan^7}{7} + c$$

==

$$\int tan\, x\, sec^4 x dx = \int tan\, x\, sec^2 x\, sec^2 x dx$$
$$= \int tan\, x \left(tan^2 x + 1\right) sec^2 x dx$$
$$= \int tan^3 x\, sec^2 x + tanx\, sec^2 x dx$$
$$= \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x + c$$

حل اخر

$$\int tan\, x\, sec^4 x dx = \int tan\, x\, sec\, x\, sec^3 x dx$$
$$= \frac{1}{4} sec^4 x + c$$

$$\int tan^n x\, sec^m x\, dx$$

١ - اذا كان m,n أعداد فردية لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة التالية

$$\int sec^{m-1}x\, tan^{n-1}x\, secx\, tan\, x\, dx$$
$$= \int sec^{m-1}(sec^2x - 1)^{n-1}\, x\, sec\, x\, tanx\, dx$$

$$\begin{aligned}\int sec^3x\, tan^3x\, dx &= \int sec^2x\, tan^2x\, secx\, tan\, xdx\\ &= \int sec^2x\, (sec^2x - 1)secx\, tan\, xdx\\ &= \int (sec^4x - sec^2x)\, secx\, tan\, x\, dx\\ &= \frac{sec^5x}{5} - \frac{sec^3x}{3} + c\end{aligned}$$

==

$$\begin{aligned}\int sec^5x\, tan^3x\, dx &= \int sec^4x\, tan^2x\, secx\, tan\, xdx\\ &= \int sec^4x\, (sec^2x - 1)secx\, tan\, xdx\\ &= \int (sec^6x - sec^4x)\, secx\, tan\, x\, dx\\ &= \frac{sec^7x}{7} - \frac{sec^5x}{5} + c\end{aligned}$$

==

$$\begin{aligned}\int sec^3x\, tan^5x\, dx &= \int sec^2x\, tan^4x\, secx\, tan\, xdx\\ &= \int sec^2x\, (sec^2x - 1)^2secx\, tan\, xdx\\ &= \int sec^2x\, (sec^4x - 2sec^2x + 1)secx\, tan\, xdx\\ &= \int (sec^6x - 2sec^4x + sec^2x)\, secx\, tan\, x\, dx\\ &= \frac{sec^7x}{7} - \frac{2sec^5x}{5} + \frac{sec^3x}{3} + c\end{aligned}$$

==

$$\int \tan x \sin x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx$$
$$= \int \sec\ x - \cos x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| - \sin x + c$$

===

$$\int \tan^2 x \sin x\, dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \tan x \sec x - \sin x\, dx = \sec x + \cos x + c$$

حل اخر

$$\int \tan^2 x \sin x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sin x dx$$
$$= \int \sec^2 x \sin x - \sin x dx$$
$$= \int \tan x \sec x - \sin x\, dx = \sec x + \cos x + c$$

===

$$\int \tan^3 x \sin x\, dx = \int \tan x\, (\sec^2 x - 1)\sin x dx$$
$$= \int \tan x \sec^2 x \sin x - \tan x \sin x dx$$
$$= \int \tan x\ \frac{1}{\cos^2 x} \sin x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx\, dx$$
$$= \int \tan^3 x \sec - \sec x - \cos x\, dx$$
$$= \int\ (\sec^2 x - 1)\sec x \tan x - \sec x - \cos x dx$$
$$= \sec^2 x \sec x \tan x - \sec x \tan x - \sec x - \cos dx$$
$$= \frac{\sec^3 x}{3} - \sec x - \ln|\sec x + \tan x| - \sin x + c$$

==

$$\int \sin^2 x \tan x\, dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos x} dx$$
$$= \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x} dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\cos x} dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} - \cos x \sin x\, dx = -\ln|\cos x| + \frac{1}{2}\cos^2 x + c$$

==

$$\int \tan x \cos x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x\, dx = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

===

$$\int \tan^2 x \cos x \, dx = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$$
$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx$$
$$= \int \sec\ x - \cos x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| - \sin x + c$$

حل اخر

$$\int \tan^2 x \cos x \, dx = \int \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x} dx = \int \sec x - \cos x \, dx$$
$$= \ln|\sec x + \tan x| - \sin x + c$$

===

$$\int \tan^3 x \cos x \, dx = \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)\cos x dx$$
$$= \int \tan x \sec^2 x \cos x - \tan x \cos x dx$$
$$= \int \tan x \ \frac{1}{\cos^2 x} \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \cos x dx \, dx$$
$$= \int \tan x \sec x - \sin x \, dx = \sec x + \cos x + c$$

حل آخر

$$\int \tan^3 x \cos x \, dx = \int \frac{\sin^3 x \cos x}{\cos^3 x} dx$$
$$= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \tan x \sec x - \sin x \, dx = \sec x + \cos x + c$$

==

$$\int \tan^3 x \cos x \, dx = \int \frac{\sin^3 x \cos x}{\cos^3 x} dx$$
$$= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \cos^{-2} x \sin x - \sin x \, dx = \frac{-\cos^{-1}}{-1} + \cos x + c$$
$$= \frac{1}{\cos x} + \cos x + c = \sec x + \cos x + c$$

$$\int \cot x \sin x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x \, dx = \int \cos x dx = \sin x + c$$

==

$$\int cot^2 x \sin x\, dx = \int \frac{cos^2 x \sin x}{sin^2 x} dx$$
$$= \int \frac{cos^2 x}{\sin x} dx$$
$$= \int \frac{1-sin^2 x}{\cos x} dx$$
$$= \int csc\ \ x - \sin x\, dx$$
$$= -ln|csc\, x + cotx| + \cos x + c$$

حل اخر

$$\int cot^2 x \sin x\, dx = \int \frac{csc^2\, x-1}{csc\, x} dx = \int cscx - \sin x\, dx$$
$$= -ln|csc\, x + cotx| + \cos x + c$$

==

$$\int cot^3 x \sin x\, dx = \int cotx\,(csc^2 x - 1) \sin xdx$$
$$= \int cotx\, csc^2 x\, sinx - \cot x \sin xdx$$
$$= \int cotx\ \frac{1}{sin^2 x} sinx - \frac{\cos x}{\sin x} \sin xdx\, dx$$
$$= \int cotx\, cscx - \cos x\, dx = -cscx - \sin x + c$$

حل آخر

$$\int cot^3 x \sin x\, dx = \int \frac{cos^3 x \sin x}{sin^3 x} dx$$
$$= \int \frac{sin^3 x}{cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{(1-sin^2 x)cosx}{sin^2 x} dx$$
$$= \int \frac{cosx}{sin^2 x} - \frac{sin^2 x \cos x}{sin^2 x} dx$$
$$= \int cotx\, \csc x - \cos x\, dx = -cscx - \sin x + c$$

==

$$\int \sin x \sec x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

===

$$\int \sin^2 x \sec x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$$
$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx = \int \sec x - \cos x \, dx$$
$$= \ln|\sec x + \tan x| - \sin x + c$$

===

$$\int \sin x \sec^2 x dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \tan x \sec x \, dx = \sec x + c$$

===

$$\int \sin^2 x \sec^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \tan^2 x \, dx = \int \sec^2 x - 1 \, dx = \tan x - x + c$$

===

$$\int \sin^3 x \sec^2 x dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \tan^2 x \sin x \, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1) \sin x dx$$
$$= \int \sec^2 x \sin x - \sin x dx$$
$$= \int \tan x \sec x - \sin x \, dx = \sec x + \cos x + c$$

===

$$\int \sin^2 x \sec^3 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$$
$$= \int \tan^2 x \sec x \, dx$$
$$= \int \sec^3 x - \sec x \, dx$$
$$= \int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + c$$

===

$$\int \sin^3 x \sec^3 x dx = \int \tan^3 x \, dx$$
$$= \int \tan x \tan^2 x dx$$
$$= \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx$$
$$= \int \tan x \sec^2 x - \tan x = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + c$$

$$\int \cos x \csc x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cos^2 x \csc x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$$
$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} dx = \int \csc x - \sin x\, dx$$
$$= -\ln|\csc x + \cot x| + \cos x + c$$

$$\int \cos x \csc^2 x dx = \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$
$$= \int \cot x \csc x\, dx = -\csc x + c$$

===

$$\int \cos^2 x \csc^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$$
$$= \int \cot^2 x\, dx = \int \csc^2 x - 1\, dx = -\cot x - x + c$$

===

$$\int \cos^3 x \csc^2 x dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$$
$$= \int \cot^2 x \cos x\, dx$$
$$= \int (\csc^2 x - 1)\cos x dx$$
$$= \int \csc^2 x \cos x - \cos x dx$$
$$= \int \cot x \csc x - \cos x\, dx = -\csc x - \sin x + c$$

===

$$\int \sin^2 x \sec^3 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$$
$$= \int \tan^2 x \sec x\, dx$$
$$= \int \sec^3 x - \sec x\, dx$$
$$= \int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\int \sec x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

===

$$\int \cos^3 x \csc^3 x dx = \int \cot^3 x\, dx$$
$$= \int \cot x \cot^2 x dx$$
$$= \int \cot x(\csc^2 x - 1)dx$$
$$= \int \cot x \csc^2 x - \cot x = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + c$$

١- تكاملات $\sin ax \cos bx \;,\quad a \neq b$

أـ اذا كانت $a > b$

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(a+b) + \sin(a-b)\, dx$$

$$\int \sin 2x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 3x + \sin x\, dx$$
$$= -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + c$$

==

ب - اذا كانت $a < b$

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(a+b) - \sin(b-a)\, dx$$

مثال

$$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x - \sin x\, dx$$
$$= -\frac{1}{10}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + c$$

استنتاج

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + \frac{\cos(a+b)x}{a+b}\right) + c \qquad a \neq b$$

==

٢ـ تكاملات $a \neq b$, $\cos ax \cos bx$

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(a+b) + \cos(a-b)\, dx$$

مثال

$$\int \cos 4x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 7x + \cos x\, dx$$
$$= \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin x + c$$

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right) + c \qquad a \neq b$$

٢ـ تكاملات $a \neq b$, $\sin ax \sin bx$

$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(a-b) - \cos(b+a)\, dx$$

مثال

$$\int \sin 3x \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos x - \cos 5x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + c$$

$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a-b)x}{a-b} + \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right) + c \qquad a \neq b$$

$$\int \sin x \cos x \cos 3x\, dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x \ \cos 3x\, dx$$
$$= \frac{1}{4} \int \sin 5x \ - \sin x\, dx$$
$$= -\frac{1}{20} \cos 5x + \frac{1}{4} \cos x + c$$

س ١ / اوجد $\int \frac{\sin x}{\cos x - \cos x \sin^2 x} dx$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x - \cos x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x(1 - \sin^2 x)} dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos x \cos^2 x} dx$$
$$= \int \tan x \sec^2 x\, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + c$$

س ٢ / اوجد $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x) dx$

الحل /

$$\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x) dx = \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$$

س ٣/ جد $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x} dx$

الحل /

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x} dx$$
$$= \int \tan^{-3} x \sec^2 x\, dx$$
$$= \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$$

س ٤/ جد $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

الحل /

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \ \sec^2 x dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

س ٥/ اوجد $\int \ \sin 6x \cos^2 3x\, dx$

الحل /

$$\int \ \sin 6x \cos^2 3x\, dx = \int \ (2\sin 3x \cos 3x) \cos^2 3x\, dx$$
$$= 2 \int \cos^3 3x \sin 3x\, dx$$
$$= \frac{2}{3} \int \cos^3 3x\, (3\sin 3x\, dx)$$
$$= \frac{-2}{12} \cos^4 3x + c$$

س٦/ جد $\int \frac{Cos4x}{Cos2x-Sin2x}dx$

الحل /

$$\int \frac{Cos4x}{Cos2x-Sin2x}dx = \int \frac{Cos^2 2x-Sin^2 2x}{Cos2x-Sin2x}dx$$
$$= \int \frac{(Cos2x-Sin2x)(Cos2x+Sin2x)}{Cos2x-Sin2x}dx$$
$$= \int (Cos2x + Sin2x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

==

س٧/جد $\int \frac{cos^3x}{1-sinx}dx$

الحل /

$$\int \frac{cos^3x}{1-sinx}dx = \int \frac{cos^2x\, cosx}{1-sinx}dx = \int \frac{(1-sin^2)cosx}{1-sinx}dx$$
$$= \int \frac{(1-sinx)(1+sinx)cosx}{1-sinx}dx = \int (1+sinx)(cosx)dx$$
$$= \int \cos x + \sin x \cos x)dx = \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

==

س ٨/ اوجد $\int csc^2x \cos x\, dx$

الحل /

$$\int csc^2x \cos x\, dx = \int \frac{1}{sin^2x} \cos x\, dx$$
$$= \int sin^{-2}x \cos x\, dx$$
$$= \frac{sin^{-1}x}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c$$

==

س٩/ جد $\int (1 + \cos 3x)^2 dx$

$$\int (1 + \cos 3x)^2 dx = \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)\, dx$$
$$= \int \left(1 + 2cos\, 3x + \frac{1}{2} + cos\, 6x\right) dx$$
$$= x + \frac{2}{3}sin\, 3x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}sin\, 6x + c$$

س10/ جد $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}dx$

الحل /

$$\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}dx = \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x}dx = \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 2x\, dx$$

$$= \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \csc^2 2x\, dx$$

$$= \frac{3}{2}(\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c$$

==

س11/جد $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)dx$

الحل /

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x)dx = \int (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$

$$= \int (1)(\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\, 2dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

==

س12 / جد $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)dx$

$$\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)dx$$

$$= \int (\cos^2 2x \sin 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2)dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \cos^2 2x(-2\sin 2x\, dx) + \int 2\sin 2x\, dx - \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx - \int 2dx$$

$$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{\cos^3 2x}{3} - \cos 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) - 2x + c$$

$$= -\frac{\cos^3 2x}{6} - \cos 2x - \frac{5}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

==

يوم الاثنين ٢٠١٥/٧/٢٧ المصادف ١٠ شوال ١٤٣٦

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx - \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx - \int \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{\tan x} dx = \frac{-1}{2\sin^2 x} + \ln|\tan x| + c$$

==========

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} dx = \int \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$= \int 2\csc 2x + \cot x \csc^2 x \, dx$$

$$= -\ln|\csc 2x + \cot 2x| - \frac{1}{2}\cot^2 x + c$$

==========

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \csc^3 x \sec x dx = \int (1 + \cot^2 x) \csc x \sec x dx$$

$$= \int \csc x \sec x + \cot^2 x \csc x \sec x \, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin x \cos x} + \cot x \csc^2 x \, dx$$

$$= \int 2\csc 2x + \cot x \csc^2 x \, dx$$

$$= -\ln|\csc 2x + \cot 2x| - \frac{1}{2}\cot^2 x$$

==========

مثال/ جد $\int \frac{\sin x \cos x}{(2+\cos x)^2} dx$

الحل /

$$let \ \ t = 2 + \cos x \qquad dt = -\sin x \, dx$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{(2+\cos x)^2} dx = -\int \frac{t-2}{t^2} dt$$

$$= -\int \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} dt$$

$$= -\ln|t| - \frac{2}{t} + c$$

$$= -\ln|2 + \cos x| - \frac{2}{2+\cos x} + c$$

مثال / جد $\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx$

$$\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx = \int tan^2x\,\sec^2 x\,dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + c$$

مثال / جد $\int \frac{sin^2x}{cos^6x}dx$

الحل /

$$\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx = \int tan^2x\,\sec^4 x\,dx$$
$$= \int tan^2x(\tan^2 x + 1)\sec^2 x dx$$
$$= \int tan^4x\sec^2 x + \tan^2 x\,\sec^2 x\,dx$$
$$= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$$

$$\int \frac{dx}{sinx\,cos\,x} = \int \frac{2}{\sin 2x}dx = \int 2csc\,2xdx = -ln|csc\,2x + cot\,2x| + c$$

$$\int \frac{dx}{sinx\,cos\,x} = \int \frac{sin^2x+cos^2x}{sinx\,cos\,x}dx = \int \frac{sin\,x}{cos\,x} + \frac{cos\,x}{sin\,x}dx$$
$$= -ln|cos\,x| + ln|sin\,x| + c$$

$$\int \frac{dx}{sin^2x\,cos\,x} = \int \frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2x\,cos\,x}dx = \int \frac{1}{cos\,x} + \frac{cos\,x}{sin^2x}dx$$
$$= \int cscx + cot\,x\,csc\,x\,dx$$
$$= -ln|csc\,x + cot\,x| - csc\,x + c$$

$$\int \frac{dx}{sin^2x\,cos^2x} = \int \frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2x\,cos^2x}dx$$
$$= \int \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sin^2x}dx$$
$$= \int sec^2x + csc^2x\,dx$$
$$= tan\,x - cot\,x + c$$

$$\int \frac{dx}{sin^2x\,cos^2x} = \int csc^2x\,sec^2xdx = \int csc^2x\,tan^2x + csc^2x\,dx$$
$$= \int sec^2x + csc^2x\,dx = tan\,x - cot\,x + c$$

$$\int \frac{dx}{sin^2x\,cos^2x} = \int \frac{4}{sin^2 2x}dx = \int 4csc^2\,2xdx = -2cot\,2x + c$$

1) $\int (csc\,x + cot\,x)^2\,dx = \int (\csc^2 x + 2\csc x \cot x + \cot^2 x)\,dx$

$= \int (\csc^2 x + 2\csc x \cot x + \csc^2 x - 1)dx$

$= -2cot\,x - 2csc\,x - x + c$

===

$\int x \cdot 2^x\,dx$

$let \quad u = x \qquad du = dx$

$dv = 2^x \qquad v = \frac{1}{ln\,2} 2^x$

$\int x \cdot 2^x\,dx = \frac{1}{ln\,2} x2^x - \int \frac{1}{ln\,2} 2^x dx$

$= \frac{1}{ln\,2} x2^x - \frac{1}{(ln\,2)^2} 2^x + c$

===

3) $\int x\,sec\,x\,tan\,x\,dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = sec\,x\,tan\,x\,dx \qquad v = sec\,x$

$\int x\,sec\,x\,tan\,x\,dx = x\,sec\,x - \int sec\,x\,dx$

$= x\,sec\,x - ln|sec\,x + tan\,x| + c$

===

4) $\int \frac{tan^2 x + tan^4 x}{tan^2 x - tan^3 x}\,dx = \int \frac{1 + tan^2 x}{1 - tan\,x} dx$

$= \int \frac{sec^2 x}{1 - tan\,x} dx = -\ln|1 - \tan x| + c$

===

5) $\int \frac{1 - tan^2 x}{1 + tan^2 x}\,dx = \int \frac{1 - tan^2 x}{sec^2 x} dx$

$= \int cos^2 x - sin^2 x\,dx$

$= \int cos\,2x\,dx = \frac{1}{2} sin\,2x + c$

===

6) $\int \frac{sec\,x\,tan\,x}{sec^2 x - sec\,x} dx = \int \frac{tan\,x}{sec\,x - 1} dx$

$= \int \frac{tan\,x\,cos\,x}{1 - cos\,x} dx = \int \frac{sin\,x}{1 - cos\,x} dx = ln|1 - cos\,x| + c$

$$7)\ \int (x+\sin x)^2 dx = \int x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x\, dx$$
$$= \int x^2 + 2x\sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\, dx$$

$$\int 2x\sin x\, \mathrm{dx}$$
$$u = x \qquad du = dx \qquad dv = \sin x\, dx \qquad v = -\cos x$$
$$2\int x\sin x\, \mathrm{dx} = -2\mathrm{x}\cos \mathrm{x} + 2\int \cos \mathrm{x}\, \mathrm{dx} = -2\mathrm{x}\cos \mathrm{x} + 2\sin \mathrm{x} + \mathrm{c}$$

$$\therefore \int x^2 + 2x\sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\, dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - 2\mathrm{x}\cos \mathrm{x} + 2\sin \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\mathrm{x} + \mathrm{c}$$

===

$$8)\ \int \frac{\sec x\ \cos 2x}{\sin x+\sec x} dx = \int \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x+1} dx$$
$$= \int \frac{2\cos 2x}{\sin 2x+1} dx = \ln|\sin 2x + 1| + c$$

===

$$9)\ \int \frac{\sin x\ \cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx$$

===

$$10\ \int (\sin x + \cos x)^2 \cos 2x\, dx = \int (1 + 2\sin x\cos x)\cos 2x$$
$$= \int \cos 2x + \sin 2x\cos 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x + c$$

$$\int \sin 2x \cos x\, dx = 2\int \sin x \cos x \cos x\, dx = 2\int \cos^2 x \sin x\, dx$$
$$= \frac{2}{3}\cos^3 x + c$$

==========

$$\int \cos 2x \ \sin x\, dx = \int \cos^2 x \sin x - \sin^2 x \sin x\, dx$$
$$= \int \cos^2 x \sin x - (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$$
$$= \int 2\cos^2 x \sin x - \ \sin x\, dx$$
$$= -\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x + c$$

==========

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx = \int \cot x \csc^3 x\, dx = \int \csc^2 x\, ccs\, x \cot x = -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$$

==========

$$\int \frac{\sin^3 x - 4}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^3 x - 4}{\sin^2 x}dx = \int \sin x - 4\csc^2 x\, dx = -\cos x + 4\cot x$$

==========

$$\int \cos^4 x \tan x\, dx = \int \cos^3 x \sin x\, dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x + c$$

==========

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \cot^3 x \csc x\, dx$$
$$= \int \csc^3 x \cot x - \csc x \cot x\, dx$$
$$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + \csc x + c$$

