General linear hypothesis of full rank

بسم الله الرحمن الرحيم
قل هو الله احد الله الصمد لم يلد ولم يولد ولم يكن له كفوا احد صدق الله العلي العظيم

General Linear hypothesis of full rank.

Case I

Given $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$

Consider $H_0: H\beta = h$

$H_1: H\beta \neq h$

where H is $r \times p$ of rank $r \leq p$

and $H_{r \times p}$ is linearly independent.
بين الصفوف

example:
Consider the linear Model

ولتوضيح فكرة الصيغة H
سنأخذ هذا المثال المذكور
في Graybill ص 184

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \beta_4 X_{4i} + \epsilon_i \quad ; i = 1, 2, \dots, n$$

The following are example of tests that may be of inter.

(1) $H_0: \beta_1 = \beta_2$

$$\therefore H = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0], \quad h = 0$$

(2) $H_0: \beta_1 = \beta_2, \ \beta_3 = \beta_4$

$$\therefore H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 6$

$$\therefore H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(4) $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

$$\therefore H = I_5, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5) $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$

$$\therefore H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6) $H_0: \beta_1 - 2\beta_2 = 4\beta_3, \ \beta_1 + 2\beta_2 = 6$

$$\therefore H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Not: The matrix H and h are not necessary unique for example

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ and } H_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

example.

let we have the table

مثال

افرض لدينا الجدول التالي.

Data		model
y_i	x_i	
y_1	x_1	model I
y_2	x_2	$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$
⋮	⋮	$i = 1, 2, \dots, 10$
y_{10}	x_{10}	
y_{11}	x_{11}	model II
y_{12}	x_{12}	$y_i = \alpha^* + \beta^* x_i + \epsilon_i$
⋮	⋮	$i = 11, 12, \dots, 20$
y_{20}	x_{20}	

نلاحظ من الجدول بانه تم تجزأت البيانات الى جزئين وانه لكل جزء منهم يوجد انموذج خاص به حيث ان البيانات من (1 الى 10) لها انموذج رقم واحد model I والبيانات من (11 الى 20) لها انموذج رقم اثنين model II

المطلوب معرفة هل ان الانموذجين متطابقين

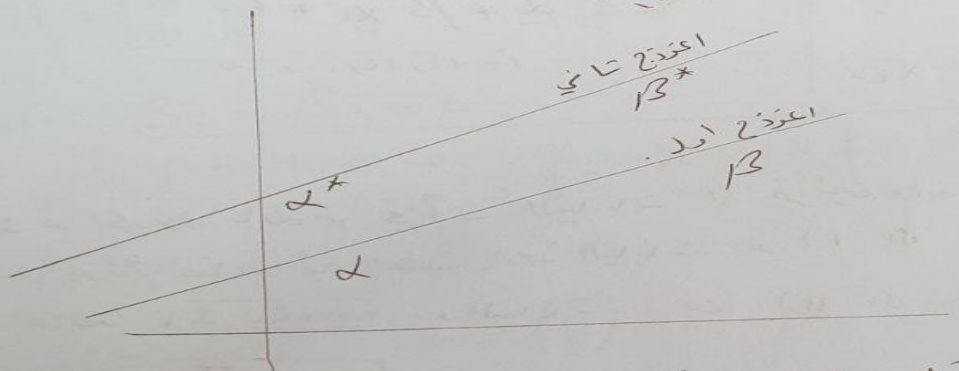
والاجابة على هذا السؤال ستكون بصياغة الفرضية التالية:

$$H_0: \quad \alpha = \alpha^* \qquad \alpha - \alpha^* = 0$$
$$\beta = \beta^* \qquad \beta - \beta^* = 0$$

$$H_1: \quad \alpha \neq \alpha^*$$
$$\beta \neq \beta^*$$

والتوضيح ايضاً اذا ذكر في السؤال اختبر الفرضية التالية.
فانه يقصد هذان الانموذجين متطابقين.

ونلاحظ عندما نريد رسم الانموذجين



ولذلك نسمي مثل هذا الاختبار باختبار التوازي.