==========

$$\int \frac{\sin x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \tan x \sec x\, dx = \sec x + c$$

$$\int \frac{dx}{\tan x - \sec x} = \int \frac{\cos x}{\sin x - 1}dx = \ln|\sin x - 1| + c$$

$$\int \frac{dx}{\csc x - \cot x} = \int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx = \ln|1-\cos x| + c$$

==========

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x} = \int \frac{\cos x-\sin x}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}dx$$
$$= \int \frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}dx = \frac{1}{\sin x+\cos x} + c$$

==========

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x+\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos x(1+\cos x)}dx$$
$$= \int \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x}dx$$
$$= \int \frac{\sin x-\cos x\sin x}{\cos x}dx$$
$$= \int \tan x - \sin x\, dx = -\ln|\cos x| + \cos x + c$$

==========

$$\int \frac{\tan^3 x}{\sec x+\sec^2 x}dx = \int \frac{\tan x(\sec^2 x-1)}{\sec x(1+\sec x)}dx$$
$$= \int \frac{\tan x\,(\sec x-1)}{\sec x}dx$$
$$= \int \frac{\tan x\sec x-\tan x}{\sec x}dx$$
$$= \int \tan x - \tan x\cos x\;\; dx$$
$$= \int \tan x - \sin x\, dx = -\ln|\cos x| + \cos x + c$$

==========

$$\int \sin^5 x\cos^5 x\, dx = \frac{1}{16}\int \sin^5 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{32}\int (1-\cos^2 2x)^2 \sin 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{32}\int \sin 2x - 2\cos^2 2x\sin 2x + \cos^4 2x\sin 2x dx$$
$$= \frac{1}{32}\left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos^3 2x - \frac{1}{10}\cos^5 2x\right] + c$$

==========

$$\int \sin^5 x\cos^5 x\, dx = \int \sin^4 x\sin x\cos^5 x\, dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\cos^5 x\, dx$$
$$= \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\cos^5 x dx$$
$$= \int \cos^5 x\sin x - 2\cos^7 x\sin x + \cos^9 x\sin x\, dx$$
$$= -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{4} - \frac{\cos^{10} x}{10} + c$$

==========

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x+\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin x(1+\sin x)}dx$$
$$= \int \frac{\cos x\,(1-\sin x)}{\sin x}dx$$
$$= \int \frac{\cos x-\cos x\sin x}{\sin x}dx$$

$$= \int \cot x - \cos x \, dx = \ln|\sin x| - \sin x + c$$

$$\int \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\cos 2x + x}{\cos^3 x} dx$$
$$= \int \frac{\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x}{\cos^3 x} dx$$
$$= \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos x \sin^2 x}{\cos^3 x} dx$$
$$= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2}{\cos^2 x} - \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int 1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x \, dx$$
$$= \int 1 - 3(\sec^2 x - 1) dx$$
$$= \int 1 - 3\sec^2 x + 3 \, dx = 4x - 3\tan x + c$$

===

1) $\int (\sin x - 3\sec^2 x) dx = -\cos x - 3\tan x + c$

===

2) $\int (\cos 6x \cos 3x) dx = \int (1 - 2\sin^2 3x)\cos 3x \, dx$

$$= \int \cos 3x - 2\sin^2 3x \cos 3x \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + c$$

===

3) $\int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x) dx = \int \sec^2 x - \sin^2 x \, dx$

$$= \int \sec^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \, dx$$

$$= \tan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

===

4) $\int (\cos 2x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \, dx$

$$= \int \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} \, dx = \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + c$$

===

5) $\int (1 + \cos 3x)^2 dx = \int 1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x \, dx$

$$= \int 1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x \, dx$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

$$6)\ \int (\cos x - \sin 2x)^2 dx = \int \cos^2 x - 2\cos x \sin 2x + \sin^2 2x\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - 4\cos^2 x \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\, dx$$

$$= x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

==

$$7)\ \int (\sin^2 x + \cos^4 x) dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right]^2 dx$$

$$= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\, dx$$

$$= \int \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{7}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x$$

==

$$8)\ \int \left(\sin^2 x \cos^2 x\right) dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x\ dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$9)\ \int \left(\sin^2 x + 1\right) dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + 1\right)\ dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\ dx = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

==

$$10)\ \int \left(\tan 3x \sec^5 3x\right) dx = \int \sec^4 3x \sec 3x \tan 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{15}\sec^5 3x + c$$

==

$$11)\ \int \left(\tan 2x \sec^3 2x\right) dx = \int \sec^2 2x \sec 2x \tan 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\sec^3 2x + c$$

==

$$12)\ \int (\cot x \csc^3 x) dx = \int \csc^2 x \csc x \cot x\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$$

==

$$13)\int(\cos^2 2x\,\sin x)dx=\int(2\cos^2x-1)^2\sin x\,dx$$

$$=\int 4\cos^4x\sin x-4\cos^2x\sin x+\sin x\,dx$$

$$=\frac{-4}{5}\cos^5x+\frac{4}{3}\cos^3x-\cos x+c$$

$$14)\int(\csc^2x\cos x)dx=\int\frac{1}{\sin^2x}\cos x\,dx=$$

$$=\int\csc x\cot x\,dx=-\csc x+c$$

==

$$15)\int(\sin 6x\cos^2 3x)dx=\int 2\sin 3x\cos 3x\cos^2 3x\,dx$$

$$=\int 2\sin 3x\ \cos^3 3x\,dx=\frac{-2}{12}\cos^4 3x+c$$

==

$$16)\int\frac{\cos 4x}{\cos 2x-\sin 2x}dx=\int\frac{\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\cos 2x-\sin 2x}dx$$

$$=\int\frac{(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)}{\cos 2x-\sin 2x}dx$$

$$=\int\cos 2x+\sin 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$$

==

$$17)\int(\cos 2x-\sin^2x)dx=\int\cos 2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$

$$=\int\frac{3}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\ dx=\frac{3}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x+c$$

==

$$18)\int(\cos^2 2x\cos x)dx=\int(1-2\sin^2x)^2\cos x\,dx$$

$$=\int\cos x-4\sin^2x\cos x+4\sin^4x\cos x\,dx$$

$$=\sin x-\frac{4}{3}\sin^3x+\frac{4}{5}\sin^5x+c$$

==

$$19)\int(\cot^3x\csc^4x)dx=\int\cot^2x(\cot^2x+1)\csc^2x\,dx$$

$$=\int\cot^4x\csc^2x+\cot^2x\csc^2x\,dx$$

$$=\frac{1}{5}\cot^5x-\frac{1}{3}\cot^3x+c$$

$$\int \frac{1}{(1-\sin x)^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-\sin x}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\right)^2 dx$$

$$= \int \frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

$$= \int \sec^4 x + 2\tan x \sec^3 x + \tan^2 x \sec^2 x$$

$$= \int \sec^2 x(\tan^2 x + 1) + 2 \sec^2 x(\tan x \sec x) + \tan^2 x \sec^2 x$$

$$= \int \sec^2 x \tan^2 x + \sec^2 x + 2 \sec^2 x(\tan x \sec x) + \tan^2 x \sec^2 x$$

$$= \int 2\sec^2 x \tan^2 x + \sec^2 x + 2 \sec^2 x(\tan x \sec x)$$

$$= \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + \frac{2}{3}\sec^3 x + c$$

===

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx = \int \frac{1-2\cos x+\cos^2 x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$= \int \csc^2 x - 2\csc x \cot x + \cot^2 x \, dx$$

$$= \int 2\csc^2 x - 2\csc x \cot x - 1 \, dx$$

$$= -2\cot x + 2\csc x - x + c$$

$\int \sin^2 x \cos 3x \, dx$

$= \int \sin^2 x \cos(\, 2x + \ x) \, dx$

$= \int \sin^2 x \, [\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x] \ \ dx$

$= \int \sin^2 x \, [\cos^2 x \cos x - \sin^2 x \cos x - \ 2 \sin^2 \, x \cos x \,] \ \ dx$

$= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x - 3\sin^4 x \cos x \ \ dx$

$= \int \sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x - 3\sin^4 x \cos x \ \ dx$

$= \int \sin^2 x \cos x - 4\sin^4 x \cos x \ \ dx$

عبدالسلام محمد

$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{4}{5} \sin^5 x + c$

==

التكامل المحدد

اذا كانت f(x) دالة مستمرة في الفترة [a , b] وكانت F(x) عكس مشتقة f(x) اي ان $F^{/}(x) = f(x)$ فان

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث a الحد الادنى للتكامل و b الحد الاعلى للتكامل

ملاحظات /

١ - قواعد التكامل المحدد هي نفس قواعد التكامل غير المحدد

٢ - في التكامل المحدد لا نضيف ثابت التكامل c

٣ - بعد تكامل الدالة نعوض عن قيم a , b اي $F(b) - F(a)$

أمثلة

مثال ١/ اذا كانت f(x) دالة مستمرة على الفترة [1 , 5] بحيث $F(x) = 3x^2$ مقابلة للدالة f فجد $\int_1^5 f(x)dx$

$$\int_1^5 f(x)dx = \mathrm{F}(5) - \mathrm{F}(1) = 3(5)^2 - 3(1)^2 = 75 - 3 = 72$$

===

مثال ٢/ اذا كانت f(x) دالة مستمرة على الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$ وان الدالة المقابلة للدالة f هي $, F: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ $F(x) = \sin x$ فاوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{f(x)dx}$

الحل /

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{F}(0) = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

===

مثال٣/اثبت فيما اذا كانت $F(x) = x^3 + 2$, $F: [1, 3] \to R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$

الحل /

$F(x) = x^3 + 2$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R لانها كثيرة الحدود

$\therefore$ F مستمرة على [1,3] وقابلة للاشتقاق على (1,3)

$$F^{/}(x) = 3x^2 = f(x) \quad , \forall x \in (1,3)$$

F هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$ على الفترة [1,3]

مثال٤/اثبت ان $F:[1,3] \to R\ , F(x) = \frac{1}{2} sin2x$ هي دالة مقابلة

للدالة $f: R \to R\ f(x) = cos2x$ ثم اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$

الحل /

$f(x) = cos2x \quad , \quad f: R \quad R$

$F(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R ئ

$$F(x) = \frac{1}{2} sin\ 2x$$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$$F^{/}(X) = \frac{1}{2}(cos2x)(2) = cos\ 2x = f(x)\ , \ \forall x \in R$$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = \left[\frac{1}{2} sin\ 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} sin\ 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} sin\ 2(0)$$

$$= \frac{1}{2} sin\ \left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} sin\ 0$$

$$= \frac{1}{2}(1) - 0 = \frac{1}{2}$$

خواص التكامل

أولاً / a/ اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة فاذا كانت $\forall x \in [a,b]$ و $f(x) \geq 0$ فان

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

b/ اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة فاذا كانت $\forall x \in [a,b]$ و $f(x) \leq 0$ فان

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

==

ثانيا / اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ و c عددا حقيقيا ثابتا فان

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

مثال ٥/ اذا كان $\int_2^5 f(x) = 8$ فاوجد $\int_2^5 5f(x)dx$

الحل /

$$\int_2^5 5f(x)dx = 5\int_2^5 f(x)dx = 5(8) = 40$$

==

ثالثا / اذا كانت f , g دالتان مستمرتين على الفترة $[a,b]$ و فان

$$\int_a^b [f(x) \mp g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$$

مثال٦/ اذا كانت $\int_1^3 f(x)dx = 15$, $\int_1^3 f(x)dx = 17$

جد $2)\ \int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx$ ، $1)\ \int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx$

الحل/

$$1)\ \int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 17 + 15 = 32$$

$$2)\ \int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 17 - 15 = 2$$

رابعا / اذا كانت دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فان

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال / اذا كانت $\int_3^7 f(x)dx = 8$, $\int_1^3 f(x)dx = 5$ فاوجد $\int_1^7 f(x)dx$

الحل /

$$\int_1^7 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx = 5 + 8 = 13$$

==

خامسا /

$$a)\ \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$b)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثال/ جد $\int_3^3 x\,dx$

الحل /

$$\int_3^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

==

مثال / جد $\int_3^2 3x^2dx$

الحل /

$$\int_3^2 3x^2dx = -\int_2^3 3x^2dx = -[x^3]_2^3 = -27 + 8 = -19$$

مثال/ اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \forall\, x \geq 1 \\ 3 & \forall x < 1 \end{cases}$ جد $\int_0^5 f(x)$

الحل/ f مستمرة على الفترة [0,5] وذلك لأنها :

مستمرة عند x = 1 لان

$\mathbf{1 - \mathit{F}(1) \;=\; 2(1) \;+\; 1 \;=\; 2 \;+\; 1` = \;3}$

$\mathbf{2\text{-}\ \lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1} 2x+1 \;=\; 2(1)+1 \;=2+1=3=L_1 \\ \lim_{x\to 1} 3 = 3 = L_2 \end{cases}}$

∴ غاية موجودة عند **x = 1** لان $\mathbf{L_1 = L_2}$

$\mathbf{3\text{-}\ \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3}$

F مستمرة عند x = 1

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x: x > 1\}$, $\{\, x: x < 1\}$

بما ان الدالة مستمرة على $[\mathbf{0, 5}]$

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = \int_0^1 3dx + \int_1^5 (2x+1)dx$$

$$= [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5$$

$$= [3] - (0) + [25+5] - [1+1] = 3 + 30 - 2 = 31$$

س٤/ اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & \forall\, x \geq 3 \\ 6 & \forall x < 3 \end{cases}$ جد $\int_1^4 f(x)$

الحل/ f مستمرة على الفترة [1,4] وذلك لأنها مستمرة عند x = 3 لان

$\mathbf{1 - \mathit{F}(3) \;=\; 2(3) \;= 6}$

$\mathbf{2\text{-}\ \lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3} 2x \;=\; 2(3) = 6 = L_1 \\ \lim_{x\to 3} 6 = 6 = L_2 \end{cases}}$

∴ غاية موجودة عند **x = 3** لان $\mathbf{L_1 = L_2}$

$\mathbf{3\text{-}\ \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 6}$

F مستمرة عند x = 3

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x: x > 1\}$, $\{\, x: x < 1\}$

بما ان الدالة مستمرة على $[\mathbf{0, 5}]$

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$

$$= \int_1^3 6dx + \int_3^4 (2x)dx \;= [6x]_1^3 + [x^2]_3^4$$

$$= [18-6] + [16-9] = 12 + 7 = 19$$

جد التكاملات الآتية

1) $\int_1^3 x^3\, dx = [\frac{x^4}{4}]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{1} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$

==========

2) $\int_{-1}^{2} (4x-1)dx = \left[\frac{4x^2}{2} - x\right]_{-1}^{2} = [2x^2 - x]_{-1}^{2}$

$= [2(2)^2 - 2] - [2(-1)^2 - (-1)]$

$= [8 - 2] - [2 + 1] = 6 - 3 = 3$

==========

3) $\int_1^2 (x^2 + 2x + 1)dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x]_1^2 = [\frac{x^3}{3} + x^2 + x]_1^2$

$= [\frac{8}{3} + 2^2 + (2)] - [\frac{1}{3} + 1^2 + (1)]$

$= [\frac{8}{3} + 4 + 2] - [\frac{1}{3} + 2]$

$= [\frac{8}{3} + \frac{18}{3}] - [\frac{1}{3} + \frac{6}{2}] = \frac{26}{3} - \frac{7}{3} = \frac{19}{3}$

==========

4) $\int_1^2 (3x^2 + 2x)dx = [x^3 + x^2]_1^2$

$= [(2)^3 + (2)^2] - [(1)^3 + (1)^2]$

$= [8 + 4] - [1 + 1] = 12 - 2 = 10$

==========

5) $\int_{-2}^{2} (3x - 2)dx = [\frac{3x^2}{2} - 2x]_{-2}^{2}$

$= \left[\frac{3(2)^2}{2} - 2(2)\right] - \left[\frac{3(-2)^2}{2} - 2(-2)\right]$

$= [6 - 4] - [6 + 4]$

$= 2 - 10 = -8$

$$6)\ \int_1^3 (x^4+4x)dx = \left[\frac{x^5}{5}+2x^2\right]_1^3 = \left[\frac{3^5}{5}+2(3)^2\right]-\left[\frac{1^5}{5}+2(1)^2\right]$$

$$=\frac{243}{5}+18-\frac{1}{5}-2=\frac{242}{5}+16=\frac{242}{5}+\frac{80}{5}=\frac{322}{5}$$

$$7)\ \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{-1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}dx = [2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_1^4$$

$$=[2\sqrt{\mathrm{x}}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}]_1^4$$

$$=\left[2\sqrt{4}+\frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right]-\left[2\sqrt{1}+\frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right]$$

$$=\left[4+\frac{2}{3}(8)\right]-\left[2+\frac{2}{3}\right]$$

$$=4+\frac{16}{3}-2-\frac{2}{3}=\frac{12+16-6-2}{3}=\frac{20}{3}$$

$$8)\ \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{-1}{2}}(2xdx)=\frac{1}{2}[\,2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}]_0^1$$

$$=[\sqrt{x^2+1}]_0^1=[\sqrt{1+1}]-[\sqrt{0+1}]\ =\sqrt{2}-1$$

$$9)\ \int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}dx=-\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx=-\int_2^3 (x^2+x+1)dx$$

$$=-[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x]_2^3=-\left[\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+3\right]+\left[\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\right]$$

$$=-\left[9+\frac{9}{2}+3\right]+\left[\frac{8}{3}+2+2\right]=-12-\frac{9}{2}+\frac{8}{3}+4$$

$$=-8-\frac{9}{2}+\frac{8}{3}=-\frac{48}{6}-\frac{27}{6}+\frac{16}{6}=-\frac{59}{6}$$

---

10) $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx = \int_1^3 \frac{2x^3}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}dx = \int_1^3 2x - 4 + 5x^{-2}dx$

$$= \left[x^2 - 4x + \frac{5x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[x^2 - 4x - \frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$= \left[9 - 12 - \frac{5}{3}\right] - \left[1 - 4 - \frac{5}{1}\right]$$

$$= -3 - \frac{5}{3} + 8 = 5 - \frac{5}{3} = \frac{15-5}{3} = \frac{10}{3}$$

مثال ١١/ جد التكامل $\int_{-3}^{4}|x|dx$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -\mathrm{x} & \mathrm{x} < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{4}|x|dx = \int_{-3}^{0}(-x)dx + \int_0^4 x\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= 0 - \left[-\frac{9}{2}\right] + \left[\frac{16}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

مثال ١٢/ جد التكامل $\int_0^2|x-1|dx$

$$|x-1| = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ 1 - \mathrm{x} & \mathrm{x} < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2|x-1|dx = \int_0^1(1-x)dx + \int_1^2(x-1)dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\right] - (0) + \left[\frac{4}{2} - 2\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2} + [2-2] - \left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

مثال ١٣/ جد التكامل $\int_{-1}^{1}|x+1|dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -(x+1) & x < -1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}|x+1|dx = \int_{-1}^{1}(x+1)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2}+1\right] - \left[\frac{1}{2}-1\right]$$
$$= \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$14)\ \int_0^1 \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x+2\sqrt{x}+2\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}}+2x+2x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$= \left[\frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}}+1^2+\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right]-[0]$$
$$= \frac{2}{5}+1+\frac{2}{3} = \frac{6}{15}+\frac{15}{15}+\frac{10}{15} = \frac{31}{15} = 2\frac{1}{15}$$

$$15)\ \int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}dx = \int_0^3 (x^2+16)^{\frac{-1}{2}}\,2xdx = [2(x^2+16)^{\frac{1}{2}}]_0^3$$

$$= [2\sqrt{x^2+16}]_0^3 = \left[2\sqrt{9+16}\right]-\left[2\sqrt{0+16}\right]$$

$$= 2\sqrt{25}-2\sqrt{16} = 2(5)-2(4) = 10-8 = 2$$

$$16)\ \int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}dx = \int_2^3 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}dx$$

$$= \int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}dx$$

$$= \int_2^3 (x+1)(x^2+1)\mathrm{dx}$$

$$= \int_2^3 x^3 + x^2 + x + 1\ )dx$$

$$= \left[\frac{\mathrm{x}^4}{4} + \frac{\mathrm{x}^3}{3} + \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{x}\ \right]_2^3$$

$$= \left(\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right)$$

$$= \left(\frac{81}{4} + \frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2\right)$$

$$= \frac{81}{4} + \frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3 - 4 - 9 + \frac{9}{2} + 3$$

==

$$17)\ \int_4^0 x(x-1)(x-2)dx = -\int_0^4 x(x^2-2x-x+2)\,dx$$

$$= -\int_0^4 x(x^2-3x+2)dx$$

$$= -\int_0^4 (x^3-3x^2+2x)dx$$

$$= -[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2]_0^4$$

$$= -\left[\frac{4^4}{4} - 4^3 + 4^2\right] + [0]$$

$$= -[64-64+16] = -16$$

س/ اثبت ان $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2$

$$\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^8 \frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}}{(x)^{\frac{2}{3}}} dx$$

$$= 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right) dx$$

$$= [3(\frac{2}{3}(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}]_1^8$$

$$= [2(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}]_1^8$$

$$= [2\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}]_1^8$$

$$= \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{8}-1)^3}\right] - \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3}\right]$$

$$= 2\sqrt{(2-1)^3} - 2\sqrt{(1-1)^3} = 2\sqrt{1} - 0 = 2$$

س/ اثبت ان $\int_{-2}^4 |3x-6|\, dx = 30$

الحل /

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & x \geq 2 \\ -(3x-6) & x < 2 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^4 |3x-6| dx = \int_{-2}^2 -(3x-6)dx + \int_2^4 3x-6\, dx$$

$$= \left[\frac{-3x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^2 + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_2^4$$

$$= \left[\left(\frac{-3(4)}{2} + 6(2)\right) - \left(\frac{-3(4)}{2} + 6(-2)\right)\right] + \left[\left(\frac{3(16)}{2} - 6(4)\right) - \left(\frac{3(4)}{2} - 6(2)\right)\right]$$

$$= [(-6+12) - (-6-12)) + [(24-24) - (6-12)]$$

$$= [(6) - (-18)] + [(0) - (-6)] = 6 + 18 + 0 + 6 = 30$$

مثال7/ جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_0^a (2x-1)dx = 42$

$\int_0^a (2x-1)dx = 42$

$\rightarrow [x^2 - x]_0^a = 42$

$\rightarrow [a^2 - a] - [0] = 42$

$\rightarrow a^2 - a - 42 = 0$

$(a-7)(a+6) = 0 \Longrightarrow \quad a = 7 \quad or \quad a = -6$

==

مثال8/ جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_a^2 (3+2x)dx = 6$

$\int_a^2 (3+2x)dx = 6$

$\rightarrow [3x + x^2]_a^2 = 6$

$\rightarrow [3(2) + 2^2] - [3a + a^2] = 6$

$\rightarrow 10 - 3a - a^2 - 6 = 0$

$\rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0$

$(a+4)(a-1) = 0$

$a = -4 \quad or \quad a = 1$

==

مثال7/ جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^b (13-4x)dx = 9$

$\int_1^b (13-4x)dx = 9$

$\rightarrow [13x - 2x^2]_1^b = 9$

$\rightarrow [13(b) - 2b^2] - [13 - 2] = 9$

$\rightarrow 13b - 2b^2 - 11 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 2b^2 - 13b + 20 = 0$

$(2b-5)(b-4) = 0$

$2b - 5 = 0 \qquad 2b = 5 \qquad b = \frac{5}{2}$

$or \quad b - 4 = 0 \qquad b = 4$

أعداد الأستاذ عبدالسلام محمد علي ٢٣ رمضان ١٤٣٦هـ المصادف ١٠ تموز ٢٠١٥

س٤/ $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فاذا كان $\int_1^6 f(x)dx = 6$ وكان $\int_{-2}^6 [f(x)+3]dx = 32$ فجد $\int_{-2}^1 f(x)dx$

الحل /

$$\int_{-2}^{6}[f(x)+3]dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)dx + \int_{-2}^{6} 3dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)dx + [3x]_{-2}^{6} = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)dx + [18+6] = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)dx = 32 - 24$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)dx = 8$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{6} f(x)dx = 8$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx + 6 = 8$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = 8 - 6$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = 2$$

===

س٦/لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى $-5 =$
جد $\int_1^3 f(x)dx$
الحل/ $f(x)=x^2+2x+k$

$f^{/}(x)=2x+2$

$f^{/}(x)=0 \qquad 2x+2=0 \qquad 2x=-2 \qquad x=-1$

$\therefore$ $(-1,5)$ *نقطة نهاية صغرى محلية نعوضها في* f(x)

$-5=(-1)^2+2(-1)+k$

$-5=1-2+k \qquad k=-5+1 \qquad k=-4$

$f(x)=x^2+2x-4$

$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 x^2+2x-4\,dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_1^3$

$=\left[\frac{27}{3}+9-12\right]-\left[\frac{1}{3}+1-4\right]$

$=[9+9-12]-\left[\frac{1}{3}-3\right]=6-\left(\frac{1-9}{3}\right)=6+\frac{8}{3}=\frac{26}{3}$

==

س٧/ اذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب (a , b) جد القيمة العددية
للمقدار: $\int_0^b f^{/}(x)dx-\int_0^a f^{//}(x)dx$
الحل /
بما ان للدالة نقطة انقلاب فاذن $f^{//}(x)=0$

$f(x)=(x-3)^3+1$

$f^{/}(x)=3(x-3)^2$

$f^{//}(x)=6(x-3)$

$f^{//}(x)=0 \qquad 6(x-3)=0 \qquad x=3$

نعوض قيمة x في الدالة $f(x)$

$y=f(3)=(3-3)^3+1 \qquad y=1$

نقطة الانقلاب $(a,b)=(3,1)$

$\int_0^1 f^{/}(x)dx-\int_0^3 f^{//}(x)dx=\int_0^1 3(x-3)^2dx-\int_0^3 6(x-3)dx$

$=[(x-3)^3]_0^1-[3(x-3)^2]_0^3$

$=[(1-3)^3-(0-3)^3]-[3(3-3)^2-3(0-3)^2]$

$=[-8+27]-3[0-9]=19+27=46$

مثال/

اذا كان $\int_1^3 g(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 6$ جد $\int_1^3 [f(x) - g(x) + 4x]dx$

$$\int_1^3 [f(x) - g(x) + 4x]dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x) + \int_1^3 4x\,dx$$
$$= 6 - 2 + [2x^2]_1^3$$
$$= 4 + [2(9-1)]$$
$$= 4 + 16 = 20$$

===

مثال/اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\,dx = [tan\,x]_0^{\frac{\pi}{4}} = tan\,\frac{\pi}{4} - tan\,0 = 1 - 0 = 1$$

===

مثال/اوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} csc^2 x\,dx$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} csc^2 x\,dx = [-cot\,x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -cot\,\frac{\pi}{2} + cot\,\frac{\pi}{4} = 0 + 1 = 1$$

===

مثال/اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sec\,x\,tan\,x\,dx$

الحل /

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} sec\,x\,tan\,x\,dx = [sec\,x]_0^{\frac{\pi}{3}} = sec\,\frac{\pi}{3} - sec\,0 = 2 - 1 = 1$$

===

مثال/اوجد $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{\sqrt{sin\,x}} dx$

الحل/

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{\sqrt{sin\,x}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^{-\frac{1}{2}} cos\,x\,dx$$
$$= 2\left[\sqrt{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2\left[\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right]$$
$$= 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 2 - \sqrt{2}$$

س/ جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x dx$

الحل /

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_1^a = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left[\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}a\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = 2\left[tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right]$$

$$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-1 = 2(1-0)$$

$$a^2+a-2=4$$

$$a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0$$

$$a=-3 \quad or \quad a=2$$

==

1) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

2) $\int_4^8 x\sqrt{x^2-15}\ dx$

3) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx$

4) $\int_0^4 \sqrt{x^2+25}\,(2x+5)dx$

5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

6) $\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

7) $\int_0^4 \sqrt{x}\ (x+6)dx$

8) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{3x^3-2x^5}$

9) $\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2} dx$

10) $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

11) $\int_1^2 \frac{1}{(3x-4)^2} dx$

12) $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$

13) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}} dx$

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

اذا كانت

$$y = \ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \ln u(x) \Longrightarrow y' = \frac{1}{u(x)} \frac{du}{dx}$$

==========

س٩/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :-

1) $y = \ln(2x^2 - 3)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{2x^2-3}$$

==========

2) $y = \ln(5x^3 - x + 1)$

الحل/

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15x^2-1}{5x^3-x+1}$$

==========

3) $y = \ln\sqrt{x}$ $\quad y = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x \quad y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$

4) $y = \sqrt{\ln 2x}$

5) $y = (\ln x^2)^3$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 3(\ln x^2)^2\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \frac{6(\ln x^2)^2}{x}$$

==========

6) $y = \ln\sin 5x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 5x(5)}{\sin 5x} = 5\cot 5x$$

==========

7) $y = \ln\tan 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^2 3x\,(3)}{\tan 3x} = \frac{3\,sec^2 3x}{\tan 3x}$$

==========

8) $y = \ln 3x$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

$9)\ y = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

الحل /

$$y = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = lnx - ln\,2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x}$$

$10)\ y = \ln(x^2)$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$11)\ y = ln\left(\frac{1}{x}\right)^3$

الحل /

$$y = ln\left(\frac{1}{x}\right)^3 = ln\left(\frac{1^3}{x^3}\right) \Longrightarrow \quad y = \ln x^{-3}$$
$$y = \ln x^{-3}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} = -3x^{-1} = \frac{-3}{x}$$

$12)\ y = (\ln x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{2\,lnx}{x}$$

$13)\ y = \ln(2 - \cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$$

$$1)\ \int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = [\ln|x+1|]_0^3$$
$$= \ln(3+1) - \ln(0+1)$$
$$= \ln 4 - \ln 1$$
$$= \ln 4 - 0 = \ln 2^2 = 2\ln 2$$

===

$$2)\ \int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}dx = \left[\ln\left|x^2+9\right|\right]_0^4$$
$$= \ln(16+9) - \ln(0+9)$$
$$= \ln 25 - \ln 9$$
$$= \ln\frac{25}{9} = \ln\left(\frac{5}{3}\right)^2 = 2\ln\frac{5}{3}$$

===

$$3)\ \int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx = \left[\ln\left|x^3+4x+1\right|\right]_0^1$$
$$= \ln(1+4+1) - \ln(0++0+1)$$
$$= \ln 6 - \ln 1$$
$$= \ln 6 + 0 = \ln 6$$

===

$$4)\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}dx = [\ln|2+\tan x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \ln\left|2+\tan\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|2+\tan(-\frac{\pi}{4})\right|$$
$$= \ln|2+1| - \ln|2-1|$$
$$= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3 - 0 = \ln 3$$

===

$$5)\ \int \frac{\ln x}{x}dx = \int hn\ x \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

===

$$6)\ \int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + c$$

===

$$7)\ \int \frac{dx}{x(1\ln x)^2}$$

$$let\quad u = 1+\ln x \qquad du = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x(1\ln x)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -u^{-1} + c = -\frac{1}{1+\ln x} + c$$

$$8)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$= [-ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| + ln|\cos 0|$$

$$= -ln\frac{1}{2} + ln1 = -ln\frac{1}{2} + 0$$

$$9)\ \int \frac{x}{2x^2+5} dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{2x^2+5} dx = \frac{1}{6} ln\left|2x^2+5\right| + c$$

==

الدالة الآسية : e^x (أساس e) هي عكس دالة اللوغاريتم الطبيعي ونستنتج جميع خواصها من هذه الحقيقة

مشتقة الدالة الآسية e^u هي $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

مثال / لتكن $y = e^{2x}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$y = e^{2x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{2x}(2) = 2e^{2x}$

مثال / لتكن $y = e^{\tan x}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$y = e^{\tan x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \sec^2 x$

مثال / لتكن $y = e^{-5x^2+3x+5}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$y = e^{-5x^2+3x+5} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-5x^2+3x+5}(-10x+3)$

مثال / لتكن $y = x^2 e^x$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$y = x^2 e^x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 e^x + e^x\, 2x$

مثال / لتكن $y = e^{x^2} \ln|2x|$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$y = e^{x^2} \ln|2x| \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x^2} \cdot \frac{2}{2x} + \ln|2x| e^{2x} \cdot 2x$

مثال / لتكن $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{2x}-2e^0+e^{-2x})-(e^{2x}+2e^0+e^{-2x})}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$= \frac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$$

مثال / لتكن $y = \cos(e^{\pi x})$ جد $\frac{dy}{dx}$

$y = \cos(e^{\pi x}) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(e^{\pi x}) \cdot e^{\pi x} \cdot \pi = -\pi e^{\pi x} \sin(e^{\pi x})$

تمارين

س ١/جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :-

1) $y = \frac{e^{-2x}}{x}$

2) $y = (e^{x^2} + 1)^3$

3) $y = e^{(x-e^{3x})}$

4) $y = cos(e^{x^2 \cdot sin\, x})$

5) $y = e^{ax\, cos\, bx}$

6) $y = e^{x^2 sec\, 2x}$

7) $y = e^{x^2} csc\,(e^{2x})$

8) $y = tan\left(e^{x^2 \cdot sin\, x}\right)$

9) $y = \frac{e^{2x}+e^{-3x}}{e^{x^2}-e^{-2x}}$

10) $y = 5x^3 e^{3x^2}$

11) $y = e^{3x^2} ln|2x^3|$

12) $y = ln\left|\frac{x^2+1}{x^2}\right|$

تكامل الدالة الاسية e^u

$d(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$ تقودنا الى صيغة التكامل $\int e^u du = e^u + c$

1) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\, 2x\, dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + c$

2) $\int_{ln3}^{ln5} e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}\, e^{2x}\right]_{ln3}^{ln5} = \frac{1}{2}\left[e^{2ln5} - e^{2ln3}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[e^{ln\,25} - e^{ln9}\right]$

$= \frac{1}{2}[25-9] = \frac{1}{2}[16] = 8$

3) $\int_0^{ln2} e^{-x} dx = [-\, e^{-x}]_0^{ln2}$

$= -\, e^{-ln2} + \; e^0$

$= -\, e^{ln2^{-1}} + \; 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

4) $\int_0^1 (1+e^x)^2\, e^x dx = \left[\frac{1}{3}(1+\; e^x)^3\right]_0^1 =$

$= \frac{1}{3}[(1+\; e^1)^3 - (1+\; e^0)^3]$

$= \frac{1}{3}[(1+\; e^x)^3 - (1+1)^3]$

$= \frac{1}{3}[(1+\; e^x)^3 - 8]$

5) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = \left[\, e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}$

$= e^2 - e^1 = e^2 - e$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cos\,x} sinx\; dx = [-e^{cos\,x}]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -e^{cos\frac{\pi}{2}} + e^{cos\,0} = -e^0 + e^1 = -1 + e$

7) $\int sec^2 3x\; e^{tan3\theta} dx = \frac{1}{3}\int e^{tan3\theta}\; 3sec\;3x\;dx = \frac{1}{3}\; e^{tan3\theta} + c$

8) $\int_1^2 x e^{-lnx} dx = \int_1^2 x e^{(lnx)^{-1}} dx$

$= \int_1^2 x\cdot x^{-1} dx = \int_1^2 dx$

$= \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

9) $\int \sqrt{e^{2x-4}} dx = \int \sqrt{e^{2(x-2)}}\; dx = \int e^{x-2} dx = e^{x-2} + c$

مبرهنة / $\frac{da^u}{dx} = a^u \cdot \frac{du}{dx} \ln a$

البرهان

$$\frac{da^u}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{u \ln a}\right) = e^{u \ln a} \cdot \frac{d}{dx}(u \ln a) = a^u \cdot \frac{du}{dx} \ln a$$

مثال / جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 3^{2x-5}$

الحل /

$y = 3^{2x-5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3^{2x-5}\,(2)ln3 = (2ln3)3^{2x-5}$

مثال / جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 5^{\sin x}$

الحل /

$y = 5^{\sin x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 5^{\sin x}\,(\cos x)ln5 = (\,ln3)5^{\sin x} \cdot \cos x$

مثال / جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 2^{-x^2}$

الحل /

$y = 2^{-x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2^{-x^2}\,(-2x)ln2 = (-2xln2)2^{-x^2}$

مثال / جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 9^{\sqrt{x}}$

الحل /

$y = 9^{\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) ln9 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\, ln9\right) 9^{\sqrt{x}}$

مث

ال / جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 7^{-\frac{x}{4}}$

الحل /

$y = 7^{-\frac{x}{4}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 7^{-\frac{x}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right) ln7 = \left(-\frac{1}{4} ln7\right) 7^{-\frac{x}{4}}$

مثال / جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي (واجب)

1) $y = 3^{\cos x^2}$ 3) $y = 2^{\tan 3x^2}$ 5) $y = 2^{\sqrt[3]{x^2}}$

2) $y = 4^{\csc x^3}$ 4) $y = 4^{\sec x^3}$ 6) $y = 7^{\cot 5x}$

الدوال العكسية

$y = sin^{-1}x$ $\qquad$ $x = siny$

$sin^{-1}(sin\, x) = x$ $\qquad$ $sin(sin^{-1}x) = x$

مشتقة الدوال العكسية

1) $\frac{d}{dx} sin^{-1}x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ 2) $\frac{d}{dx} cos^{-1}x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $\frac{d}{dx} tan^{-1}x = \frac{dx}{1+x^2}$ $\qquad$ 4) $\frac{d}{dx} cot^{-1}x = -\frac{dx}{1+x^2}$

5) $\frac{d}{dx} sec^{-1}x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ 6) $\frac{d}{dx} csc^{-1}x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

امثلة / اوجد مشتقات الدوال التالية

1) $f(x) = xsin^{-1}x \Longrightarrow f^{/}(x) = sin^{-1}x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $f(x) = x^2cos^{-1}x \Longrightarrow f^{/}(x) = 2x\, cos^{-1}x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $f(x) = tan^{-1}\sqrt{x-1} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{1}{1+x-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

4) $f(x) = sin^{-1}(2x-3) \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$

مثال ١ / اذا كانت $f(x) = x\ csc^{-1}\sqrt{x-1}$ فجد $f^{/}(\mathrm{x})$

$$f^{/}(x) = csc^{-1}\sqrt{x-1} - x\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-1}}$$

$$= csc^{-1}\sqrt{x-1} - \frac{x}{2(x-1)\sqrt{x-2}}$$

===

مثال ٢/ اذا كانت $f(x) = sec^{-1}(x^2-x)$ فجد $f^{/}(\mathrm{x})$

$$f^{/}(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}}$$

===

مثال ٣/ اذا كانت $f(x) = sec^{-1}\sqrt{x-1}$ فجد $f^{/}(\mathrm{x})$

$$f^{/}(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-1}} = \frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-2}}$$

===

مثال ٤ / إذا كانت $f(x) = tan^{-1}(cos^{-1}\sqrt{x})$ فجد $f^{/}(\mathrm{x})$

الحل /

$$f^{/}(x) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(cos^{-1}\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}\ (\sqrt{1-\mathrm{x}})(1+(cos^{-1}\sqrt{\mathrm{x}})^2}$$

===

مثال ٥ / اذا كانت $f(x) = sin^{-1}(sin\ x + cos\ x)$ فجد $f^{/}(\mathrm{x})$

$$f^{/}(x) = \frac{cos\ x - sin\ x}{\sqrt{1-(sin\ x+cos\ x)^2}}$$

===

مثال ٦ / اذا كانت $f(x) = (tan^{-1}x + cot^{-1}x)^2$ فجد $f^{/}(\mathrm{x})$

$$f^{/}(x) = 2(tan^{-1}x + cot^{-1}x)\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) = 0$$

مثال٧ / اذا كانت $f(x) = sin^{-1}3x - cos^{-1}3x$ فجد $f^{/}(\mathrm{x})$

الحل /

$$f^{l}(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{6}{\sqrt{1-x^2}}$$

==

مثال٨ / اذا كانت $f(x) = tan^{-1}3x - cot^{-1}2x$ فجد $f^{/}(\mathrm{x})$

$$f^{l}(x) = \frac{3}{1+9x^2} + \frac{2}{1+4x^2}$$

==

مثال٩ / اذا كانت $sin^{-1}(xy) + 2cos^{-1}(xy) = 2$ فجد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

$$\frac{x\frac{dy}{dx}+y}{\sqrt{1-(xy)^2}} - 2\,\frac{x\frac{dy}{dx}+y}{\sqrt{1-(xy)^2}} = 0$$

$$\frac{-x\frac{dy}{dx}-y}{\sqrt{1-(xy)^2}} = 0 \Longrightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

==

مثال١٠/ اذا كانت $y^2 + x\,tan^{-1}\sqrt{xy} + sin^{-1}(x^2 - y^2) = 0$ فجد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

$$2y\frac{dy}{dx} + tan^{-1}\sqrt{xy} + \frac{x^2\frac{dy}{dx}+xy}{1+(xy)^2} + \frac{2x-2y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1-(x^2-y^2)^2}} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + \frac{x^2\frac{dy}{dx}}{1+(xy)^2} - \frac{2y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1-(x^2-y^2)^2}} = -tan^{-1}\sqrt{xy} - \frac{xy}{1+(xy)^2} - \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-y^2)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2y + \frac{x^2}{1+(xy)^2} - \frac{2y}{\sqrt{1-(x^2-y^2)^2}}\right) = -tan^{-1}\sqrt{xy} - \frac{xy}{1+(xy)^2} - \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-y^2)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-tan^{-1}\sqrt{xy}-\frac{xy}{1+(xy)^2}-\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-y^2)^2}}}{\left(2y+\frac{x^2}{1+(xy)^2}-\frac{2y}{\sqrt{1-(x^2-y^2)^2}}\right)}$$

مثال ١١ / اذا كانت $xy^2\cos 2x + y^2\cos(x-y) + x = 1$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$-2xy^2\sin 2x + x\cos 2x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2\cos 2x - 2y\cos(x-y)\frac{dy}{dx} + y^2\sin(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

$$x\cos 2x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - 2y\cos(x-y)\frac{dy}{dx} + y^2\sin(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = 2xx^2\sin 2x - y^2\cos 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2xy\cos 2x - 2y\cos(x-y) + y^2\sin(x-y)\right) = 2xy^2\sin 2x - y^2\cos 2x - y^2\sin(x-y) - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2\sin 2x - y^2\cos 2x - y^2\sin(x-y) - 1}{2xy\cos 2x - 2y\cos(x-y) + y^2\sin(x-y)}$$

==

مثال ١٢ / اذا كانت $\tan^{-1}x + \cot^{-1}y = 1$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dx}{1+x^2} - \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y(1+x^2) - 2x(1+y^2)}{(1+x^2)^2}$$

==

مثال ١٣ / اذا كان $x = \tan^{-1}t \quad , \quad y = \sqrt{1-t^2}$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{1+t}{1} = -\frac{t+t^2}{\sqrt{1-t^2}}$$

==

مثال ١٤ / اذا كان $x = \cos^3 t \quad , \quad y = \sin^3 t$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t\cos t \qquad \frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t\sin t} = -\tan t$$

س٧/ اذا كان $x = sin^{-1}t$, $y = \frac{1}{2}t^2$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$$\frac{dy}{dt} = t \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = t\sqrt{1-t^2}$$