Q) Find the distribution of:

$$\frac{(H\hat{\beta}-h)'\,(H(x'x)^{-1}H')^{-1}\,(H\hat{\beta}-h)}{r\,S^2}$$

proof

let $Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$

and $\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$

Let $x^c = (x'x)^{-1}x'$

and $H^c = H'(HH')^{-1}$

Know

$$(H\hat{\beta}-h)'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}-h)$$

$$= (H(x'x)^{-1}x'y - h)'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H(x'x)^{-1}x'y - h)$$

$$= \left[H(x'x)^{-1}x'\left[y - xH'(HH')^{-1}h\right]\right]'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}\left[H(x'x)^{-1}x'\left[y - xH'(HH')^{-1}h\right]\right]$$

(x^c, H^c)

$$= [Hx^c(y - xH^ch)]'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}[Hx^c(y - xH^ch)]$$

$$= [y - xH^ch]'\underbrace{(x^cH'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}Hx^c)}_{A}[y - xH^ch]$$

Then

$$= (y - xH^ch)'\,A\,(y - xH^ch)$$

Consider the point estimator of $H\beta$, namely $H\hat{\beta}$ estimator

$H_0 : \quad H\beta = h$

$\therefore \quad V(H\hat{\beta}) = \left[H(X'X)^{-1}H'\right]\sigma^2$

and $\dfrac{(H\hat{\beta}-h)'\left(H(X'X)^{-1}H'\right)^{-1}(H\hat{\beta}-h)}{r\,s^2} \sim F_{r,n-p}$ under H_0

where $E(MSE)$ and $H(X'X)^{-1}H'$ are idempotent

and also

$$E\left(\frac{(H\hat{\beta}-h)'\left(H(X'X)^{-1}H'\right)^{-1}(H\hat{\beta}-h)}{r}\right) =$$

$$E(\quad) = \sigma^2 + \frac{(H\hat{\beta}-h)'\left(H(X'X)^{-1}H'\right)^{-1}(H\hat{\beta}-h)}{r}$$

$= 0$ under H_0

> 0 under H_1

(Q) Find the distribution of:

$$\frac{(H\hat{\beta}-h)'\,(H(x'x)^{-1}H')^{-1}\,(H\hat{\beta}-h)}{r\,S^2}$$

proof

let $Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$

and $\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$

Let $x^c = (x'x)^{-1}x'$

and $H^c = H'(HH')^{-1}$

الفرضيات تستخدم لتبسيط الكلام فقط.

(1) الخطوة الأولى في إيجاد التوزيع للبسط وكما يلي

Know

$$(H\hat{\beta}-h)'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}-h)$$

$$= (H(x'x)^{-1}x'y - h)'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H(x'x)^{-1}x'y - h)$$

بتعويض عامل مشترك ضخم ت.

$$= \left[H\underbrace{(x'x)^{-1}x'}_{x^c}\left[y - x\underbrace{H'(HH')^{-1}}_{H^c}h\right]\right]'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}\left[H\underbrace{(x'x)^{-1}x'}_{x^c}\left[y - x\underbrace{H'(HH')^{-1}}_{H^c}h\right]\right]$$

$$= [Hx^c(y - xH^ch)]'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}[Hx^c(y - xH^ch)]$$

$$= [y - xH^ch]'\underbrace{(x^{c\prime}H'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}Hx^c)}_{A}[y - xH^ch]$$

Then

$$= (y - xH^ch)'\,A\,(y - xH^ch)$$

A هي المصفوفة

دائماً عندما يطلب التوزيع:

1. اكتب الفرضية.
2. اعوض مباشرة.
3. استخرج عامل مشترك على Y.
4. اعرف المصفوفة A و Q و ارتباطهم.
5. وتكون بدلالة X و H - أو إحداهما.

بدل عن الـ Y.