==

س٨/ اذا كان $x = sec\,t$, $y = tan\,t$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dt} = sec^2 t \qquad \frac{dx}{dt} = sec\,t\,tan\,t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{sec^2 t}{sec\,t\,tan\,t} = \frac{sec\,t}{tan\,t} = sec\,t\,cot\,t = csc\,t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -csc\,t\,cot\,t$$

==

تمارين

س١ / اذا كانت $y = \frac{x\,sin^{-1}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} + x}$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

س٢ / اذا كانت $2xy = \left(\frac{cos^{-1}x}{sin^{-1}x}\right)^3$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

س١/ اذا كانت $\cos^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$ فجد $f^{/}(\text{x})$

$$f^{/}(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\cdot\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{x^2\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}+\frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}$$

==

س٢ / اذا كانت $\csc^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ فجد $f^{/}(\text{x})$

$$f^{/}(x)=\frac{-1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}$$

==

س٣ / اذا كانت $\sec^{-1}\sqrt{x^2+4}=f(x)$ فجد $f^{/}(\text{x})$

$$f^{/}(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{(\sqrt{x^2+4})^2+1}}=\frac{x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+5}}$$

==

س٤ / اذا كانت $\sec^{-1}x+\csc^{-1}x=f(x)$ فجد $f^{/}(\text{x})$

الحل /

$$f^{l}(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}=0$$

==

س٥ / اذا كانت $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=f(x)$ فجد $f^{/}(\text{x})$

الحل /

$$f^{l}(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\frac{(1-x^2)(2)-(2x)(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2+4x^2}$$

تكاملات تؤدي الى الدوال المثلثية العكسية

تكاملات تؤدي الى الدوال المثلثية العكسية أعداد الاستاذ عبدالسلام محمد

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1}x + c$ 2) $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = cos^{-1}x + c$

3) $\int \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}x + c$ 4) $\int \frac{-dx}{1+x^2} = cot^{-1}x + c$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = sec^{-1}x + c$ 6) $\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = csc^{-1}x + c$

مثال ١/ اوجد $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$

الحل /

$let\ \ t = x^2 \qquad dt = 2xdx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2} sin^{-1}\frac{t}{2} + c = \frac{1}{2} sin^{-1}\frac{x^2}{2} + c$$

==

مثال ٢/ اوجد $\int \frac{sec^2x}{\sqrt{9-tan^2x}} dx$

الحل /

$let\ \ t = tan\,x \qquad dt = sec^2xdx$

$$\int \frac{sec^2x}{\sqrt{9-tan^2x}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = sin^{-1}\frac{t}{3} + c = sin^{-1}\frac{tanx}{3} + c$$

==

مثال ٣/ اوجد $\int \frac{x}{9+x^4} dx$

الحل /

$let\ \ t = x^2 \qquad dt = 2xdx$

$$\int \frac{x}{9+x^4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{9+t^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} tan^{-1}\frac{t}{3} + c = \frac{1}{6} tan^{-1}\frac{x^2}{3} + c$$

مثال ٤/ اوجد $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}}dx$

$let\ \ t = x^2 \qquad\qquad dt = 2xdx$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sec^{-1}\frac{t}{2} + c = \frac{1}{4}sec^{-1}\frac{x^2}{2} + c$$

==

مثال ٥/ اوجد $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$let\ \ t = x^2 \qquad\qquad dt = 2xdx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}sin^{-1}t + c = \frac{1}{2}sin^{-1}x^2 + c$$

==

مثال ٦/ اوجد $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx$

$let\ \ t = e^{2x} \qquad\qquad dt = 2e^{2x}dx \qquad\qquad dx = \frac{dt}{2e^{2x}}$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}sin^{-1}t + c = \frac{1}{2}sin^{-1}e^{2x} + c$$

==

مثال٧/جد $\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$

$$\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}} = \int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx$$

$t = e^{x} \qquad\qquad dt = e^{x}dx$

$$\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1}{t^2+1}dt = tan^{-1}t + c = tan^{-1}e^{x} + c$$

==

مثال/ جد $\int e^{-ln(x^2+1)}dx$ واجب

==

مثال8/جد $\int \frac{cos\ x}{1+sin^2x}dx$

$$\int \frac{cos\ x}{1+sin^2x}dx = tan^{-1}(sinx) + c$$

==

مثال٩/جد $\int \frac{sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

الحل /

$let\ \ u = sin^{-1}x \qquad\qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad\qquad dx = \sqrt{1-x^2}du$

$$\int \frac{sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{u}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}du = \int udu = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(sin^{-1}x)^2 + c$$

مثال ١٠/ جد $\int \frac{sec^{-1}x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

الحل /

$$let\ \ u = sec^{-1}x \qquad du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad dx = x\sqrt{x^2-1}du$$

$$\int \frac{sec^{-1}x}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{u}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot x\sqrt{x^2-1}du$$

$$= \int udu = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(sec^{-1}x)^2 + c$$

==========

مثال11/ جد $\int \frac{tan^{-1}x}{1+x^2}dx$

الحل /

$$let\ \ u = tan^{-1}x \qquad du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad dx = (1+x^2)du$$

$$\int \frac{tan^{-1}x}{1+x^2}dx = \int \frac{u}{1+x^2} \cdot (1+x^2)du = \int udu = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(tan^{-1}x)^2 + c$$

==========

مثال ١٢/ جد $\int \frac{cos\ x\ dx}{sinx\ \sqrt{sin^2x-1}}$

الحل /

$$let\ \ u = sinx \qquad du = cos\ x\ dx$$

$$\int \frac{cos\ x\ dx}{sinx\ \sqrt{sin^2x-1}}dx = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = sec^{-1}u + c = sec^{-1}(sin\ x) + c$$

==========

مثال ١٣/ جد $\int \frac{-sin\ x\ dx}{cosx\ \sqrt{cos^2x-1}}$

الحل /

$$let\ \ u = cosx \qquad du = -sin\ x\ dx$$

$$\int \frac{-sin\ x\ dx}{cosx\ \sqrt{cos^2x-1}}dx = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = sec^{-1}u + c = sec^{-1}(cos\ x) + c$$

مثال ١٤/ جد $\int \frac{sin\ x\ dx}{cosx\ \sqrt{cos^2x-1}}$

الحل /

$$let\ \ u = cosx \qquad du = -sin\ x\ dx$$

$$\int \frac{-sin\ x\ dx}{cosx\ \sqrt{cos^2x-1}}dx = \int \frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}} = csc^{-1}u + c = csc^{-1}(cos\ x) + c$$

==========

مثال ١٥/ جد $\int \frac{sec^2\ x\ dx}{tan\ x\ \sqrt{tan^2x-1}}$

$$let\ \ u = tanx \qquad du = sec^2\ x\ dx$$

$$\int \frac{sec^2\ x\ dx}{tan\ x\ \sqrt{tan^2x-1}}dx = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = sec^{-1}u + c = sec^{-1}(tan\ x) + c$$

س/ اذا كانت $y = sin^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

البرهان :

$y = sin^{-1}x$
$x = sin\, y$
$1 = cos\, y \frac{dy}{dx}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\, y}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y}}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

==

س/ اذا كانت $y = cos^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

البرهان :

$y = cos^{-1}x$
$x = cos\, y$
$1 = -sin\, y \frac{dy}{dx}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{sin\, y}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2 y}}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

س/ اذا كانت $y = tan^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

البرهان

$y = tan^{-1}x$
$x = tan\, y$
$1 = sec^2\, y \frac{dy}{dx}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2\, y}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{tan^2 y+1}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

س/ اذا كانت $y = cot^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2+1}$

$$y = cot^{-1}x$$
$$x = cot\, y$$
$$1 = -csc^2\, y\, \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{csc^2\, y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{cot^2 y+1}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2+1}$$

==

س/ اذا كانت $y = sec^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$y = sec^{-1}x$$
$$x = sec\, y$$
$$1 = sec\, y\, tan\, y\, \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec\, y\, tan\, y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec\, y\sqrt{sec^2 y-1}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

==

س/ اذا كانت $y = csc^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$y = csc^{-1}x$$
$$x = csc\, y$$
$$1 = -csc\, y\, cot\, y\, \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{csc\, y\, cot\, y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{csch\, y\sqrt{csc^2 y-1}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

القواعد الاساسية

للتكاملات الدوال الزائدية

أعداد الأستاذ

عبدالسلام محمد علي

2016

الدوال الزائدية

1) $\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 2) $\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

3) $\tanh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 4) $\coth x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

5) $\cosh x + \sinh x = e^{x}$ 6) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

7) $\tanh \mathrm{x} = \frac{\sinh \mathrm{x}}{\cosh \mathrm{x}}$ 8) $\cosh \mathrm{x} = \frac{\cosh \mathrm{x}}{\sinh \mathrm{x}}$

9) $\mathrm{sech}\, \mathrm{x} = \frac{1}{\cosh \mathrm{x}} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$ 10) $\mathrm{csch}\, \mathrm{x} = \frac{1}{\sinh \mathrm{x}} = \frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

11) $cosh^{2}x - sinh^{2} = 1$

12) $sinh^{2}x = cosh^{2}x - 1$ 13) $cosh^{2}x = 1 + sinh^{2}$

14) $1 - tanh^{2}x = sech^{2}x$ 15) $coth^{2}x - 1 = csch^{2}x$

==

16) $\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \sinh y \cosh x$

17) $\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$

==

===

18) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh y$

19) $\cosh 2x = \cosh^{2} x + \sinh^{2} x$

==

20) $sinh^{2}x = \frac{cosh\ 2x-1}{2}$

21) $cosh^{2}x = \frac{cosh\ 2x+1}{2}$

س١/ اثبت ان $\cosh x + \sinh x = e^x$

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

==

س٢/ اثبت ان $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

$$\cosh x - \sinh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} - \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$$

==

س٣/ اثبت ان $cosh^2 x - sinh^2 = 1$

الحل /

$$cosh^2 x - sinh^2 = (\cosh x - \sinh x)(\cosh x - \sinh x)$$
$$= e^{-x} \cdot e^x = e^0 = 1$$

==

س4/ اثبت ان $sinh\,(x+y) = sinh\,x\,cosh\,y + sinh\,y\,cosh\,x$

الحل

$$sinh\,(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y})$$
$$= \frac{1}{2}(e^x e^y - e^{-x} e^{-y})$$
$$= \frac{1}{2}[(coshx + sinhx)(coshy + sinhy) - (coshx - sinhx)(coshy - sinhy)]$$
$$= \frac{1}{2}(cosh\,x\,coshy + coshx\,sinhy + sinhx\,coshy + sinh\,xsinhy$$
$$-cosh\,x\,coshy + coshx\,sinhy + sinhx\,coshy - sinh\,xsinhy)$$
$$= \frac{1}{2}(2cosh\,x\,sinhy + 2cosh\,x\,sinhy)$$
$$= cosh\,x\,sinhy + cosh\,x\,sinhy$$

==

س5/ اثبت ان $cosh\,2x = cosh^2 x + sinh^2 x$

الحل /

$$cosh\,2x = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$$
$$= \frac{1}{2}(cosh\,x + sinh\,x)^2 + (cosh\,x + sinh\,x)^2$$
$$= \frac{1}{2}(cosh^2 x + 2coshx\,sinhx + sinh^2 x + cosh^2 x - 2coshx\,sinhx + sinh^2 x)$$
$$= \frac{1}{2}(2cosh^2 x + 2sinh^2 x) = cosh^2 x + 2sinh^2 x$$

==

س٦/ اثبت ان $\sinh x - \sinh y = 2\cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

$$2\cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} = 2\left(\frac{e^{\frac{x+y}{2}}+e^{\frac{-x-y}{2}}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^{\frac{x-y}{2}}-e^{\frac{-x+y}{2}}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{\frac{x+y}{2}} e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{x+y}{2}} e^{\frac{-x+y}{2}} + e^{\frac{-x-y}{2}} e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{-x-y}{2}} e^{\frac{-x+y}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x} - e^{y} + e^{-y} - e^{-x}\right]$$

$$= \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} - \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = \sinh x - \sinh y$$

===

تمارين

س١/ اثبت ان $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$

س٢/ اثبت ان $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

س٣/ اثبت ان $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

س٤/ اثبت ان $\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1$

س٥/ اثبت ان $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$

س٦/ اثبت ان $\sinh x + \sinh y = 2\sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

س٧/ اثبت ان $\cosh x + \cosh y = 2\cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

س٨/ اثبت ان $\cosh x - \cosh y = 2\sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

مشتقات الدوال الزائدية

$$1)\ \frac{d}{dx}(\sinh y) = \cosh y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\sinh 5x$

الحل / $\frac{d}{dx}\sinh 5x = \cosh 5x \cdot 5 = 5\cosh 5x$

==========

$$2)\ \frac{d}{dx}(\cosh y) = \sinh y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\cosh \frac{x}{2}$

الحل / $\frac{d}{dx}\cosh\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}$

==========

$$3)\ \frac{d}{dx}(\tanh y) = \operatorname{sech}^2 y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\tanh x^2$

$\frac{d}{dx}\tanh x^2 = \operatorname{sech}^2 x^2 (2x) = 2x\operatorname{sech}^2 x^2$

==========

$$4)\ \frac{d}{dx}(\coth y) = -\operatorname{csch}^2 y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\coth 8x$

$\frac{d}{dx}\coth 8x = -8\operatorname{csch}^2 8x$

==========

$$5)\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} y) = \operatorname{sech} y \tanh y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} 4x$

الحل $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} 4x = 4\operatorname{sech} 4x \tanh 4x$

==========

$$6)\ \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} y) = -\operatorname{csch} y \coth y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} 5x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} 5x = -5\operatorname{csch} 5x \coth 5x$

تكاملات الدوال الزائدية

1) $\int \sinh ax\, dx = \frac{1}{a} \cosh ax + c$

2) $\int \cosh ax\, dx = \frac{1}{a} \sinh ax + c$

3) $\int \operatorname{sech}^2 ax\, dx = \frac{1}{a} \tanh ax + c$

4) $\int \operatorname{csch}^2 ax\, dx = \frac{-1}{a} \coth ax + c$

5) $\int \operatorname{sech} ax \tanh ax\; dx = -\frac{1}{a} \operatorname{sech} ax + c$

6) $\int \operatorname{csch} ax \coth ax\; dx = \frac{-1}{a} \operatorname{csch} ax + c$

===

مثال١ / اوجد $\int \sinh (2x+4) dx$

الحل/

$$\int \sinh (2x+4)\, dx = \frac{1}{2} \cosh(2x+4) + c$$

===

مثال ٢ / اوجد $\int x^2 Sinhx^3 dx$

$$\int x^2 Sinhx^3 dx = \frac{1}{3} \int Sinhx^3 (3x^2 dx) = \frac{1}{3} coshx^3 + c$$

===

مثال٣ // اوجد $\int \cosh x + x^{-2}\, dx$

الحل /

$$\int \cosh x + x^{-2}\, dx = \sinh x + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \sinh x - x^{-1} + c$$

===

مثال٤ / اوجد $\int\; x + \operatorname{sech} x \tanh x\, dx$

$$\int\; x + \operatorname{sech} x \tanh x\, dx = \frac{x^2}{2} + \operatorname{sech} x + c$$

$\int Sinh^n xdx$ أو $\int cosh^n xdx$ حيث n عدد زوجي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة

$$\int sinh^n x = \left(\frac{\cosh 2x-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx \quad or \quad \int cosh^n x = \left(\frac{\cosh 2x+1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx$$

مثال / اوجد $\int Sinh^2 xdx$

الطريقة الاولى :

$$\int Sinh^2 xdx = \frac{1}{2}\int \cosh 2x - 1\, dx = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{1}{2}x + c$$

الطريقة الثانية

$$\int Sinh^2 xdx = \frac{1}{4}\int (e^x - e^{-x})^2\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int e^{2x} - 2 + e^{-2x} dx = \frac{1}{8}e^{2x} - 2x - \frac{1}{8}e^{-2x} + c$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right) - 2x + c = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{1}{2}x + c$$

==========

مثال / اوجد $\int cosh^2 xdx$

الطريقة الأولى :

$$\int cosh^2 xdx = \frac{1}{2}\int \cosh 2x + 1\, dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{2}x + c$$

الطريقة الثانية

$$\int cosh^2 xdx = \frac{1}{4}\int (e^x + e^{-x})^2\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int e^{2x} + 2 + e^{-2x} dx = \frac{1}{8}e^{2x} + 2x - \frac{1}{8}e^{-2x} + c$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right) + 2x + c = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{2}x + c$$

==========

مثال / اوجد $\int cosh^4 xdx$

الحل /

$$\int cosh^4 xdx = \frac{1}{4}\int (1 + \cosh 2x)^2\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cosh 2x + \cosh^2 2x) dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cosh 2x + \frac{1}{2}\cosh 4x + \frac{1}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{1}{32}\sinh 4x + \frac{1}{2}x + c$$

==========

مثال / اوجد $\int sinh^4 xdx$ واجب

$\int Sinh^n x dx$ أو $\int cosh^n x dx$ حيث n عدد فردي فان

$$\int Sinh^n x dx = \int sinh^{n-1} x \, sinh\, x = \int (cosh^2 x - 1)^{\frac{n}{2}} sinh x$$

$$\int cosh^n x dx = \int cosh^{n-1} x \, cosh\, x = \int (sinh^2 x + 1)^{\frac{n}{2}} cosh x$$

مثال / اوجد $\int Sinh^3 x dx$

$$\begin{aligned}\int Sinh^3 x dx &= \int Sinh^2 x \, sinh\, x\, dx \\ &= \int (cosh^2 x - 1) sinh\, x\, dx \\ &= \frac{1}{3} cosh^3 x - cosh x + c\end{aligned}$$

===

مثال / اوجد $\int Sinh^5 x dx$

$$\begin{aligned}\int Sinh^5 x dx &= \int Sinh^4 x \, sinh\, x\, dx \\ &= \int (cosh^2 x - 1)^2 sinh\, x\, dx \\ &= \int (cosh^4 x - 2cosh^2 x + 1) sinh\, x dx \\ &= \frac{1}{5} cosh^5 x - \frac{2}{3} cosh^3 x + cosh x + c\end{aligned}$$

===

مثال / اوجد $\int cosh^3 x dx$

$$\begin{aligned}\int cosh^3 x dx &= \int cosh^2 x \, cosh\, x\, dx \\ &= \int (sinh^2 x + 1) cosh\, x\, dx \\ &= \frac{1}{3} sinh^3 x + sinh x + c\end{aligned}$$

===

مثال / اوجد $\int cosh^5 x dx$

$$\begin{aligned}\int cosh^5 x dx &= \int cosh^4 x \, cosh\, x\, dx \\ &= \int (sinh^2 x + 1)^2 cosh\, x\, dx \\ &= \int (sinh^4 x + 2sinh^2 x + 1) cosh\, x dx \\ &= \frac{1}{5} sinh^5 x + \frac{2}{3} sinh^3 x + sinh x + c\end{aligned}$$

$\int tan^n x dx$ أو $\int cot^n x dx$ حيث $n \geq 2$ لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int tanh^n x\, dx = \int tanh^{n-1} x\, tanh^2 x\, dx = \int tanh^2 x(1 - sech^2 x)$$

$$\int coth^n x\, dx = \int coth^{n-1} x\, coth^2 x\, dx = \int coth^2 x(1 + csch^2 x)$$

1) $\int tanh\, xdx = \int \frac{sinh\, x}{cosh\, x} dx = ln|cosh\, x| + c$

2) $\int tanh^2\, xdx = \int (1 - sech^2 x\,)\, dx = x - tanhx + c$

3) $\int tanh^3 x\, dx = \int tanh\, x\, tanh^2 xdx = \int tanhx(1 - Sech^2 x)dx$

$$= \int tanh\, x - tanhx\, sech^2 x$$

$$= ln|cosh\, x| - \frac{1}{2} tanh^2 x + c$$

4) $\int tanh^4 x\, dx = \int tanh^2\, x\, tanh^2 xdx$

$$= \int tanh^2 x(1 - Sech^2 x)dx$$

$$= \int tan^2 x - tanh^2 x\, sech^2\, x$$

$$= x - tanhx - \frac{1}{3} tan^3 x + x + c$$

==

6) $\int \text{coth xdx} = \int \frac{\text{cosh x}}{\text{sinh x}} \text{dx} = \text{ln|sinh x|} + \text{c}$

7) $\int coth^2 xdx = \int (csch^2 x + 1\,)dx = -coth\, x + x + c$

8) $\int coth^3 x\, dx = \int coth\, x\, coth^2 xdx = \int cothx(csch^2 x + 1)dx$

$$= \int cothx\, csch^2 x - coth\, x$$

$$= \frac{1}{2} coth^2 x - ln|sinh\, x| + c$$

==

مثال / $\int coth^4 x\, dx$ واجب

مثال / جد $\int sinh^2x\, cosh^2\, x\, dx$

$$\int sinh^2x\, cosh^2\, x\, dx = \frac{1}{4}\int sinh^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \cosh 4x - 1\, dx = \frac{1}{32}\sinh x - \frac{1}{8}x + c$$

==

مثال / جد $\int sinh^4x\, cosh^2\, x\, dx$

$$\int sinh^4x\, cosh^2x\, dx = \int sinh^4x\, sinh^2x\, cosh^2\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int sinh^2x\, sinh^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (cosh\ 2x - 1) sinh^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int sinh^2 2x\, cosh\ 2x - sinh^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(sinh^2 2x\, cosh\ 2x - \frac{1}{2}cosh4x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{48}sinh^3 2x - \frac{1}{64}sinh\ 4x - \frac{1}{16}x + c$$

==

$$\int sinh^4x\, cosh^4\, x\, dx = \frac{1}{16}\int sinh^4 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{32}\int (cosh\ 2x - 1)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{32}\int (cosh^2 2x - 2cosh2x + 1)dx$$

$$= \frac{1}{32}\int \left(\frac{1}{2}cosh\ 4x + \frac{1}{2} - 2cosh2x + 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{256}sinh\ 4x + \frac{1}{64}x - \frac{1}{32}sinh\ 2x + \frac{1}{32}x + c$$

$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$ حيث n ,m أعداد فردية لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$\int sinh^{n-1}x\, cosh^m x\, sinh\, x\, dx =$

$\int (coshx - 1)^{n-1} x\, cosh^m x\, sinhx\, dx$

$$\int sinh^3 x\, cosh^3 x\, dx = \int sinh^3 x\ \ cosh^2 xcosh\, x\, dx$$
$$= \int sinh^3 x (1 + sinh^2 x)\, cosh\, x\, dx$$
$$= \int sinh^3 x\, cosh\, x + \ sinh^5\, x\, cosh\, x\, dx$$
$$= \frac{sinh^4 x}{4} + \frac{sinh^6 x}{6} + c$$

==========

$$\int sinh^5 x\, cosh^3 x\, dx = \int sinh^5 x\ \ cosh^2\, x\, cosh\, x\, dx$$
$$= \int sinh^5 x (1 + sinh^2 x)\, cosh\, x\, dx$$
$$= \int sinh^5 x\, cosh\, x + \ sinh^7\, x\, cosh\, x\, dx$$
$$= \frac{sinh^6 x}{6} + \frac{sinh^8 x}{8} + c$$

==========

$$\int sinh^3 x\, cosh^5 x\, dx = \int sinh^2 x\, sinh\, x\, cosh^5\, x\, dx$$
$$= \int (cosh^2 x - 1)\, sinh\, x\, cosh^5 dx$$
$$= \int cosh^7 x\, sinh\, x - \ cosh^5\, x\, sinh\, x\, dx$$
$$= \frac{cosh^8 x}{8} - \frac{cosh^6 x}{6} + c$$

مثال / اوجد $\int sinh\,(ln\,3x)dx$

$$\int sinh\,(ln\,3x)dx = \frac{1}{2}\int e^{ln\,3x} - e^{-ln3x}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int 3x - \frac{1}{3x}dx$$
$$= \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}ln\,x + c$$

==========

مثال / اوجد $\int cosh\,(ln\,2x)dx$

$$\int sinh\,(ln\,3x)dx = \frac{1}{2}\int e^{ln\,3x} - e^{-ln3x}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int 3x - \frac{1}{3x}dx$$
$$= \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}ln\,x + c$$

==========

مثال / اوجد $\int e^{-10x}(cosh\,2x + sinh\,2x)^6dx$

الحل / ملاحظة $cosh\,2x + sinh\,2x = e^{2x}$

$$\int e^{-10x}(cosh\,2x + sinh\,2x)^6dx = \int e^{-10x}(e^{2x})^6dx$$
$$= \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\,e^{2x} + c$$

==========

مثال / جد $\int e^x cosh\,2x\,dx$

الحل /

$$\int e^x cosh\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^x(e^{2x} + e^{-2x})dx = \frac{1}{2}\int e^{3x} + e^{-x}dx$$
$$= \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} + c$$

==========

مثال / جد $\int \frac{dx}{sinh^2x\;cosh^2x}$

$$\int \frac{dx}{sinh^2x\;cosh^2x} = 2\int \frac{dx}{sinh^2 2x} = 2\int csch^2 2x\,dx = -coth\,2x + c$$

==========

مثال / جد $\int \frac{dx}{sinh\,2x + cosh^2x}$

$$\int \frac{dx}{sinh\,2x + cosh^2x} = \int \frac{dx}{2sinh\,x\,cosh\,x + cosh^2x}$$
$$= \int \frac{dx}{cosh^2x(2tanh\,x + 1)}$$
$$= \int \frac{sech^2x}{2tanh\,x + 1}dx = \frac{1}{2}ln|2tanh\,x + 1|$$

مثال / جد $\int e^{3x}\sinh 2x\,dx$

الحل /

$$\int e^{3x}\sinh 2x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{3x}(e^{2x}-e^{-2x})dx$$
$$=\frac{1}{2}\int e^{5x}-e^{x}dx$$
$$=\frac{1}{10}e^{5x}-\frac{1}{2}e^{x}+c$$

مثال / جد $\int e^{-2x}\cosh^2 2x\,dx$

$$\int e^{-2x}\cosh^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int e^{-2x}(e^{2x}-e^{-2x})^2dx$$
$$=\frac{1}{4}\int e^{-2x}(e^{4x}+2+e^{-4x})dx$$
$$=\frac{1}{4}\int e^{2x}+2e^{-2x}+e^{-6x}\,dx$$
$$=\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{24}e^{-6x}+c$$

مثال / جد $\int\frac{dx}{\sinh x\cosh^2 x}$

$$\int\frac{dx}{\sinh x\cosh^2 x}=\int \operatorname{sech}^2 x\operatorname{csch} x\,dx=$$
$$=\int(1-\tanh^2 x)\operatorname{csch} x\,dx$$
$$=\int(\operatorname{csch} x-\tanh^2 x\operatorname{csch} x)\,dx$$
$$=\int\ \operatorname{csch}x\cdot\frac{\operatorname{cschh} x+\coth x}{\operatorname{csch}x+\coth x}-\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}\frac{1}{\sinh x}\,dx$$
$$=\int\ \frac{\operatorname{csch}^2 x+\operatorname{csch} x\coth x}{\operatorname{csch} x+\coth x}-\tanh x\operatorname{sech} dx=$$
$$=-\ln|\operatorname{csch} x+\coth x|-\operatorname{sech} x+c$$

مثال / جد $\int\frac{\cosh(\tan^{-1}x)}{1+x^2}$

$$\int\frac{\cosh(\tan^{-1}x)}{1+x^2}=\sinh(\tan^{-1}x)$$

مثال / جد $\int\frac{dx}{\tanh x-1}$

$$\int\frac{dx}{\tanh x-1}=\int\frac{dx}{\frac{\sinh x}{\cosh x}-1}$$
$$=\int\frac{\cosh x}{\sinh x-\cosh x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{e^{x}+e^{-x}}{-e^{-x}}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int e^{2x}+1\,dx=-\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x+c$$

مثال / جد $\int sech\, x\, dx$

الحل /

$$\int sech\, x\, dx = \int \frac{1}{\cosh x} dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\cosh^2 x}{1+\sinh^2 x} dx = \tan^{-1}(\sinh x)$$

==

مثال / جد $\int csch\, x\, dx$

الحل /

$$\int csch\, x\, dx = \int csch\, x \frac{csch\, x+\coth x}{csch\, x+\coth x} dx =$$

$$= \int \frac{csch^2\, x+csch\, x \coth x}{csch\, x+\coth x} dx$$

$$= -\ln|csch\, x + \coth x| + c$$

==

مثال / جد $\int xe^{2x^2} \cosh x^2\, dx$

الحل /

$$\int xe^{2x^2} \cosh x^2\, dx = \frac{1}{2}\int xe^{2x^2}\left(e^{x^2} + e^{-2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{3x} + e^{-x}\, dx = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x} + c$$

==

مثال / جد $\int \frac{x}{\sinh^2 x} dx$

الحل /

$$\int \frac{x}{\sinh^2 x} dx = \int x\, csch^2 x\, dx = -x\coth x + \ln|\sinh x| + c$$

==

مثال / جد $\int \frac{\sinh x \cosh x}{\sinh^2 x+\cosh^2 x} dx$

$$\int \frac{\sinh x \cosh x}{\sinh^2 x+\cosh^2 x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x} dx = \frac{1}{4}\ln|\cosh 2x| + c$$

==

مثال / جد $\int \frac{\sinh x}{\cosh^3 x} dx$

الحل /

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh^3 x} dx = \int \tanh x\, sech^2\, x\, dx = \frac{1}{2}\tanh^2 x + c$$

==

الصيغ اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية

$y = f(x)$	الصيغة اللوغاريتمية	الملاحظات
$sinh^{-1}x$	$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$	$x \in R \ , \ y \in R$
$cosh^{-1}x$	$\ln(\sqrt{x^2-1}+x)$	$x \geq 1 \ , \ y \geq 0$
$tanh^{-1}x$	$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\lvert x\rvert < 1 \ , y \in R$
$coth^{-1}x$	$\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$\lvert x\rvert > 1 \ , y \in R$
$sech^{-1}x$	$\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right)$	$0 < x \leq 1 \ , y \in R$
$csch^{-1}x$	$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\lvert x\rvert}+\frac{1}{x}\right)$	$\lvert x\rvert < 1 \ , y \in R$

مشتقات الدوال الزائدية العكسية

$$f(x) = sinh^{-1}x \Longrightarrow f'(x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x) = cosh^{-1}x \Longrightarrow f'(x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$

$$f(x) = tanh^{-1}x \Longrightarrow f'(x) = \frac{dx}{1-x^2} \quad (\lvert x\rvert < 1)$$

$$f(x) = coth^{-1}x \Longrightarrow f'(x) = \frac{dx}{1-x^2} \quad (\lvert x\rvert > 1)$$

$$f(x) = sech^{-1}x \Longrightarrow f'(x) = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \quad 0 < x < 1$$

$$f(x) = csch^{-1}x \Longrightarrow f'(x) = -\frac{dx}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}} \quad x \neq 0$$

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$

3) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} tanh^{-1}\frac{x}{a} + c \qquad |x| < a \ , a > 0$

4) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{a} coth^{-1}\frac{x}{a} + c \qquad |x| > a \ , a > 0$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a} sech^{-1}\frac{x}{a} + c$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a} csch^{-1}\frac{x}{a} + c$

===

مثال/جد $\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-9}} dx$

الحل /

$$\int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-9}} = cosh^{-1}\frac{e^{2x}}{3} + c$$

===

مثال/جد $\int \frac{5}{6-2x^2} dx$

الحل

$$\int \frac{5}{6-2x^2} dx = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{3-x^2} = \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{3}} tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c \ , \ |x| < \sqrt{3} \\ \frac{5}{2\sqrt{3}} coth^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c \ , \ |x| > \sqrt{3} \end{cases}$$

===

مثال / جد $\int sec\, 2x\, dx$

$$\int sec\, 2x\, dx = \frac{1}{cos\, 2x} dx = \int \frac{1}{cos^2x - sin^2x} dx$$

$$= \int \frac{sec^2x}{1 - tan^2x} dx = tanh^{-1}(tanx) + c$$

مثال/جد $\int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$

$let \quad t = e^x \qquad dt = e^x dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}} dx = \int \frac{dt}{t\sqrt{4-t^2}} = -\frac{1}{2} sech^{-1} \frac{|t|}{2} + c$$

$$= -\frac{1}{2} sech^{-1} \frac{|e^x|}{2} + c$$

==

مثال/جد $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{\frac{4}{9}+x^2}} = \frac{1}{3} sinh^{-1} \frac{3x}{2} + c$$

مثال/جد $\int \frac{sec^2 x}{\sqrt{4tan^2 x+9}} dx$

$$\int \frac{sec^2 x}{\sqrt{4tan^2 x+9}} dx = \int \frac{sec^2 x}{2\sqrt{tan^2 x+\frac{9}{4}}} dx = \frac{1}{2} sinh^{-1} \frac{2\tan x}{3} + c$$

==

مثال/جد $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+sin^2 x}} \mathrm{dx}$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+sin^2 x}} \mathrm{dx} = \sinh^{-1}(\sin x) + c$$

س/ برهن إن $sinh^{-1}x = ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

البرهان

$y = sinh^{-1}x \Longrightarrow x = sinh\, y$

$cosh^2 y = 1 + sinh^2 y$

$cosh\, y = \sqrt{1 + sinh^2 y} = \sqrt{1+x^2}$

$e^y = sinh\, y + cosh\, y$

$e^y = x + \sqrt{1+x^2}$

$y = ln(x + \sqrt{1+x^2})$

==

س/ برهن إن $cosh^{-1}x = ln(\sqrt{1-x^2}+x)$

البرهان

$y = cosh^{-1}x \Longrightarrow x = cosh\, y$

$sinh^2 y = cosh^2 y - 1$

$sinh\, y = \sqrt{cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1}$

$e^y = sinh\, y + cosh\, y$

$e^y = \sqrt{x^2-1} + x$

$y = ln(\sqrt{x^2-1} + x)$

==

س/ برهن إن $tanh^{-1}x = \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x}$

البرهان

$y = tanh^{-1}x \Longrightarrow x = tanh\, y$

$tanh\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$

$e^{2y} - xe^{2y} = 1 + x$

$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$

$2y = ln \frac{1+x}{1-x} \Longrightarrow tanh^{-1}x = \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x}$

==

س/ برهن إن $coth^{-1}x = \frac{1}{2} ln \frac{x+1}{x-1}$

البرهان

$$y = coth^{-1}x \Longrightarrow x = coth\, y$$

$$coth\, y = \frac{e^y+e^{-y}}{e^y-e^{-y}} = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$$

$$x = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$$

$$xe^{2y} - x = e^{2y} + 1$$

$$xe^{2y} - e^{2y} = 1 + x$$

$$e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y = \frac{1}{2} ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$coth^{-1}x = \frac{1}{2} ln \frac{x+1}{x-1}$$

س/ برهن إن $csch^{-1}x = ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} + \frac{1}{x}\right)$

البرهان

$$y = csch^{-1}x \Longrightarrow x = csch\, y$$

$$sinh\, y = \frac{1}{x}$$

$$cosh\, y = \sqrt{1 + sinh^2 y} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$$

$$e^y = sinh\, y + cosh\, y$$

$$e^y = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$$

$$y = ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} + \frac{1}{x}\right)$$

==

==

س/ برهن إن $sech^{-1}x = ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} + \frac{1}{x}\right)$

البرهان

$y = sech^{-1}x \Longrightarrow x = sech\, y$

$cosh\, y = \frac{1}{x}$

$sinh\, y = \sqrt{cosh^2 y - 1} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$

$e^y = sinh\, y + cosh\, y$

$e^y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} + \frac{1}{x}$

$y = ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} + \frac{1}{x}\right)$

س/ برهن إن $sinh^{-1}x = ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$

البرهان

$y = sinh^{-1}x \Longrightarrow x = sinh\, y$

$cosh^2 y = 1 + sinh^2 y$

$cosh\, y = \sqrt{1 + sinh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$

$e^y = sinh\, y + cosh\, y$

$e^y = x + \sqrt{1 + x^2}$

$y = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

س/ برهن إن $sinh^{-1}x = ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$

$y = sinh^{-1}x \qquad x = sinh\, y$

$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$2x = e^y - e^{-y}$

$e^y - e^{-y} - 2x = 0$

$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

س/ اذا كانت $y = sinh^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

البرهان :

$$y = sinh^{-1}x$$
$$x = sinh\, y$$
$$1 = cosh\, y\, \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosh\, y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{sinh^2 y+1}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

س/ اذا كانت $y = cosh^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

البرهان :

$$y = cosh^{-1}x$$
$$x = cosh\, y$$
$$1 = sinh\, y\, \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sinh\, y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{sinh^2 y-1}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

س/ اذا كانت $y = tanh^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$

$$y = tanh^{-1}x$$
$$x = tanh\, y$$
$$1 = sech^2\, y\, \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sech^2\, y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-tanh^2 y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

س/ اذا كانت $y = coth^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$

$y = coth^{-1}x$

$x = coth\, y$

$1 = csch^2\, y\, \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{csch^2\, y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-coth^2 y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$

س/ اذا كانت $y = sech^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$y = sech^{-1}x$

$x = sech\, y$

$1 = -sech\, y\, tanh\, y\, \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{sech\, y\, tanh\, y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{sech\, y\sqrt{1-sech^2 y}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

==

س/ اذا كانت $y = csch^{-1}x$ برهن ان $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

$y = csch^{-1}x$

$x = csch\, y$

$1 = -csch\, y\, coth\, y\, \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{csch\, y\, coth\, y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{csch\, y\sqrt{1+csch^2 y}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

التكامل بالتجزئة

و

تكاملات الدوال المثلثية العكسية

أعداد الأستاذ

القواعد الاساسية للتكاملات الدوال العكسية أعداد الاستاذ عبدالسلام محمد

القواعد الاساسية للتكاملات الدوال العكسية أعداد الاستاذ عبدالسلام محمد

2016

التكامل بالتجزئة

لتكن $u = f(x)$, $v = g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فان :

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$udv = d(vu) - vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

مثال ١ / جد $\int x^n \ln x\, dx$

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^n \qquad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{x}dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx == \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

==

مثال٢/جد $\int x \sec x \tan x\, dx$

$$\int x \sec x \tan x\, dx$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \sec x \tan x\, dx \qquad v = \sec x$

$$\int x \sec x \tan x\, dx = x \sec x - \int \sec x\, dx$$

$$= x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + c$$

مثال٣/جد $\int x^5 e^{2x^3}\,dx$

$$u = x^3 \qquad du = 3x^2 dx$$

$$dv = x^2 e^{2x^3}\,dx \qquad v = \frac{1}{6}e^{2x^3}$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \frac{1}{6}x^3 e^{2x^3} - \frac{1}{6}\int e^{2x^3}(x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}x^3 e^{2x^3} - \frac{1}{12}e^{2x^3} + c$$

==

مثال٤/ $\int x\,sinx\,dx$

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = sinx\,dx \qquad v = -cos\,x$$

$$\int udv = uv - \int vdu = -xcos\,x + \int cos\,x\,dx$$

$$= -xcos\,x + sin\,x + c$$

==

مثال٥/جد $\int (x+1)sec^2x\,dx$

$$u = x+1 \qquad du = dx$$

$$dv = sec^2x\,dx \qquad v = tan\,x$$

$$\int udv = uv - \int vdu = (x+1)tan\,x - \int tan\,x\,dx$$

$$= (x+1)tan\,x + ln|cos\,x| + c$$

==

مثال٦/جد $\int (x^2+x+1)lnx\,dx$

$$u = lnx \qquad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = (x^2+x+1)dx \qquad v = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right) ln\,x - \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right) ln\,x - \left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + x\right) + c$$

مثال٧/جد $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

$u = x^2 \qquad du = 2x dx$

$dv = x e^{x^2}\, dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{x^2}$

$\int u dv = uv - \int v du = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2}\, dx$

$= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

==

مثال٨/جد $\int x e^x dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^x\, dx \qquad v = e^x$

$\int u dv = uv - \int v du = x e^x - \int e^x\, dx$

$= x e^x - e^x + c$

==

مثال٩/ جد $\int x^2 \ln x\, dx$

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} dx$

$dv = x^2 \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$\int u dv = uv - \int v du$

$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x} dx$

$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$

==

مثال١٠/ جد $\int x\sqrt{1+x}\, dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \sqrt{1+x}\ dx \qquad v = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}$

$\int u dv = uv - \int v du$

$= \frac{2}{3} x \sqrt{(1+x)^3} - \frac{2}{3} \int \sqrt{(1+x)^3} dx$

$= \frac{2}{3} x \sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(1+x)^5} + c$

مثال١١/ $\int x^2 \sin x\, dx$

$$u = x^2 \qquad du = 2xdx$$
$$dv = \sin x\, dx \qquad v = -\cos x$$
$$\int udv = uv - \int vdu = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\, dx$$

نجد تكامل $x\cos x$

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = \cos x\, dx \qquad v = \sin x$$
$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\, dx$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

==

مثال١٢/ $\int x \sec^2 3x\, dx$

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = \sec^2 x\, dx \qquad v = \frac{1}{3}\tan 3x$$
$$\int udv = uv - \int vdu = \frac{1}{3}x\tan 3x - \frac{1}{3}\int \tan 3x\, dx$$
$$= \frac{1}{3}x\tan 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| + c$$

==

مثال١٣/جد $\int x\tan^2 x\, dx$

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = \tan^2 x \qquad v = \tan x - x$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$= x\tan x - x^2 - \int (\tan x - x)dx$$
$$= x\tan x - x^2 + \frac{1}{2}\ln|\cos x| + \frac{1}{2}x^2 + c$$

مثال ١٤/ $\int e^x \cos x \, dx$

الحل /

$u = \cos x \qquad du = -\sin x dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int udv = uv - \int vdu \;= e^x \cos x + \int e^{3x} \sin x \, dx$

$u = \sin x \qquad du = \cos x dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^{3x}$

$\int e^x \cos x \, dx \;= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$

$\int e^x \cos x \, dx \;= \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + c$

==

مثال ١٥/ جد $\int \ln(x^2+1)dx$

الحل /

$u = \ln(x^2+1) \qquad du = \frac{2x}{x^2+2} dx$

$dv = \; dx \qquad v = x$

$\int udv = uv - \int vdu \;= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$

$let \;\; x = \tan t \qquad dx = \sec^2 t \, dt$

$= x\ln(x^2+1) \; - 2\int \frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t} \sec^2 t dt$

$= x\ln(x^2+1) \; - 2\int \sec^2 t - 1 dt$

$= x\ln(x^2+1) \; - 2\tan t + 2t + c$

$= x\ln(x^2+1) \; - 2x + 2\tan^{-1} x + c$

مثال ١٦/ $\int sec^3x\,dx$

$$\int sec^3x\,dx = \int sec^2x\,sec\,x\,dx$$

$u = sec\,x \qquad du = sec\,x\,tan\,x\,dx$

$dv = sec^2x\,dx \qquad v = tan\,x$

$$\int sec^3x\,dx = \int udv = uv - \int vdu$$
$$= \sec x\,tan\,x - \int tan^2x\,sec\,x\,dx$$
$$= \sec x\,tan\,x - \int (sec^2x - 1)\,sec\,x\,dx$$
$$= \sec x\,tan\,x - \int (sec^2x - 1)\,sec\,x\,dx$$
$$= \sec x\,tan\,x - \int sec^3x - sec\,x\,dx$$

$$2\int sec^3x\,dx = \sec x\,tan\,x + \int sec\,x\,dx$$
$$2\int sec^3x\,dx = \sec x\,tan\,x + ln\,|sec\,x + tan\,x\,|$$
$$\int sec^3x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\,tan\,x + \frac{1}{2}ln\,|sec\,x + tan\,x\,| + c$$