إذا كانت فرضية تربيعية

$A^2 = A$

$r(A) = tr(A)$

يستخدم هذا النوذج فقط في حالة اختبار الفرضية الرئيسية

χ^2 توزيع

125

اعوض فيهم
الان نرى هل ان A صماء ام لا.
اذا صماء نجد لها الرتبة. فاذا كانت اقل من n. وبذلك
وبذلك هي تتوزع توزيع مربع كاي في المركب ثم كمل
لا اذا هيه قام مركب واذا ≠ صفر نهو غير مركب

$$A = x^c H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H x^c$$

if $A^2 = A$ then A is idempotent. هون A صار

$$A^2 = A \cdot A$$

$$= \left\{ x^c H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H x^c \right\} \left\{ x^c H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H x^c \right\}$$

$$= x^c' H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H \underbrace{x^c x^{c'}} H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H x^c$$

where $x^c x^{c'} = (x'x)^{-1} x' ((x'x)^{-1} x')'$

$$= \underbrace{(x'x)^{-1} x' x (x'x)^{-1}}_{I}$$

$$\therefore \boxed{x^c x^{c'} = (x'x)^{-1}}$$

نقوم ضرب ب.

$$= x^c' H' \underbrace{(H(x'x)^{-1} H')^{-1} (H(x'x)^{-1} H')}_{I} H x^c$$

$$= x^c' H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H x^c$$

$$A^2 = A$$

$$\therefore A^2 = A$$

$$\therefore A \text{ is idempotent.}$$

$A = x^c H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H x^c$

اكمال البرهنة لـ A.

$r(A) = tr(A)$

$= tr\{ x^c H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H x^c \}$

$= tr\{ H x^c x^{c'} H' [H(x'x)^{-1} H']^{-1} \}$

But $x^c x^{c'} = (x'x)^{-1}$ then

$= tr[H(x'x)^{-1} H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1}]$

$= tr[(H(x'x)^{-1} H')(H(x'x)^{-1} H')^{-1}]$

$= tr(I_r)$

$\boxed{r(A) = r}$

$\therefore r(A) = r < p$

then $(Y - X H^c h)' A (Y - X H^c h) \sim \chi^2_{(r,\nu)}$

where $\nu = \frac{\text{tr } A}{2r}$.

اولین بخش λ کنیم که حل است توزیع وجه کای مرکب از غیرمرکب
خاذا $\lambda = 0$ حتما مرکزی اما اذا $\lambda > 0$ حتما غیرمرکب

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \mu' A \mu$$

$$(y - xH^c h)' A (y - xH^c h)$$

دکن کن لزنیا
حتما بعنی باتا تحاج اک

$$\mu = E(y - xH^c h)$$
$$\mu = E(y - xH^c h)$$
$$= Ey - xH^c h$$
$$= x\beta - xH^c h$$

$$\boxed{\mu = x(\beta - H^c h)}$$

$y \sim N(x\beta, \sigma^2 I)$ نن

عوبة لك فان

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2} \mu' A \mu$$
$$= \frac{1}{2\sigma^2} (x(\beta - H^c h))' A (x(\beta - H^c h))$$
$$= \frac{1}{2\sigma^2} (x(\beta - H^c h))' (H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} Hx^c)(x(\beta - H^c h))$$
$$= \frac{1}{2\sigma^2} [(\beta - H^c h)' x' x^{c\prime} H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H x^c x (\beta - H^c h)]$$
$$= \frac{1}{2\sigma^2} [(\beta - H^c h)' \underbrace{x' x (x'x)^{-1}}_{I} H' (H(x'x)^{-1} H')^{-1} H \underbrace{(x'x)^{-1} x'}_{I} x (\beta - H^c h)]$$

$x^c = (x'x)^{-1} x'$
$x^{c\prime} = x(x'x)^{-1}$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\left\{(B - H^c h)' H' (H(X'X)^{-1}H')^{-1} H (B - H^c h)\right\}$$

But we have $H^c = H'(HH')^{-1}$ then

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left\{(B - H'(HH')^{-1}h)' H' (H(X'X)^{-1}H')^{-1} H (B - H'(HH')^{-1}h)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left[\left\{B - H'(HH')^{-1}h\right\}' (H(X'X)^{-1}H')^{-1}\left\{H(B - H'(HH')^{-1}h\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left[HB - HH'(HH')^{-1}h\right]' (H(X'X)^{-1}H')^{-1}\left[HB - HH'(HH')^{-1}h\right]$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\left[HB - h\right]' (H(X'X)^{-1}H')^{-1}\left[HB - h\right]$$

$\therefore$ $(Y - XH^c h)' A (Y - XH^c h) \sim \chi^2_{(r,\lambda)}$

where $A = \frac{1}{2\sigma^2}(HB - h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(HB - h)$

$\therefore$ $(Y - XH^c h) A (Y - XH^c h) = (HB - h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(HB - h)$

$\sim \chi^2_{(r,\lambda)}$

where $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(HB - h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(HB - h)$

Know under $H_0: HB = h \Longrightarrow \lambda = 0$

where

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(HB - h)'(HC(X'X)^{-1}H')^{-1}(HB - h)$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}(HB - HB)'(HC(X'X)^{-1}H')^{-1}(HB - HB)$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}(0)'(HC(X'X)^{-1}H')^{-1}(0)$$

$$\boxed{\lambda = 0}$$

وبذلك فان التوزيع يكون مركزيا اى

$$(H\hat{B} - h)'(HC(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{B} - h) \sim \chi^2_r$$

وهكذا عبل التوزيع للبسط.

والان سننتقل للخطوة التالية

وهى ايجاد التوزيع للمقام وهكذا

② الخطوة الثانية

ايجاد التوزيع للمقام. والذي عبارة عن S^2 وكما ذكرنا

we have $S^2 = \frac{Y'Y - \hat{\beta}' X'Y}{n-p}$

① نفك الجزء المقام

$$(n-p)S^2 = Y'Y - ((X'X)^{-1}X'Y)'X'Y$$

$$= Y'Y - Y'X(X'X)^{-1}X'Y$$

② نخرج العوامل

$$= Y'[I - X(X'X)^{-1}X']Y$$

$$(n-p)S^2 = Y' B Y$$

③ نبرهن بالمبرهنة

وان المصفوفة B مربعة سابقاً بانها صار

ورتبتها n

ورتبتها والتوزيع سيكون $r(B) = n-p$ وبذلك فان $\lambda = 0$ قد انيت سابقاً

$$\boxed{(n-p)S^2 = Y' B Y \sim \chi^2_{n-p}}$$

وهو عبارة توزيع المقام.

وهي الخطوة وأصبح الخطوة الثانية فان التوزيع سيكون

in general

$$\frac{\chi^2_{r}/r}{\chi^2_{n-p}/(n-p)} \sim F_{r,\,n-p}$$

③ والخطوة الثالثة: لكي نتوزعها توزيع F فلابد ان يكون البسط مستقل عن المقام وذلك حسب الخطوات السابقة

$(Y - XH^c h)' A (Y - XH^c h)$

$A = X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c$

$(n-p) S^2 = Y' B Y$

$B = (I - X(X'X)^{-1} X')$

$A \cdot B = (X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c)(I - X(X'X)^{-1} X')$

$= X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c - X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c X(X'X)^{-1} X'$

$= X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c - X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c X(X'X)^{-1} X'$

we have $X^c = (X'X)^{-1} X'$ then

$= X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c - X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H \underbrace{X(X'X)^{-1} X'}_{I}$

$= X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c - X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H \underbrace{(X'X)^{-1} X'}_{X^c}$

$= X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c - X^{c'} H' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} H X^c$

$A \cdot B = 0$

Then S^2 and $(H\hat{\beta} - h)' (H(X'X)^{-1} H')^{-1} (H\hat{\beta} - h)$ are independent

(4) الخطوة الرابعة

ومن ذلك فان التوزيع يصبح .

$$\frac{(H\hat{\beta}-h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}-h)/r\sigma^2}{(n-p)s^2/(n-p)\sigma^2} \sim \frac{\chi^2_{r,\lambda}/r}{\chi^2_{(n-p)}/(n-p)}$$

$$= \frac{\chi^2_{(r,\lambda)}/r}{\chi^2_{(n-p)}/n-p} \sim F'_{r,n-p,\lambda}$$

وبذلك فان التوزيع هو .

$$\therefore \quad \frac{(H\hat{\beta}-h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}-h)}{rs^2} \sim F'_{r,n-p,\lambda}$$

(5) وتحت الفرضية H_0 فان

وهذا يعني بان

under H_0: $H\beta = h$

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}(H\hat{\beta}-h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\beta-h)$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}(h-h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(h-h)$$

$$\lambda = 0$$

وهذا يعني بان التوزيع هو F المركزي اي

$$\frac{(H\hat{\beta}-h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\beta-h)}{rs^2} \sim F_{r,n-p}$$

التوزيع تحت الفرضية H_0 .