==

مثال ١٧/ $\int tan^2x\,sec\,x\,dx$

$$\int tan^2x\,sec\,x\,dx = \int (sec^2x - 1)sec\,x\,dx$$

$$= \int (sec^3x - sec\,x)\,dx$$

نفس الطريقة اعلاه نجد $\int sec^3x$

$$= \frac{1}{2}\sec x\,tan\,x + \frac{1}{2}ln\,|sec\,x + tan\,x\,| - ln\,|sec\,x + tan\,x\,|$$
$$= \frac{1}{2}\sec x\,tan\,x - \frac{1}{2}ln\,|sec\,x + tan\,x\,| + c$$

مثال / $\int tan^2x\,sec^3x\,dx$ واجب

==

مثال ١٨/ $\int x\,2^x\,dx$

$$\int x\cdot 2^x\,dx$$

$let\quad u = x \qquad du = dx$

$dv = 2^x \qquad v = \frac{1}{ln\,2}2^x$

$$\int x\cdot 2^x\,dx = \frac{1}{ln\,2}x2^x - \int \frac{1}{ln\,2}2^x dx$$
$$= \frac{1}{ln\,2}x2^x - \frac{1}{(ln\,2)^2}2^x + c$$

مثال ١٩/ $\int (x+\sin x)^2\,dx$

$$\int (x+\sin x)^2 dx = \int x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x\,dx$$
$$= \int x^2 + 2x\sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$

$$\int 2x\sin x\,\mathrm{dx}$$
$u = x \qquad du = dx \qquad dv = \sin x\,dx \qquad v = -\cos x$

$$2\int x\sin x\,\mathrm{dx} = -2\mathrm{x}\cos\mathrm{x} + 2\int \cos\mathrm{x}\,\mathrm{dx} = -2\mathrm{x}\cos\mathrm{x} + 2\sin\mathrm{x} + \mathrm{c}$$

$$\therefore \int x^2 + 2x\sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - 2\mathrm{x}\cos\mathrm{x} + 2\sin\mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\mathrm{x} + \mathrm{c}$$

==

مثال ٢٠/ $\int x^2\cos nx\,dx$

$u = x^2 \qquad du = 2xdx$

$dv = \cos nx\,dx \qquad v = \dfrac{1}{n}\sin nx$

$$\int udv = uv - \int vdu = \frac{1}{n}x^2\sin nx - \frac{2}{n}\int x\sin nx\,dx$$

نجد تكامل $x\sin nx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \sin nx\,dx \qquad v = -\dfrac{1}{n}\cos nx$

$$\int x\,\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n}\int \cos nx\,dx$$
$$= -\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx + c$$

$$\therefore \int x^2\cos nx = \frac{1}{n}x^2\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx + c$$

==

مثال / جد $\int \csc 2x\,dx$

$$\int \csc 2x\,dx = \frac{1}{\sin 2x}dx = \int \frac{1}{2\sin x\cos x}dx$$
$$= 2\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx = 2\ln(\tan x) + c$$

مثال ٢١/ $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

الحل /

$let \quad y=\sqrt{x} \qquad dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \qquad dx=2ydy$

$\int \cos\sqrt{x}\,dx = 2\int y\cos y\,dy$

$u=y \qquad du=dy$

$dv=\cos y\,dy \qquad v=\sin y$

$\int udv = uv-\int vdu \;= y\sin y-\int \sin y\,dy$

$= y\sin y + \cos y + c$

$= \sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}+c$

==

مثال ٢٢/ جد $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

$let \quad y=\sqrt{x} \qquad dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \qquad dx=2ydy$

$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int ye^{y}dy$

$u=y \qquad du=dy$

$dv=e^{y}\,dx \qquad v=e^{y}$

$\int udv = uv-\int vdu \;= 2ye^{y}-2\int e^{y}\,dy$

$= 2ye^{y}-2e^{y}+c$

$= 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+c$

==

مثال ٢٣/ $\int e^{-y}\cos y\,dy$

$\int e^{-y}\cos y\,dy$

$u=e^{-y} \qquad du=-e^{-y}$

$dv=\cos y \qquad v=\sin y$

$\int udv = uv-\int vdu$

$\int e^{-y}\cos y\,dy = e^{-y}\sin y+\int e^{-y}\sin y dy$

$u=e^{-y} \qquad du=-e^{-y}$

$dv=\sin y \qquad v=-\cos y$

$\int e^{-y}\cos y\,dy = e^{-y}\sin y-e^{-y}\cos y-\int e^{-y}\sin y dy$

$\int e^{-y}\cos y\,dy = \frac{1}{2}e^{-y}\sin y-\frac{1}{2}e^{-y}\cos y$

مثال / جد $\int ln(sin\ x)dx$

$u = ln\ sin\ x \qquad du = cot\ x$
$dv = dx \qquad v = x$
$\int udv = uv - \int vdu$
$\int ln\ sin\ x\ dx = xln\ sin\ x - \int x\ cot\ x\ dx$

نجد $\int x\ cot\ x\ dx$

$u = cot\ x \qquad du = -csc^2 x$
$dv = x \qquad v = \frac{1}{2}x^2$
$\int x\ cotx\ \mathrm{dx} = \frac{1}{2}x^2 cot\ x + \frac{1}{2}\int x^2 csc^2 x\ dx$
$\int x\ cotx = \frac{1}{2}x^2 cot\ x + \frac{1}{2}\int x^2 + x^2 cot^2 x\ dx$
$\int x\ cotxdx = \frac{1}{2}x^2 cot\ x + \frac{1}{6}x^3 + \int x^2 cot^2 x\ dx$
$dv = cot^2\ x \qquad v = -\ cot\ x - x$
$u = x^2 \qquad du = 2xdx$
$\int x\ cotxdx = \frac{1}{2}x^2 cot\ x + \frac{1}{6}x^3 - x^2 cot\ x - x^3 + 2\int xcotx + x^2\ dx$
$\int x\ cotxdx - 2\int x\ cot\ xdx = -\frac{1}{2}x^2 cot\ x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^3 + c$
$-\int x\ cot\ xdx = -\frac{1}{2}x^2 cot\ x - \frac{1}{6}x^3 + c$
$\int x\ cot\ xdx = \frac{1}{2}x^2 cot\ x + \frac{1}{6}x^3 + c$

$\int ln\ sin\ x\ dx = xln\ sin\ x - \frac{1}{2}x^2 cot\ x - \frac{1}{6}x^3 + c$

==

س١/ جد $\int cos\ (lnx)dx$

$u = cos(lnx) \qquad du = -\frac{1}{x}sin\ (ln\ x)$
$dv = dx \qquad v = x$
$\int udv = uv - \int vdu$
$\int cos\ (lnx)\ dx = xcos\ (lnx) + \int\ sin\ (lnx)\ dx$
$u = sin(lnx) \qquad du = \frac{1}{x}cos\ (ln\ x)$
$dv = dx \qquad v = x$
$\int udv = uv - \int vdu$
$\int cos\ (lnx)\ dx = xcos\ (lnx) + xsin\ (lnx) - \int\ cos\ (lnx)\ dx$
$\int cos\ (lnx)\ dx = \frac{1}{2}xcos\ (lnx) + \frac{1}{2}xsin\ (lnx)$

تمارين

س١/ جد $\int x\ln(\cos x)dx$

س٢ / جد $\int \frac{1}{x}\ln(\sin x)dx$

س٣ / جد $\int x^5 \sin x^2 dx$

س٤ / جد $\int x^3 \cos x^2 dx$

س٥ / جد $\int x\tan^3(x^2)dx$

س٦ / جد $\int \sqrt{x}\ \ln 2x\ dx$

س٧ / جد $\int x^2\ \ e^{-2x}dx$

س٨ / جد $\int x\tan xdx$

س٩ / جد $\int x\sin(\ln x)dx$

س١٠ / جد $\int x^2 \cosh xdx$

س١١/ جد $\int x\sinh xdx$

س١٢/ جد $\int x^2 \operatorname{sech} xdx$

تكاملات الدوال المثلثية العكسية

مثال ١/ جد $\int sin^{-1}x\,dx$

$$u = sin^{-1}x \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= xsin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = xsin^{-1}x + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{1-x^2}\right) + c$$

$$= xsin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$$

==

مثال ٢/ جد $\int cos^{-1}x\,dx$

$$u = cos^{-1}x \qquad du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= xcos^{-1}x - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = xcos^{-1}x - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{1-x^2}\right) + c$$

$$= xcos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + c$$

==

مثال ٣/ جد $\int tan^{-1}x\,dx$

$$u = tan^{-1}x \qquad du = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= xtan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xtan^{-1}x - \frac{1}{2}ln\left|1+x^2\right| + c$$

==

مثال ٤/ جد $\int cot^{-1}x\,dx$

$$u = cot^{-1}x \qquad du = \frac{-1}{1+x^2}dx$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= xcot^{-1}x - \int \frac{-x}{1+x^2}dx = xcot^{-1}x + \frac{1}{2}ln\left|1+x^2\right| + c$$

مثال٥/جد $\int sec^{-1}x\,dx$

$u = sec^{-1}x \qquad du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int udv = uv - \int vdu$

$= xsec^{-1}x - \int \frac{x}{x\sqrt{x^2-1}}dx = xsec^{-1}x - cosh^{-1}x + c$

==

مثال٦/جد $\int csc^{-1}x\,dx$

$u = sec^{-1}x \qquad du = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int udv = uv - \int vdu$

$= x\,csc^{-1}x + \int \frac{x}{x\sqrt{x^2-1}}dx = x\,csc^{-1}x + cosh^{-1}x + c$

==

مثال٧/جد $\int xsin^{-1}x\,dx$

$u = sin^{-1}x \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$dv = x \qquad v = \frac{1}{2}x^2$

$\int udv = uv - \int vdu$

$= \frac{1}{2}x^2\,sinx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$let\ \ x = sin\,t \qquad dx = cos\,t\,dt$

$= \frac{1}{2}x^2\,sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{sin^2t}{\sqrt{1-sin^2t}}cos\,tdt$

$= \frac{1}{2}x^2\,sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{sin^2t}{cos\,t}cos\,tdt$

$= \frac{1}{2}x^2\,sin^{-1}x - \frac{1}{4}\int 1 - cos\,t\,dt$

$= \frac{1}{2}x^2\,sin^{-1}x - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}sin\,t + c$

$= \frac{1}{2}x^2\,sin^{-1}x - \frac{1}{4}sin^{-1}x + \frac{1}{4}x + c$

مثال٨/جد $\int xtan^{-1}x\,dx$

$u = tan^{-1}x \qquad du = \frac{1}{1+x^2}$

$dv = x \qquad v = \frac{1}{2}x^2$

$\int udv = uv - \int vdu$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$let\ \ x = tan\,t \qquad dx = sec^2t\,dt$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{tan^2t}{1+tan^2t}sec^2tdt$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int sec^2t - 1dt$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}tan\,t + \frac{1}{2}t + c$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}tan^{-1}x + c$

س/ جد $\int xtan^{-1}x + tan^{-1}x\,dx$ واجب

==

مثال٩/ جد $\int x^2tan^{-1}3x\,dx$

$u = tan^{-1}x \qquad du = \frac{1}{1+9x^2}$

$dv = x^2 \qquad v = \frac{1}{3}x^3$

$\int udv = uv - \int vdu$

$= \frac{1}{3}x^3\,tan^{-1}x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+9x^2}dx$

$let\ \ x = tan\,t \qquad dx = sec^2t\,dt$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{tan^3t}{1+tan^2t}sec^2tdt$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int tan^3tdt$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int tan\,t\,sec^2t - tan\,t\,dt$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{4}tan^2\,t - \frac{1}{2}ln(cos\,t) + c$

$= \frac{1}{2}x^2\,tan^{-1}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}ln[cos\,(tan^{-1}x)] + c$

مثال ١٠/ جد $\int sec^{-1}\sqrt{x}\,dx$

الحل /

$u = sec^{-1}\sqrt{x} \qquad du = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}dx = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= xsec^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = xsec^{-1}x - \sqrt{x-1} + c$$

مثال ١١/ جد $\int xsec^{-1}x\,dx$

الحل /

$u = sec^{-1}x \qquad du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

$dv = xdx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= \frac{1}{2}x^2sec^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \frac{1}{2}x^2sec^{-1}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c$$

التكامل بالكسور الجزئية

أعداد الأستاذ

عبدالسلام محمد

بأشراف الدكتور

جواد محمود جاسم

2016

تكامل بالكسور الجزئية :-

اذا كانت $g(x)$, $h(x)$ دالتين كثيرتي الحدود وكانت $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ دالة كسرية

لغرض ايجاد التكامل للدالة $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ بطريقة الكسور الجزئية ، يجب توفر الشرطين

١- اذا كانت درجة $h(x)$ اصغر من درجة $g(x)$

٢- $g(x)$ قابلة للتحليل

٣- اذا كانت درجة $h(x)$ اكبر من أو تساوي درجة $g(x)$ ، نوجد اولا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطوله ثم نكتب الدالة على $f(x)=q(x)+\frac{p(x)}{g(x)}$ حيث $p(x)$ هو باقي القسمة

٤- اذا كانت عوامل $g(x)$ من الدرجة الاولى ومختلفة

$$\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots\cdots+\frac{A_r}{a_rx^2+b_rx+c_r}$$

٥- اذا كانت عوامل $g(x)$ من الدرجة الثانية ومختلفة

$$\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{m_1x+n_1}+\frac{A_2}{m_2x+n_2}+\cdots\cdots+\frac{A_r}{m_rx+n_r}$$

٦- اذا كان المقام $g(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر من عوامل$g(x)$ على شكل $(mx+n)^k$ يكون الكسر الجزئي على شكل

$$\frac{h(x)}{(mx+n)^k}=\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\frac{A_3}{(mx+n)^3}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{(mx+n)^k}$$

٧- اذا كان $g(x)$ على شكل $(ax^2+b)^n$ يكون الكسر الجزئي على شكل

$$\frac{h(x)}{(ax^2+b)^n}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+b}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+b)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(ax^2+b)^3}+\cdots\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+b)^n}$$

٨- اذا كان $g(x)$ على شكل $(ax^2+bx+c)^n$ يكون الكسر الجزئي على شكل

$$\frac{h(x)}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_3+B_3}{(ax^2+bx+c)^3}+\cdots\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

س١/ جد $\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,dy$

$$\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}dy = \int \left(\frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{Cy+D}{(y^2+1)^2}\right)dy$$
$$y^2+2y+1 = (Ay+B)(y^2+1)+Cy+D$$
$$y^2+2y+1 = A(y^3+y)+B(y^2+1)+Cy+D$$

من المطابقة

الحد الثابت $B+D=1$

معامل y $A+C=2$

معامل y^2 $B=1$

معامل y^3 $A=0$

نعوض عن $B=1$ $\Longleftarrow 1+D=1 \Longleftarrow D=0$

نعوض عن $A=0$ $\Longleftarrow 0+C=1 \Longleftarrow C=2$

$$\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}dy = \int \left(\frac{1}{y^2+1} + \frac{2y}{(y^2+1)^2}\right)dy = tan^{-1}y - \frac{1}{y^2+1} + c$$

==

س٢/ جد $\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}\,dx$

$$\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}dx = \int \left(\frac{Ax+B}{4x^2+1} + \frac{Cx+D}{(4x^2+1)^2}\right)dx$$

$$8x^2+8x+2 = (Ax+B)(4x^2+1)+Cx+D$$
$$8x^2+8x+2 = 4Ax^3+Ax+4Bx^2+B+Cx+D$$

من المطابقة

الحد الثابت $B+D=2$

معامل x $A+C=8$

معامل x^2 $4B=8 \Longleftarrow B=2$

معامل x^3 $A=0$

نعوض عن $A=0$ $\Longleftarrow C=8$

نعوض عن $B=2$ $\Longleftarrow D=0$

$$\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}dx = \int \left(\frac{2}{(2x)^2+1} + \frac{8x}{(4x^2+1)^2}\right)dx = \tan^{-1}2x - \frac{1}{4x^2+1} + c$$

س٣/ جد $\int \frac{x^4+81}{x(x^2+9)^2}dx$

$$\int \frac{x^4+81}{x(x^2+9)^2}dx = \int (\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9} + \frac{Dx+E}{(x^2+9)^2})dx$$

$$x^4 + 81 = A(x^2+9)^2 + (Bx+C)x(x^2+9) + (Dx+E)x$$

$$x^4 + 81 = Ax^4 + 18Ax^2 + 81A + Bx^4 + 9Bx^2 + Cx^3 + 9Cx + Dx^2 + Ex$$

من المتطابقة

الحد الثابت $A = 1 \quad 81A = 81 \Longrightarrow$

معامل x $\quad 9C + E = 0$

معامل $x^2 \quad 18A + 9B + D = 1$

معامل $x^3 \quad C = 0 \quad E = 0 \Longleftarrow$

معامل $x^4 \quad A + B = 1 \quad B = 0 \Longleftarrow$

نعوض عن $A = 1$, $B = 0$ $\Longleftarrow 18 + D = 1 \Longleftarrow D = -17$

$$\int \frac{x^4+81}{x(x^2+9)^2}dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{-17x}{(x^2+9)^2})dx = ln|x| + \frac{17}{2(x^2+9)} + c$$

==

س٤/ جد $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}dx = \int (\frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2})dx$$

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

نعوض عن $x = 0$

$$0 + 0 - 1 = A(0-1)(0+2) + 0 + 0 \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

نعوض عن $x = -2$

$$4 - 4 - 1 = A(-4-1)(-2+2) - 2B(-2+2) - 2C(-4-1)$$

$$-1 = 10C \Longrightarrow C = \frac{-1}{10}$$

نعوض عن $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4} + 1 - 1 = A(1-1)(\frac{1}{2}+2) + \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}+2\right) + \frac{1}{2}C(1-1)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{4}B \Longrightarrow B = \frac{1}{5}$$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}dx = \int (\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} - \frac{\frac{1}{10}}{x+2})dx$$

$$= \frac{1}{2}ln|x| + \frac{1}{10}|2x-1| - \frac{1}{10}|x+2| + c$$

س٥/ جد $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx$

$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx = \int (\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1})dx$

$5x - 3 = A(x+1) + B(x-3)$

نعوض عن $x = 3$

$15 - 3 = A(3+1) + B(3-3) \Longrightarrow 4A = 12 \Longrightarrow A = 3$

نعوض عن $x = -1$

$-5 - 3 = A(-1+1) + B(-1-3) \Longrightarrow -4B = -8 \Longrightarrow B = 2$

$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx = \int (\frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1})dx = 3ln|x-3| + 2ln|x+1| + c$

==

س٦/ جد $\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx$

$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx = \int (\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3})dx$

$x^2 + 4x + 1 = A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)$

نعوض عن $x = 1$

$1 + 4 + 1 = A(1+1)(1+3) + B(1-1)(1+3) + C(1-1)(1+1)$

$6 = 8A \Longrightarrow A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

نعوض عن $x = -1$

$1 - 4 + 1 = A(-1+1)(-1+3) + B(-1-1)(-1+3) + C(-1-1)(-1+1)$

$-2 = -4B \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$

نعوض عن $x = -3$

$9 - 12 + 1 = C(-3-1)(-3+1) \Longrightarrow -2 = 8C \Longrightarrow C = \frac{-1}{4}$

$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx = \int (\frac{\frac{3}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{-1}{4}}{x+3})dx$

$= \frac{3}{4}ln|x-1| + \frac{1}{2}ln|x+1| - \frac{1}{4}ln|x+3| + c$

س٧/ جد $\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx$

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int (\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}) dx$$

$$3x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$
$$3x+1 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

من المتطابقة

الحد الثابت $A - C = 1$

معامل x $-B + C = 3$

معامل x^2 $A + B = 0$

من حل المعادلات نجد $C = 1$, $B = -2$, $A = 2$

$$\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int (\frac{2}{x-1} + \frac{-2x+1}{x^2+1}) dx$$
$$= \int (\frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}) dx$$
$$= 2ln|x-1| - ln|x^2+1| + tan^{-1}x + c$$

==

س٨/ جد $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \int (\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}) dx$$

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x$$
$$1 = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + Ex$$

من المتطابقة

الحد الثابت $A = 1$

معامل x $C + E = 0$

معامل x^2 $2A + B + D = 0$

معامل x^3 $C = 0$

معامل x^4 $A + B = 0 \Longleftarrow B = -1$

بالتعويض عن $C = 0 \Longleftarrow E = 0$

بالتعويض عن $A = 1$, $B = -1$ $D = -1$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}) dx$$

$$= ln|x| - \frac{1}{2} ln|x^2+1| - \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

س٩/ جد $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = \int (\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}) dx$$

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$
$$1 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx$$