الان خذ التوقع

$$E\left(\frac{(H\hat{\beta}-h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}-h)}{r}\right)$$

$$= E\left[\frac{(Y-X\hat{\beta}_h)'A(Y-X\hat{\beta}_h)}{r}\right]$$

$$= \frac{\sigma^2 tr(A) + \mu' A \mu}{r}$$

$$= \frac{\sigma^2(r) + (H\hat{\beta}-h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}-h)}{r}$$

$$= \sigma^2 + \frac{(H\hat{\beta}-h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}-h)}{r}$$

وبذلك فعند الفرضية H_0 فان هذا اي يكون هو $(=0)$ under H_0 : $= 0$

اما تحت الفرضية H_1 فيكون اكبر من (>0) under H_1 : > 0

وذلك فتحت الفرضية H_0 فان

$$E(\quad) = \sigma^2 + \frac{\quad}{r}$$

$$= \sigma^2 + \frac{0}{r}$$

$$E(\quad) = \sigma^2$$

توقع البسط

$$E(S^2) = \sigma^2$$

اما توقع المقام فهو

ولكن

$$\text{but} \quad F = \frac{EMS}{EMS} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \quad \text{under } H_0$$

P. 114 عنوان searl ملاحظة مأخوذة من كتاب

$$F(\quad) = \frac{(H\hat{\beta}-h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}-h)}{\sigma^2}$$

Because H is a vector this can be written of:

$$F(\quad) = \frac{(H\hat{\beta}-h)^2}{(H(X'X)^{-1}H')\hat{\sigma}^2} \sim F(1, n-p) \quad \text{, under } H_0$$

since $A \cdot B = \phi$

and $H\hat{\beta} \sim N(H\beta, (H(X'X)^{-1}H')\sigma^2$

(*) Consider Now the special case. (X is partional)

$$Y = X\beta + \epsilon$$

where $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ p-r \end{matrix} \Big\} p$, $X = \begin{bmatrix} \overset{r}{X_1} & \vdots & \overset{p-r}{X_2} \end{bmatrix} \Big\} n$

اعمدة X يمثل بمتغيرات

صفوف

① وطبقاً لهذه التجزئة فإن

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \epsilon$$

② ولاختبار الفرضية

$H_0 : \beta_1 = 0$

هذا الاختبار غير السابق
اما الاول فهو بالصيغة العامة
الاتي

$H_0 : H\beta = h$

حيث ان

$$H_{r\times p} = \begin{bmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ r\times r & & r\times p-r \end{bmatrix} , \quad \beta_{1\times p} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} , \quad h_{r\times 1} = \underset{\text{متجه}}{0}$$

③ The numerator of the test statistic is

$$\hat{\beta}_1' \left[X_1' X_1 - X_1' X_2 (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 \right] \hat{\beta}_1$$

④ actually G.L.H. test reduced to:

(a) write model unrestricted, get SS reg.

(b) write model restricted, get SS reg.

(c)

$$F = \frac{\Delta \text{ SS reg}}{\Delta \text{ d.f.}} \Big/ S^2 \text{ unrestricted.}$$

$$= \frac{(SSR_{ui} - SSR_R)}{(d.f._u - d.f._R)} \Big/ S^2 \text{ unrestricted}$$

$$= \frac{(SSE_R - SSE_u)/(d.f_u - d.f._R)}{S^2 \text{ unrestricted.}}$$

example.

The model

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \epsilon_i \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

d.f. = 4

---- (1)

(1) For the test $H_0: \beta_1 = 2$, $\beta_2 = 0$

we have restricted model (نموذج مقيد)

($\beta_1 = 2$ في الوضعية، β_2 الوضعية)

$$y_i = \alpha + 2 x_{1i} + \beta_3 x_{3i} + \epsilon_i$$ ---- (2)

restricted mode

باستخدام فرضية الاختبار H_0 اصبح النموذج في المعادلة (1) نموذج مقيد لانه تتبع من تعويض قيم $\beta_1 = 2$ ، وقيم $\beta_2 = 0$ في الوضعية H_0 اي ان النموذج خضع للفرضية H_0 ولذلك فهو تقييدي ، ونطلق على هذا النموذج بالنموذج المقيد

واذا قمنا بنقل الحدود خارجية والبقية في جهة أخرى باعتبارها معلوم سنحصل على النموذج جديد هو

the we have the reduced model

$$y_i - 2 x_{1i} = \alpha + \beta_3 x_{3i} + \epsilon_i$$ ---- (3)

وسمي هذا النموذج بالنموذج المختزل لاننا في المعادلة (1) كان لدينا (4) معلمات اما في المعادلة (3) فاصبح لدينا فقط معلمتين (β_3 و α) واصبح لدينا متغير واحد فقط هو x_3 ولذلك سمي النموذج مختزل reduced model.

ويمكن كتابة الفرضية H_0 اعلاه بصيغة الفرضية الخطية العامة. $H\beta = h$ وكتابة

$$H_0: H\beta = h$$

where $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) for the test.

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$

The restricted model is

$$y_i = \alpha + \beta x_{1i} + \beta x_{2i} + \beta x_{3i} + \epsilon_i$$ restricted model

$$y_i = \alpha + \beta (x_{1i} + x_{2i} + x_{3i}) + \epsilon_i$$ ⟶ the reduced model

d.f. = 2

let $x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} = X_i$ then

$$y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i$$ the also reduced model

d.f. = 2

ويمكن كتابة الفرضية H_0 اعلاه بصيغة الفرضية الخطية العامة وكالاتي:
General Linear hypothesis

$H_0: \quad H\beta = h$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

قل هو الله احد الله الصمد لم يلد ولم يولد
ولم يكن له كفوا احد
صدق الله العلي العظيم

ملاحظات في اختبار الفرضيات

(1) اذا اردنا اختبار فرضية بسيطة ضد فرضية بسيطة
Simple Simple
مثلاً

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta = \theta_1$

فلاختبار هذه الفرضية يمكن ان نستخدم الطريقة التالية:
(S.L.R.T) Simple Linear Ratio Test
وتسمى هذه الطريقة ايضاً بطريقة نيمن - بيرسن
(N-P) Neyman - pearson

حيث ان

$$\frac{L_0}{L_1} \leq k$$

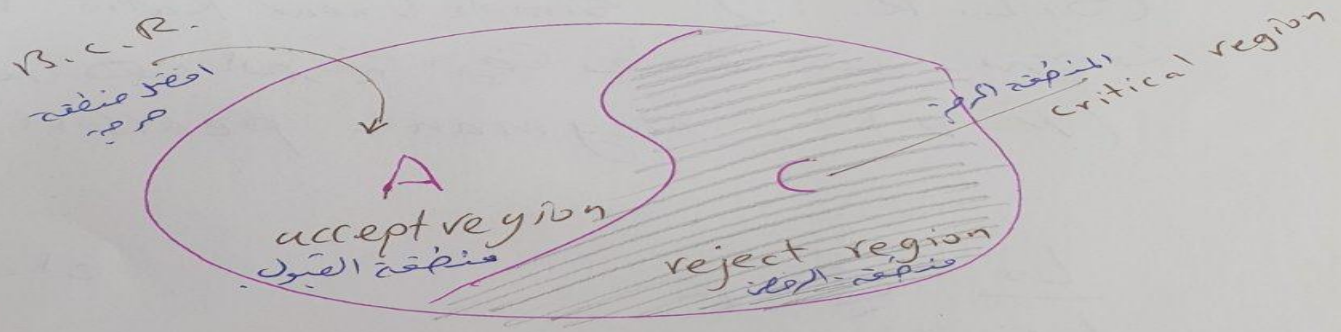
where $$\frac{L(\theta_0, x_1, \dots, x_n)}{L(\theta_1, x_1, \dots, x_n)} \leq k$$

for each point $(x_1, \dots, x_n) \in C$

where C = Critical region المنطقة الحرجة.
وهي المنطقة الحرجة التي تقود الى رفض الفرضية H_0

$$C = \left\{ x \in S ; \frac{L_1}{L_0} \geq k \right\}$$

وهذا يعني اذا وقعت نقطة العينة في المنطقة الحرجة C فان ذلك سيؤدي الى رفض الفرضية H_0 . وبالعكس نقبل الفرضية H_0 اذا وقعت نقطة العينة خارج المنطقة الحرجة $\leq$.