من المتطابقة

الحد الثابت $A = 1$

معامل x $-2A - B + C = 0$

معامل x^2 $A + B = 0$ $B = -1$

بالتعويض عن $A = 1 , B = -1$ $-2 + 1 + C = 0$ $C = 1$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}) dx$$

$$= ln|x| - ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + c$$

==

س١٠/ جد $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx = \int (\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}) dx$$

$$-2x + 4 = (Ax+B)(x-1)^2 + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)$$
$$-2x + 4 = (Ax+B)(x^2-2x+1) + Cx^3 - Cx^2 + Cx - C + Dx^2 + D$$
$$-2x + 4 = Ax^3 - 2Ax^2 + Ax + Bx^2 - 2Bx + B + Cx^3 - Cx^2 + Cx - C + Dx^2 + D$$
$$-2x + 4 = (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + B - C + D$$

من المتطابقة

الحد الثابت $B - C + D = 4$

معامل x $A - 2B + C = -2$

معامل x^2 $-2A + B - C + D = 0$

معامل x^3 $A + C = 0$

بحل المعادلات نحصل على $A = 2 \ , \ B = 1 \ , \ C = -2 \ , \ D = 1$

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx = \int (\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}) dx$$
$$= \int (\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}) dx$$

$$= ln|x^2+1| + tan^{-1}x - 2ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

تم الانتهاء من طباعة التكامل بالكسور الجزئية ليلة الاربعاء ٢٠١٦/٣/٧

س١١/ جد $\int \frac{x^2+3x-2}{x^3-x} dx$

$$\int \frac{x^2+3x-2}{x^3-x} dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}\ dx$$

$$x^2+3x-2 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)$$

من تطابق

من الحد المطلق $A = 2$

من معامل x $B - C = 3$

من معامل x^2 $A + B + C = 1$

بالتعويض عن $A=2$ نحصل $B + C = -1$

$A = 2 \qquad B = 1 \qquad C = -2$

$$\int \frac{x^2+3x-2}{x^3-x} dx = \int \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}\ dx$$
$$= 2\ln x + \ln(x+1) - 2\ln(x-1) + c$$
$$= \ln \frac{x^2(x+1)}{(x-1)^2} + c$$

===

س١٢/ جد $\int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1} dx$

$$\int \frac{x^2+x-2}{x^2(3x-1)+3x-1} dx = \int \frac{x^2+x-2}{(x^2+1)(3x-1)} = \int (\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{c}{3x-1}) dx$$

$$x^2+x-2 = (Ax+B)(3x-1) + C(x^2+1)$$
$$x^2+x-2 = 3Ax^2 - Ax + 3Bx - B + Cx^2 + C$$

من المتطابقة

الحد الثابت $B - C = 2$

معامل x $-A + 3B = 1$

معامل x^2 $3A + C = 1$

بحل المعادلات نحصل على $A = \frac{4}{5}\ ,\ B = \frac{3}{5}\ ,\ C = -\frac{7}{5}$

$$\int \frac{x^2+x-2}{x^2(3x-1)+3x-1} dx = \int (\frac{\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}}{x^2+1} - \frac{\frac{7}{5}}{3x-1}) dx$$
$$= \int (\frac{\frac{4}{5}x}{x^2+1} + \frac{\frac{3}{5}}{x^2+1} - \frac{\frac{7}{5}}{3x-1}) dx$$
$$= \frac{2}{5}\ln|x^2+1| + \frac{3}{5}\tan^{-1}x - \frac{7}{15}\ln|3x-1| + c$$

س١٣/ جد $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2} dx$

$$\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2} dx = \int \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}\ dx$$

$$2x^2 - 2x - 1 = A(x-1) + Bx(x-1) + cx^2$$

من تطابق

من الحد المطلق $A = 1$

من معامل x $A - B = -2$ $B = 3$

من معامل x^2 $B + C = 2$ $C = -1$

$$\int \frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1}\ dx$$

$$= -\frac{1}{x} + 3\ln x - \ln(x-1) + c$$

$$= -\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x^3}{x-1}\right) + c$$

==

س١٤/ جد $\int \frac{1}{x^3-x} dx$

$$\int \frac{dx}{x^3-x} = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}\ dx$$

$$1 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)$$

من تطابق

من الحد المطلق $A = -1$

من معامل x $B - C = 0$

من معامل x^2 $A + B + C = 0$

بالتعويض عن $A = -1$ نحصل $B + C = 1$

$A = -1$ $B = \frac{1}{2}$ $C = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{x^2+3x-2}{x^3-x} dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\ dx$$

$$= -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) + c$$

تمارين

س١/ جد $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx$

س٢/ جد $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$

س٣/ جد $\int \frac{x^3-3x^2+4x-2}{x(x-1)^2(x+1)(x+2)^3}dx$

س٤/ جد $\int \frac{x^2-2}{(x+1)(x-1)^2}dx$

س٥/ جد $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

س٦/ جد $\int \frac{dx}{x^3+x}dx$

س٧/ جد $\int \frac{3x+1}{(x-1)(2x+1)}dx$

س٨/ جد $\int \frac{tan^{-1}x}{x^2}dx$

س٩/ جد $\int \frac{2x-1}{x^2-4x+3}dx$

س١٠/ جد $\int \frac{4x^2-4x-1}{x^3-2x^2+x}dx$

التكاملات من الشكل $\int f(sinx\,, cos\,x, tan\,x)dx$ باستخدام ظل نصف الزاوية

$$tan\frac{x}{2} = t \qquad x = 2tan^{-1}t \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$sin\,x = \frac{2tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cos\,x = \frac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tan\,x = \frac{sinx}{cos\,x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

==

مثال ١/ جد $\int \frac{dx}{3+2cos\,x}dx$

Sol

$$let \quad t = tan\,\frac{x}{2} \qquad x = 2tan^{-1}t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \qquad cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{3+2cos\,x}dx = \int \frac{1}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{2}{3+3t^2+2-2t^2}dt$$

$$= \int \frac{2}{5+t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{5}}tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{5}} + c = \frac{2}{\sqrt{5}}tan^{-1}\left(\frac{tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right) + c$$

مثال ٢/ جد $\int \frac{sec\,x}{2tan\,x+sec\,x-1}dx$ واجب

مثال ٣/ جد $\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)} dx$

$$\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)} dx = \int \frac{1}{\cos x+\cos x \sin x} dx$$

$$let \quad t = \tan\frac{x}{2} \qquad x = 2\tan^{-1} t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{\cos x+\cos x \sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{1-t^2+\frac{2t-2t^3}{1+t^2}} dt = \int \frac{1+t^2}{1-t^4+2t-2t^3} dt = \int \frac{1+t^2}{(1-t^2)(t+1)^2} dt$$

$$= \int \frac{1+t^2}{(1-t^2)(t+1)^2} dt = \int \frac{At+B}{1-t^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} dt$$

$$1+t^2 = (At+B)(t+1)^2 + C(1-t^2) + D(1-t^2)(t+1)$$

$$1+t^2 = (At+B)(t+1)^2 + C(1-t^2)(t+1) + D(1-t^2)$$

$$1+t^2 = (At+B)(t^2+2t+1) + Ct - Ct^3 - Ct^2 + C + D + Dt^2$$

$$1+t^2 = At^3 + 2At^2 + At + Bt^2 + 2Bt + B + Ct - Ct^3 - Ct^2 + C + D - Dt^2$$

من المتطابقة

الحد الثابت $B + C + D = 1$

معامل t $A + 2B + C = 0$

معامل t^2 $-2A + B - C - D = 1$

معامل t^3 $A - C = 0$

بحل المعادلات نحصل على $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = 1$

$$\int \frac{1+t^2}{(1-t^2)(t+1)^2} dt = \int \frac{-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}}{1-t^2} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} dt$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{2}t}{1-t^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-t^2} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln|1-t^2| - \frac{1}{2}\tanh^{-1} t - \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|1-\tan^2\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\tanh^{-1}(\tan\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| - \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + c$$

مثال ٤/ جد $\int \frac{\tan x}{2-3\cos x} dx$

Sol

$$let \quad t = \tan\frac{x}{2} \qquad x = 2\tan^{-1}t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\int \frac{\tan x}{2-3\cos x}dx = \int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{2-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{\frac{4t}{1-t^2}}{2+2t^2+3-3t^2}dt =$$

$$= \int \frac{\frac{4t}{1-t^2}}{5-t^2}dt = \int \frac{4t}{(1-t^2)(5-t^2)}dt = \int \frac{At+B}{1-t^2} + \frac{Ct+D}{5-t^2}dt$$

$$4t = (At+B)(5-t^2) + (Ct+D)(1-t^2)$$

$$4t = 5At - At^3 + 5B - Bt^2 + Ct - Ct^3 + D - Dt^2$$

$$5B + D = 0 \qquad 5A + C = 4 \qquad B + D = 0 \qquad A + C = 0$$

$$A = 1 \qquad C = -1 \qquad B = 0 \qquad D = 0$$

$$\int \frac{At+B}{1-t^2} + \frac{Ct+D}{5-t^2}dt = \int \frac{t}{1-t^2} - \frac{t}{5-t^2}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-t^2) + \frac{1}{2}\ln(5-t^2) + c$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(5-\tan^2\frac{x}{2}\right) + c$$

=====================

مثال ٥/ جد $\int \frac{\tan x}{1+\sin x} dx$

مثال ٦/ جد $\int \frac{1}{\sin x+\cos x} dx$

مثال ٧/ جد $\int \frac{1}{\cos x+2\sin x+3} dx$

مثال ٨/ جد $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x} dx$

التكامل باستخدام التويضات الدوال المثلثية

اذا كانت التكاملات تحتوي على المقادير الاتية :-

1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ 3) $\sqrt{x^2 - a^2}$

او تكون

1) $\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^n$ 2) $\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^n$ 3) $\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n$

اولا / اذا كان التكامل يحتوي على المقدار $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

$let \quad x = a \sin\theta \quad \Longrightarrow \quad dx = a\cos\theta\, d\theta$

ثم نتخلص من θ ونحولها بدلالة x باستخدام المثلث القائم الزاوية

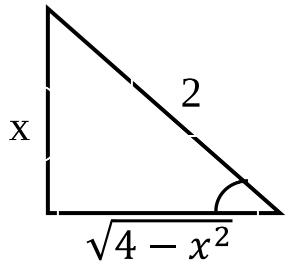
مثال ١ / جد $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

$let \quad x = 2\sin\theta \qquad dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}}d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\,(2\cos\theta)}d\theta$$

$$= \int \frac{1}{4\sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int csc^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\cot\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\cot\theta + c = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$



مثال٢ / جد $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

الحل /

$$let\ \ x = 2\sin\theta \qquad\qquad dx = 2\cos\theta$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-4\sin^2\theta}\ (2\cos\theta)\,d\theta$$
$$= \int \sqrt{4\cos^2\theta}\,(2\cos\theta)\,d\theta$$
$$= \int 4\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \int 2 + 2\cos 2\theta\,d\theta$$
$$= 2\theta + \sin 2\theta + c$$
$$= 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + 2\sin\theta\cos\theta + c$$
$$= 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + c$$

===

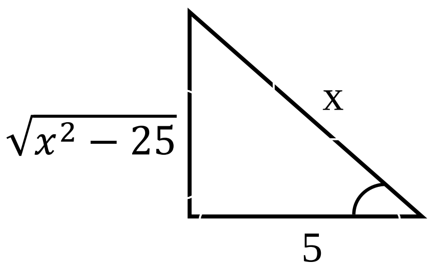
ثانيا / اذا كان التكامل يحتوي على المقدار $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

$$let\ \ x = a\sec\theta \quad \Longrightarrow \quad dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

مثال٣ / جد $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-25}}$

$$let\ \ x = 5\sec\theta \qquad\qquad dx = 5\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-25}}dx = \int \frac{5\sec\theta\tan\theta}{125\sec^3\theta\sqrt{25\sec^2\theta-25}}d\theta = \int \frac{\tan\theta}{25\sec^2\theta\,(5\tan\theta)}d\theta$$
$$= \frac{1}{125}\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{125}\int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{250}\theta + \frac{1}{500}\sin 2\theta + c$$
$$= \frac{1}{250}\theta + \frac{1}{250}\sin\theta\cos\theta + c$$
$$= \frac{1}{250}\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{1}{250}\,\frac{5\sqrt{x^2-25}}{x^2} + c$$



ثانيا / اذا كان التكامل يحتوي على المقدار $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$

$$let\quad x = a\tan\theta \qquad dx = a\sec^2\theta\ d\theta$$

مثال٤/ جد $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$

$$let\ \ x = 3\tan y \qquad dx = 3\sec^2 y\,dy$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \int \frac{3\sec^2 y\,dy}{(9\tan^2 y+9)^2}$$

$$= \int \frac{3\sec^2 y\,dy}{(9\sec^2 y)^2} = \int \frac{dy}{27\sec^2 y}$$

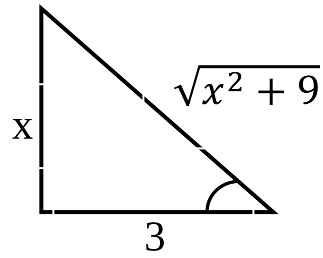
$$= \frac{1}{27}\int \cos^2 y\,dy = \frac{1}{54}\int 1+\cos 2y\,dy$$

$$= \frac{1}{54}y + \frac{1}{108}\sin 2y + c = \frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{108}$$

$$= \frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{54}\sin y\cos y + c$$

$$= \frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{54}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\right) + c$$

$$= \frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{18(x^2+9)} + c$$



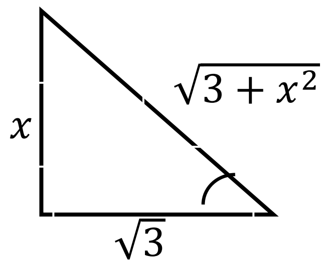
مثال٥/ جد $\int \sqrt{3+x^2}\,dx$

$$let\ \ x = \sqrt{3}\tan y \qquad dx = \sqrt{3}\sec^2 y\,dy$$

$$\int \sqrt{3+x^2}\,dx = \int \sqrt{3+3\tan^2 y}\,(\sqrt{3}\sec^2 y)\,dy$$

$$= \int 3\sec^3 y\,dy$$

$$= \int \sec^2 y\sec y\,dy$$



$$u = \sec y \qquad du = \sec y\tan y\,dy$$

$$dv = \sec^2 y\,dy \qquad v = \tan y$$

$$\int \sec^3 y\,dy = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \sec y\tan y - \int \tan^2 y\sec y\,dy$$

$$= \sec y\tan y - \int \sec^3 y - \sec y\,dy$$

$$2\int \sec^3 x\,dy = \sec y\tan y + \int \sec y\,dy$$

$$2\int \sec^3 y dy = \sec y\tan y + \ln|\sec y+\tan y|$$

$$\int \sec^3 y\,dy = \frac{1}{2}\sec y\tan y + \frac{1}{2}\ln|\sec y+\tan y| + c$$

ثم نعوض

س/ برهن ان $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = Ln(\sqrt{x^2+a^2}+x)+c$

البرهان

$$let \quad x = a\tan y \qquad dx = a\sec^2 y\, dy$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 y\, dy}{a\sec y} = \int \sec y\, dy = \ln(\sec y + \tan y) + c_1$$

$$= Ln\left(\sqrt{\tan y + 1} + x\right) + c_1$$

$$= Ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + a^2} + \frac{x}{a}\right) + c_1$$

$$= Ln\left(\sqrt{x^2+a^2} + x\right) - \ln a + c_1$$

$$= Ln\left(\sqrt{x^2+a^2} + x\right) + c$$

===

س/ برهن ان $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = Ln(\sqrt{x^2-a^2}+x)+c$

البرهان

$$let \quad x = a\sec y \qquad dx = a\sec y\tan y\, dy \qquad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan y$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec y \tan y\, dy}{a\tan y} = \int \sec y\, dy = \ln(\sec y + \tan y) + c$$

$$= Ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + c$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2-a^2} + x\right) - \ln a + c$$

$$= Ln\left(\sqrt{x^2-a^2} + x\right) + c$$

طريقة اكمال المربع

مثال/ جد $\int \frac{dx}{x^2-4x+1}$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+1} = \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)-3}$$

$$= \int \frac{dx}{(x-2)^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$let \quad u = x-2 \qquad du = dx$$

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2-(\sqrt{3})^2} = \int \frac{du}{u^2-(\sqrt{3})^2} = \int \frac{du}{(u-\sqrt{3})(u+\sqrt{3})} = \int \frac{A}{u-\sqrt{3}} + \frac{B}{u+\sqrt{3}} du$$

$$A+B=0 \qquad A-B=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad A=\frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad B=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{A}{u-\sqrt{3}} + \frac{B}{u+\sqrt{3}} du = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{1}{u-\sqrt{3}} du - \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{1}{u+\sqrt{3}} du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} ln|u-\sqrt{3}| - \frac{1}{2\sqrt{3}} ln|u+\sqrt{3}| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} ln|x-2-\sqrt{3}| - \frac{1}{2\sqrt{3}} ln|x-2+\sqrt{3}| + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right| + c$$

======

س/ اثبت ان $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}} dx \leq \int_1^2 \frac{x^3}{2} dx$ **(دون اجراء التكامل) منقول**

$$x^4+4 \geq 4$$

$$\sqrt{x^4+4} \geq 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4+4}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}} \leq \frac{x^3}{2} \qquad x \in [1,2]$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4}} dx \leq \int_1^2 \frac{x^3}{2} dx$$

$$1)\int \frac{dx}{x^4+4x^2+3} = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3}$$
$$= tan^{-1}x - \frac{1}{2\sqrt{3}} tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$2)\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$
$$= sin^{-1}(x-1) + c$$

$$3)\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x^2-4x+4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3-(x-2)^2}}$$
$$= sin^{-1}\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$4)\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int \frac{dx}{x^2-2x+1+4} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

$$5)\int \frac{x^2+2x-1}{x^2+9}dx = \int \frac{x^2+9+2x-10}{x^2+9}dx$$

$$= \int 1 + \frac{2x}{x^2+9} - \frac{10}{x^2+9}dx$$

$$= x + ln|x^2+9| - \frac{10}{3}tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

$$6)\int \frac{3}{4x^2+4x+4}dx = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\frac{3}{4}+(x^2+x+\frac{1}{4})}$$
$$= \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{3}{4}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\ tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$7)\int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{dx}{x^2-4x+4+9} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+9}$$
$$= tan^{-1}\frac{x-2}{3} + c$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} dx$$

Sol

$let \quad t = 2 + \cos x \qquad dt = -\sin x\, dx$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{(2+\cos x)^2} dx = -\int \frac{t-2}{t^2} dt$$

$$= -\int \frac{1}{t} - 2t^{-2} dt$$

$$= -\ln t - \frac{2}{t} + c = -\ln(2+\cos x) - \frac{2}{2+\cos x} + c$$

==

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x} dx$$

Sol

$let \quad t = \tan\frac{x}{2} \qquad x = 2\tan^{-1} t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} dt \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x} dx = \int \frac{1}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{3+3t^2+2-2t^2} dt$$

$$= \int \frac{2}{5+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{5}} + c = \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{1-\csc x} dx = \int \frac{-\sin x}{1-\sin x} dx$$

$$= \int \frac{-\sin x(1+\sin x)}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{-\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int -\tan x \sec x - \tan^2 x\, dx$$

$$= \int -\tan x \sec x - \sec^2 x + 1\, dx$$

$$= -\sec x - \tan x + x + c$$

1) $\int \frac{dx}{x\,(\ln x)^2} = \int (\ln x)^{-2}\,\frac{1}{x}dx = -(\ln x)^{-1} + c = \frac{-1}{\ln x} + c$

2) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+2x} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \ln\left(1+\sqrt{x}\right) + c$

3) $\int (\ln 2x - \ln x)\,dx = \int \ln\frac{2x}{x}dx = \int \ln 2\,dx = x\ln 2 + c$

4) $\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{e^{-x}}{e^{-x}}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\ln(e^{-x}+1) + c$

6) $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$

7) $\int x3^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x\,3^{x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{x^2}}{\ln 3} + c$

8) $\int \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan x}\sec^2 x\,dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\tan x}}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + c$

9) $$\begin{aligned}\int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx &= \int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})} \\ &= \int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2} \\ &= \int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int e^{2x}+2+e^{-2x}dx \\ &= \frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}e^{-2x}+c\end{aligned}$$

==

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x+5\sin x\cos x}dx &= \int \frac{1}{\sin^2 x+5\sin x\cos x}\cdot\frac{\csc^2 x}{\csc^2 x}dx \\ &= \int \frac{\csc^2 x}{1+5\cot x}dx = -\frac{1}{5}\ln|1+5\cot x| + c\end{aligned}$$

ايجاد مساحة المنطقة المستوية

ايجاد مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات على الفترة $[a,b]$

١- نجد نقاط التقاطع مع محور السينات وذلك بجعل الدالة $f(x)=0$ ومنها نجد قيم x

٢- نلاحظ قيم x هل تنتمي للفترة ام لا

٣- اذا كانت قيم x تنتمي للفترة $[a,b]$ نجزء الفترة

٤- اذا كانت قيم x لا تنتمي للفترة $[a,b]$ لا نجزأ الفترة

٥- نجري عملية التكامل على كل فترة جزئية

٦- نجمع القيم المطلقة للتكاملات في الخطوة

مثال ١/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^3-4x$ ومحور السينات بالفترة $[-2,2]$

الحل /

$$x^3-4x=0$$
$$x(x^2-4)=0$$
$$x=0$$
$$or\ \ x^2-4=0 \Longrightarrow x^2=4 \Longrightarrow x=\mp 2$$

الفترات هي $[-2,0],[0,2]$

$$A_1=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$=[0]-[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2]=-[4-8]=4$$

$$A_1=\int_{0}^{2}(x^3-4x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2]-[0]=4-8=-4$$

$A=\lfloor A_1\rfloor+\lfloor A_2\rfloor=4+4=8$ وحدة مربعة

مثال٢/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x)=x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x=1, x=3$

الحل /

$$x^2=0 \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow 0 \notin [1,3]$$

الفترة هي $[1,3]$

$$A_1=\int_1^3 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$$ وحدة مساحة

==

مثال٣/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x)=x^3-3x^2+2x$ ومحور السينات

الحل /

$$x^3-3x^2+2x=0$$

$$x(x^2-3x+2)=0$$

$$x=0$$

$$or\ \ x^2-3x+2=0$$

$$(x-2)(x-1)=0 \Longrightarrow x=2\ \ or\ \ x=1$$

الفترات هي $[0,1],[1,2]$

$$A_1=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{4}-1+1\right]-[0]=\frac{1}{4}$$

$$A_2=\int_1^2(x^3-3x^2+2x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{16}{4}-8+4\right]-\left[\frac{1}{4}-1+1\right]=4-4-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$A=\lfloor A_1\rfloor+\lfloor A_2\rfloor=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$ وحدة مربعة

مثال٤/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات بالفترة $[-2,3]$

الحل /

$$x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = 1 \implies x = \mp 1 \in [-2,3]$$

الفترات هي $[-2,-1],[-1,1],[1,3]$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1}$$
$$= \left[\frac{-1}{3}+1\right] - \left[\frac{-8}{3}+2\right] = \frac{2}{3} - \frac{-2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1}(x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1}$$
$$= \left[\frac{1}{3}-1\right] - \left[\frac{-1}{3}+1\right] = \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3}(x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3}$$
$$= \left[\frac{27}{3}-3\right] - \left[\frac{1}{3}-1\right] = [9-3] - \left[\frac{-2}{3}\right] = 6 + \frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|6\frac{2}{3}\right| = 6\frac{10}{3} = 9\frac{1}{3}$$ وحدة مربعة

مثال٥/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور السينات بالفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$$\sin x = 0 \qquad x = 0 + n\pi$$

$$n = 0 \implies x = 0 \in [-\pi/2, \pi]$$

$$n = 1 \implies x = \pi \in [-\pi/2, \pi]$$

$$n = 2 \implies x = 2\pi \notin [-\pi/2, \pi]$$

$$n = -1 \implies x = -\pi \notin [-\pi/2, \pi]$$

الفترات هي $[-\pi/2, 0],[0,\pi]$

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\, dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$
$$= [-\cos 0] - \left[-\cos -\frac{\pi}{2}\right] = -1 - 0 = -1$$

$$A_1 = \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_{0}^{\pi}$$
$$= [-\cos \pi] - [-\cos 0] = 1 + 1 = 2$$

$$A = |A_1| + |A_2| = |-1| + |2| = 1 + 2 = 3$$ وحدة مساحة

مثال٦/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x) = \cos x$ ومحور السينات بالفترة $[-\pi, \pi]$

$\cos x = 0 \qquad x = \pi/2 + n\pi$

$n = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$

$n = 1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

$n = 2 \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{2} \notin [-\pi, \pi]$

$n = -1 \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi/2, \pi]$

الفترات هي $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\sin -\frac{\pi}{2}\right] - [\sin -\pi] = -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\sin \frac{\pi}{2}\right] - [\sin -\pi] = 1 + 1 = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = |-1| + |2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4$ وحدة مساحة

تمارين

س١/ جد المساحة المحدده بالمنحني $f(x) = x^4 - x$ ومحور السينات و المستقيمين $x = 1, x = -1$

الحل /

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \in [-1, 1]$$

$$or \;\; x^3 - 1 = 0 \Longrightarrow x^3 = 1 \Longrightarrow x = 1$$

الفترات هي $[-1, 0], [0, 1]$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - x)dx = \left[\frac{x^5}{4} - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$= [0] - \left[\frac{-1}{5} - \frac{1}{2}\right] = -\left[\frac{-2-5}{10}\right] = \frac{7}{10}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} (x^4 - x)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right] - [0] = \left[\frac{2-5}{10}\right] = \frac{-3}{10}$$

$A = |A_1| + |A_2| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$ وحدة مساحة

س٣/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0$

$x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

$or\ x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \mp 1$

الفترات هي $[-1, 0], [0, 1]$

$$A_1 = \int_{-1}^{0}(x^4 - x^2)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$= [0] - \left[\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right] = -\left[\frac{-3+5}{15}\right] = -\frac{2}{15}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1}(x^4 - x^2)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$= \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] - [0] = \left[\frac{3-5}{15}\right] = -\frac{2}{15}$$

$A = \lfloor A_1 \rfloor + \lfloor A_2 \rfloor = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15} = 1$ وحدة مساحة

س٢/ جد المساحة المحدده بالدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2, 3]$ ومحور السينات

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$

$x^2 + 1 \neq 0$

$x^2 - 4 = 0$

$(x - 2)(x + 2) = 0 \qquad x = 2 \in [-2, 3] \quad or \quad x = -2$

الفترات $[-2, 2], [2, 3]$

$$A = \left|\int_{-2}^{2}(x^4 - 3x^2 - 4)dx\right| + \left|\int_{2}^{3}(x^4 - 3x^2 - 4)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}\right| + \left|\left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{2}^{3}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right) - \left(\frac{-32}{5} + 8 + 8\right)\right| + \left|\left(\frac{243}{5} - 27 - 12\right) - \left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right)\right|$$

$$= \left|\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{5} - 16\right| + \left|\frac{243}{5} - 39 - \frac{32}{5} + 16\right|$$

$$= \left|\frac{64}{5} - 32\right| + \left|\frac{211}{5} - 23\right|$$

$= \left|\frac{64-160}{5}\right| + \left|\frac{211-115}{5}\right| = \frac{96}{5} + \frac{96}{5} = \frac{192}{5}$ وحدة مساحة

س١٠/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$
$$x(x^2 + 4x + 3) = 0$$
$$x(x + 3)(x + 1) = 0$$
$$x = 0 \quad or \quad x = -3 \quad or \quad x = -1$$

الفترات $[-3, -1], [-1, 0]$

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{-1}$$
$$= \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right] - \left[\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right]$$
$$= \frac{3-16+18}{12} - \frac{243-432+162}{12} = \frac{5}{12} - \frac{-27}{12} = \frac{32}{12}$$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$= [0] - \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right]$$
$$= -\left[\frac{3-16+18}{12}\right] = -\frac{5}{12}$$

$A = \lfloor A_1 \rfloor + \lfloor A_2 \rfloor = \frac{32}{12} + \frac{5}{12} = \frac{37}{15}$ وحدة مساحة

==

س٤/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x) = \sin 3x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin 3x = 0 \implies 3x = 0 \implies x = 0$$
$$\sin 3x = 0 \implies 3x = \pi \implies x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin3x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sin3x\, dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right| + \left|\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$
$$= \left|-\frac{1}{3}\cos \pi + \frac{1}{3}\cos 0\right| + \left|-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos \pi\right|$$

$= \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right| + \left|0 - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ وحدة مساحة

مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

اذا كانت $f(x)$, $g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فان مساحة المنطقة A المحصورة بين المنحنيين نجدهما كما ياتي

١- نجد نقاط التقاطع المنحنيين وذلك بجعل $f(x) = g(x)$ ومنها نجد قيم x

٢- اذا كانت قيم x تنتمي الى الفترة نقوم بتجزئة الفترة $[a,b]$

٣- نجد تكامل $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

==

مثال١/ جد المساحة المحددة بالمنحني الدالة $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$

نجد تقاطع المنحنيين وذلك

$$\sqrt{x} = x$$
$$x = x^2$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad or \quad x = 1 \Longrightarrow x \in [0,1]$$
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

$\therefore A = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$ وحدة مساحة

==

مثال٢/ جد المساحة المحددة بالمنحني الدالة $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

$$x^3 = x$$
$$x^3 = x$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad or \quad x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \mp 1$$

الفترات هي $[-1,0], [0,1]$

$$A_1 = \int_{-1}^0 (x^3 - x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0$$
$$= [0] - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = -\left[\frac{1-2}{4}\right] = \frac{1}{2}$$
$$A_2 = \int_0^1 (x^3 - x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$ وحدة مساحة

س٦/ جد المساحة المحددة بالمنحني الدالة $y=\sqrt{x-1}$ والمستقيم $y=\frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2,5]$

نجد تقاطع المنحنيين وذلك

$$\frac{1}{2}x=\sqrt{x-1}$$

$$\frac{1}{4}x^2=x-1 \qquad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$x^2=4x-4$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0 \Longrightarrow x-2=0 \Longrightarrow x=2 \Longrightarrow x\in[2,5]$$

$$A=\int_2^5\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}-\frac{1}{4}x^2\right]_2^5$$

$$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(5-1)^3}-\frac{1}{4}(5)^2\right]-\left[\frac{2}{3}\sqrt{(2-1)^3}-\frac{1}{4}(2)^2\right]$$

$$=\left[\frac{16}{3}-\frac{25}{4}\right]-\left[\frac{2}{3}-1\right]$$

$$=\frac{64-75}{12}-\frac{2-3}{3}=\frac{-11}{12}+\frac{1}{3}=\frac{-11+4}{12}=\frac{-7}{12}$$

$$\therefore A=\left|\frac{-7}{12}\right|=\frac{7}{12} \quad \text{وحدة مساحة}$$

==

س٧/ جد المساحة المحددة بالمنحني الدالة $y=x^4-12$ والمستقيم $y=x^2$

$$x^4-12=x^2$$

$$x^4-x^2-12=0$$

$$(x^2-4)(x^2+3)=0$$

$$x^2-4=0 \Longrightarrow x^2=4 \Longrightarrow x=\mp2$$

$$x^2+3=0 \Longrightarrow x^2=-3 \quad \text{يهمل}$$

الفترة هي $[-2,2]$

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(x^4-x^2-12)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-12x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$=\left|\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-24\right)-\left(\frac{-32}{5}+\frac{8}{3}+24\right)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{96-40-360}{15}\right)-\left(\frac{-96+40+360}{15}\right)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{96-400}{15}\right)-\left(\frac{-96+400}{15}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{-304}{15}-\frac{304}{15}\right|=\frac{608}{15} \quad \text{وحدة مساحة}$$

مثال/ جد المساحة المحددة بالمنحني الدالة $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

الحل /

$$\sin x=\cos x$$

$$\tan x=1 \Longrightarrow x=\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad or \quad x=\frac{5\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

الفترات $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right],\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

$$A_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x-\sin x\;dx=[\sin x+\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right]-\left[\sin(-\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{\pi}{2})\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+1-0=\frac{2}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1$$

$$A_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x-\sin x\;dx=[\sin x+\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right]-\left[\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=1+0-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$$

$A=|A_1|+|A_2|=\left|\sqrt{2}+1\right|+\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

س٨/ جد المساحة المحددة بالمنحني الدالة $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sin x\cos x$ وعلى الفترة $[0,2\pi\,]$

$$\sin x\;\cos x=\sin x$$

$$\sin x\;\cos x-\sin x=0$$

$$\sin x\;(\cos x-1)=0$$

$$\sin x=0 \Longrightarrow x=0 \quad or \quad x=\pi$$

$$cosx-1=0 \Longrightarrow \cos x=1 \Longrightarrow x=0 \quad or \;\; x=2\pi$$

الفترات هي $[0,\pi],[\pi,2\pi]$

$$A_1=\int_0^{\pi}\sin x\cos x-\sin x\,dx=\left[\frac{1}{2}sin^2x+\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=\left[\frac{1}{2}sin^2\pi+\cos\pi\right]-\left[\frac{1}{2}sin^2 0+\cos 0\right]=-1-1=-2$$

$$A_2=\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\cos x-\sin x\,dx=\left[\frac{1}{2}sin^2x+\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\left[\frac{1}{2}sin^2 2\pi+\cos 2\pi\right]-\left[\frac{1}{2}sin^2\pi+\cos\pi\right]=1+1=2$$

$A=|A_1|+|A_2|=|-2|+|2|=2+2=4$ وحدة مساحة

س٩/ جد المساحة المحددة بالمنحني الدالة $f(x) = 2\sin x + 1$ و $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

$2\sin x + 1 = \sin x$

$2\sin x + 1 - \sin x = 0$

$\sin x + 1 = 0 \Longrightarrow \sin x = -1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

$$A_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x + 1 \; dx = [-\cos x + x]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \left[-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3\pi}{2}\right] - [-\cos 0 + 0]$$

$$= 0 + \frac{3\pi}{2} + 1 = \frac{3\pi}{2} + 1$$ وحدة مساحة

==

س٥/ جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $f(x) = 2cos^2x - 1$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

$2cos^2x - 1 = 0$

$2cos^2x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos 2x = 0 \Longrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin \frac{\pi}{2}\right] - [\sin 0] = \frac{1}{2}[1 + 0] = \frac{1}{2}$$

الفترات هي $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}[\sin \pi] - \left[\sin \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}[0 - 1] = -\frac{1}{2}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ وحدة مساحة

المسافة

١- نرمز للمسافة عند اي زمن t بالرمز $d(t)$
٢- نرمز للازاحة عند اي زمن t بالرمز $s(t)$
٣- نرمز للسرعة عند اي زمن t بالرمز $v(t)$
٤- نرمز للتعجيل عند اي زمن t بالرمز $a(t)$

القوانين

السرعة = مشتقة الازاحة بالنسبة للزمن t $\quad v(t) = s^{/}(t)$

التعجيل = مشتقة السرعة بالنسبة للزمن t $\quad a(t) = v^{/}(t)$

الازاحة = القيمة المطلقة للتكامل السرعة اي $\quad d = \left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\right|$

المسافة = تكامل السرعة اي $\quad s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$

السرعة = تكامل التعجيل اي $\quad v(t) = \int a(t)dt$

مثال / ***جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعه $v = 2t - 4\ m$ فجد***

١- المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

٢- الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

٣- المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة .

٤- بُعده بعد مضى 4 ثواني من بدء الحركة .

الحل / من الواضح ان الجسم يغير اتجاهه

$$\mathbf{2t - 4 = 0 \implies 2t = 4 \implies t = 2 \in [1,3]}$$

$$\mathbf{1)\ d = \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)dx\right|}$$

$$\mathbf{= \left|[t^2 - 4t]_1^2\right| + \left|[t^2 - 4t]_2^3\right|}$$

$$\mathbf{= |(4-8) - (1-4)| + |(9-12) - (4-8)|}$$

$$\mathbf{= |-4+3| + |-3+4| = 1 + 1 = 2m}$$

$$\mathbf{2) s = \int_1^3 (2t-4)dt = [t^2 - 4t]_1^3 = (9-12) - (1-4) = -3 + 3 = 0}$$

$$\mathbf{3)\ d = \left|\int_4^5 (2t-4)dt\right| = [t^2 - 4t]_4^5 = [25-20) - (16-16) = 5m}$$

$$\mathbf{4)\ s = \int_0^4 (2t-4)dt = [t^2 - 4t]_0^4 = (16-16) - (0) = 0}$$

مثال ٢/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $18\ m/s^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82m/s$ بعد مرور $4s$ من بدء الحركة

١ـ المسافة خلال الثانية الثالثة

٢ـ بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني

الحل /

$$1)\ v=\int a(t)dt=\int 18dt=18t+c$$
$$v=\int 18dt$$
$$v=18t+c$$
$$82=18(4)+c \Longrightarrow c=82-72=10$$
$$v=18t+10$$

$$d=\int v\ dt=\int_2^3 18t+10\ dt$$
$$=[9t^2+10t]_2^3$$
$$=(81+30)-(36+20)=111-56=55m$$

$$2)\ S=\int_0^3(18t+10)dt=[9t^2+10t]_0^3=[81+30]-[0]=111\ m$$

===

س١١ / ***جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعه $v(t)=(3t^2-6t+3)\ m/s$ احسب :***

١ـ المسافة المقطوعة في الفترة $[2,4]$

٢ـ الازاحة في الفترة $[0,5]$

الحل / من الواضح ان الجسم يغير اتجاهه

$$3t^2-6t+3=0$$
$$t^2-2t+1=0$$
$$(t-1)^2=0 \Longrightarrow t=1\in[2,4]$$

$$1)\ d=\left|\int_2^4(3t^2-6t+3)dt\right|=\left|\int_2^4(t^3-3t^2+3t)dx\right|$$
$$=|(64-48+12)-(8-12+6)|$$
$$=|28-2|=26\ m$$

$$2)\ s=\int_0^5(3t^2-6t+3)dt=[t^3-3t^2+3t]_0^5$$
$$=[125-75+15]-[0]=65\ m$$

س ١٢ / جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12\ )m/s^2$ و كانت سرعته بعد مرور 4 s تساوي 90 m/s احسب :

١ ـ السرعة عندما $t = 2$

٢ ـ المسافة خلال الفترة $[1, 2]$

٣ ـ الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

الحل /

$$1)\ v(t) = \int a(t)dt = \int 4t + 12\ dt = 2t^2 + 12t + c$$

$$90 = 2(4)^2 + 12(4) + c$$
$$90 = 32 + 48 + c \Longrightarrow c = 90 - 80 = 10$$
$$v(t) = 2t^2 + 12t + 10$$
$$v(2) = 2(2)^2 + 12(2) + 10 = 8 + 24 + 10 = 42\ m/s$$

$$2)\ d = \int v(t)dt = \int_1^2 2t^2 + 12t + 10\ dt$$
$$= \left[\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 10t\right]_1^2$$
$$= \left[\frac{2}{3}(2)^3 + 6(2)^2 + 10(2)\right] - \left[\frac{2}{3} + 6 + 10\right]$$
$$= \left[\frac{16}{3} + 24 + 20\right] - \left[\frac{2}{3} + 16\right]$$
$$= \frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16 = \frac{14}{3} + 28 = 4\frac{2}{3} + 28 = 32\frac{2}{3}m$$

$$3)\ s = \int v(t)dt = \int_0^{10} 2t^2 + 12t + 10\ dt$$
$$= \left[\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 10t\right]_0^{10}$$
$$= \left[\frac{2}{3}(10)^3 + 6(10)^2 + 10(10)\right] - [0]$$
$$= \frac{2000}{3} + 600 + 100 = \frac{2000+2100}{3} = \frac{4100}{3}m$$

س١٣/تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدا الحركة أصبحت سرعتها $100t - 6t^2\ m/s$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه ، ثم احسب التعجيل عندها

الحل /

بما ان النقطة تعود الى موضعها الاول فاذا الازاحة = صفر اي $s = 0$

$$s = \int v dt = \int (100t - 6t^2) dt = 50t^2 - 2t^3 + c$$

الجسم يتحرك من السكون $s = 0\ ,\ \ t = 0$

$$0 = 0 - 0 + c \implies c = 0$$

$$s = 50t^2 - 2t^3$$

$$0 = 50t^2 - 2t^3$$

$$0 = 25t^2 - t^3 \qquad \div 2$$

$$t^2(25 - t) = 0$$

$t = 0$ تهمل

$25 - t = 0 \implies t = 25$ الزمن اللازم

التعجيل = مشتقة السرعة

$$a(t) = v^{/}(t) = 100 - 12t$$

$$a(25) = 100 - 12(25) = 100 - 300 = -200\ m/sec^2$$

قال رسول الله صلى الله عليه و اله

((قيدوا العلم قيل وما تقييدة ؟ قال : كتابته))

الحجوم الدورانية

١- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني دالة $y = f(x)$ المستمرة من $x = a$ الى $x = b$ حول محور السينات نستخدم العلاقة

$$v = \int_a^b \pi y^2 dx$$

٢- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني دالة $y = f(x)$ المستمرة من $y = a$ الى $y = b$ حول محور الصادات نستخدم العلاقة

$$v = \int_a^b \pi x^2 dx$$

مثال١ / المنطقة المحددة بين المنحني $0 \leq x \leq 4$, $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات ، دارت حول محور السينات ، جد حجمها .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \int_0^4 \pi x\, dx = \left[\pi \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \frac{16}{2} - 0 = 8\pi$$

مثال٢ / المنطقة المحددة بين المنحني $1 \leq x \leq 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات جد حجمها .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_1^4 (\frac{1}{\sqrt{y}})^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{1}{y}\, dy = \pi[\ln y]_1^4$$

$$= \pi[ln4 - ln1] = \pi \ln 4 = 2\pi ln2$$ وحدة مكعبة

مثال٣ / اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ حول المحور السيني .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^2 8\pi x dx = [4\pi x^2]_0^2 = 16\pi - 0 = 16\pi$$

مثال٤/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$
والمستقيمين $x = 5$, $x = 0$ حول المحور السيني .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^5 4\pi x^4 dx = \frac{4\pi}{5}\left[x^5\right]_0^5 = \frac{4\pi}{5}[312 - 0] = 2500\pi$$

===

مثال٥/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 4x^2$
والمستقيمين $y = 16$, $y = 0$ حول المحور الصادي .

الحل /

$$v = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy = \pi \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16} = \pi \left[\frac{16^2}{8} - 0\right] = 32\pi$$ وحدة مكعبة

===

س٣/ اوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة
$y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ دورة كاملة حول المحور الصادي

الحل /

$x = 1 \Longrightarrow y = 1$, $x = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = 2$

$$v = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy = \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi \left[\frac{-1}{2} + 1\right] = \frac{1}{2}\pi$$ وحدة مكعبة

===

س١ / اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2$
والمستقيمين $x = 2$, $x = 1$ حول المحور السيني .

الحل /

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{32}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{31}{5}\pi$$ وحدة مكعبة

===

س٢/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$
والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي .

$y = x^2 + 1 \Longrightarrow x^2 = y - 1$

$$v = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_1^4 (y - 1) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_0^4$$

$$= \pi \left[\left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \pi \left(4 + \frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{2}\pi$$ وحدة مكعبة