② اذا اردنا اختبار فرضية بسيطة

ضد فرضية اخرى غير بسيطة (مركبة) ايات

$H_0: \Theta = \Theta_0$ فرضية بسيطة simple hypo.

$v.s. H_1: \Theta \neq \Theta_0$ فرضية معقدة composite hypo.

ولذلك تعتبر مركبة اذا $\Theta > \Theta_0$ او $\Theta < \Theta_0$ عندما $\Theta \neq \Theta_0$

لاختبار هذه الفرضية من الممكن ايضا استخدام (N-P) بعد تحويل الفرضية H_1 من فرضية مركبة الى فرضية بسيطة وكما يأتي اي ان H_1 تصبح.

$H_1: \Theta = \Theta_1 \neq \Theta_0$

واي اختبر منطقة رفض هي التي تعطي اعلى قوة اختبار (UMP) (Uniformly most power). وتعرف هذه المنطقة بانها المنطقة التي تختبر فرضية بسيطة ضد فرضية مركبة اذا كانت $\beta \in BCR$ في المنطقة الحرجة C اصغر منطقة حرجة. Best critical region.

ولاختبار فرضية بسيطة ضد فرضية بسيطة أخرى (اي اية منطقة افرض هذه ان وجدت سوف تعطي الاختبار الأقوى نسبة).

اما اذا وجدت اكثر من منطقة حرجية واحدة فاننا سوف لا نحصل على اصغر منطقة رفض BCR وتسمى Uniformly Best critical region هذا نقول وهو الحل في مثل هذه الحالة

Def.: let C denote a subset of the sample space. The C is called a B.C.R. (Best critical Region) of size α. for testing the simple hypothesis:

$H_0: \theta = \theta_0$

vs. $H_1: \theta \neq \theta_1$

if for every subset A of the sample space for which

$$pr[(x_1, \ldots, x_n) \in A, H_0] = \alpha$$

(i) $pr[(x_1, \ldots, x_n) \in C, H_0] = \alpha$

(ii) $pr[(x_1, \ldots, x_n) \in C, H_0] \geq pr[(x_1, \ldots, x_n) \in A, H_1]$

To find the B.C.R. for testing simple hypothesis.

$H_0: \theta = \theta_0$

vs $H_1: \theta \neq \theta_1$

we can use Neyman-Pearson Theorem (N-P)

where.

(i) $$\frac{L(\theta_0, x_1, \ldots, x_n)}{L(\theta_1, x_1, \ldots, x_n)} \leq k$$ for each point $(x_1, \ldots, x_n) \in C$

(ii) $$\alpha = pr[(x_1, \ldots, x_n) \in C, H_0]$$

اذا وجدت اكثر من منطقة حرجة واحدة فاننا سوف لانزهل على (احسن) منطقة حرجة (Uniformly Best critical region) (UBCR). فماذا نفعل وما هو الحل

وما هو العدد في مثل هذه الحالة.

Def.

في مثل هذه الحالة فاننا سنستخدم G.L.R.T

Generalized likelihood Ratio Test.

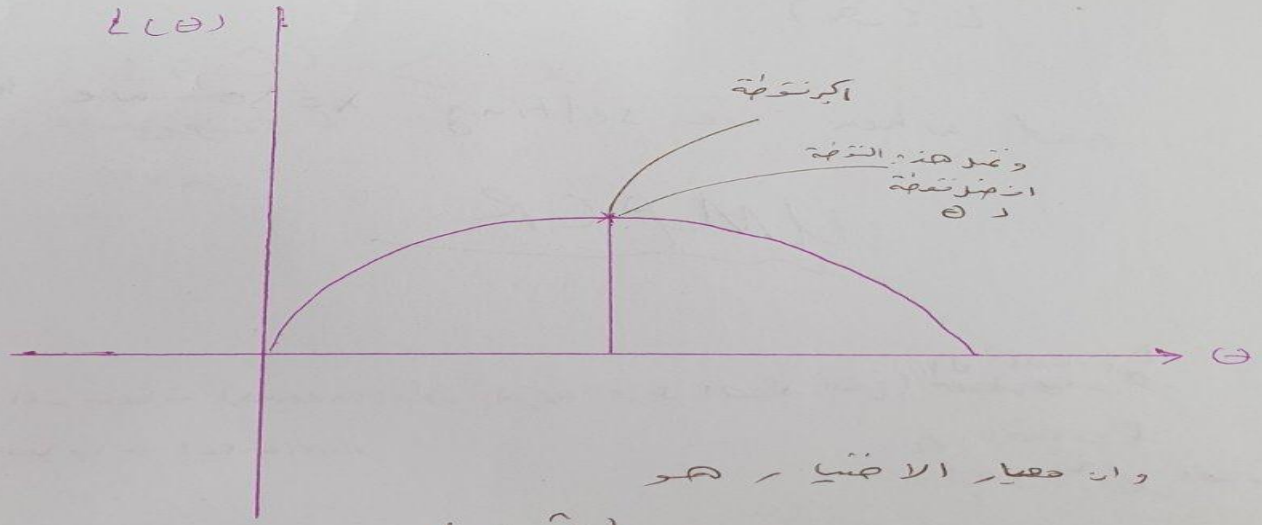
وتذكرة تتلخص:

بكيفية اختيار نقطة من نقاط البسط ، نقطة من نقاط المقام.

فالمشكلة التي تواجهنا هي كيفية اختيار افضل نقطة لـ θ بالنسبة للبسط.

وكذلك كيفية اختيار افضل نقطة لـ θ بالنسبة للمقام.

وكل هذه المشكلة سنستخدم طريقة الامكان الاعظم او M.L.E.



وان معيار الاختبار هو

$$\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \leq k$$

وان قيمة هذا المقدار محصورة بين الصفر والواحد الصحيح.

وان مجموع القيم لـ L في البسط ومجموع القيم لـ L في المقام تكون بقدر عدد الـ θ الممكنة.

Def: **Generalized Likelihood Ratio Test**

(GLRT)

let $X_1, \dots, X_n$ be ar.s. from $f(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$ To test $H_0: \theta_i = \theta_0$, $\theta_j > 0$, $i \neq j$ against all composit alternative hypo. we use:

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$$

where

$L(\hat{\omega})$: is the max. Likelihood fun. given

$L(\hat{\Omega})$:

and when we setting $\lambda = \lambda_0$ we have

UMPCR.

ملاحظة /

① عند اختبار المتوسطات (means) وكون التباين تربيع انحراف المتغير) ← اي اختبار t

② عند اختبار التباينات (variance) ← اي اختبار F

او اختبار χ^2 اصيانة

In (w) Restricted Model

Max $L(\underline{\epsilon}, \underline{\beta})$ subject to $H_0: \underline{\beta} = \underline{\beta}_0$

H_0 تكون صحيحة $\beta = \beta_0$ وفقاً للفرضية H_0 $(\underline{\epsilon}, \underline{\beta})$ تقدير الأخطاء والمعالم تحت شرط الفرضية H_0 أي $\beta = \beta_0$

then $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{(\underline{Y} - X\underline{\beta}_0)'(\underline{Y} - X\underline{\beta}_0)}{n}$

H_0 تحت الفرضية — مقدر الانحراف

من الفرضية السابقة لدينا معلمية β و σ^2 وفي الفرضية H_0 نعلم β وتُرمز بـ β_0 حيث $H_0: \beta = \beta_0$ ويبقى لدينا σ^2 مجهولة لذلك سنقوم بتقديرها ويكون تقديرها المعتمد هو $\hat{\sigma}^2_\omega$ وتعد مقيدة Restricted.

لدينا $n\hat{\sigma}^2_\omega = (Y - X\beta_0)'(Y - X\beta_0)$

then $L(\underline{\epsilon}, \underline{\beta})$ in ω is:

$$L(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\hat{\sigma}^2_\omega\right)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2_\omega}\underbrace{(\underline{Y} - X\underline{\beta}_0)'(\underline{Y} - X\underline{\beta}_0)}_{= n\hat{\sigma}^2_\omega}\right\}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\hat{\sigma}^2_\omega\right)^{n/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2_\omega} n\hat{\sigma}^2_\omega\right\}$$

$$\therefore \boxed{L(\underline{\epsilon}, \underline{\beta}) \text{ in } (\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\hat{\sigma}^2_\omega\right)} e^{-\frac{n}{2}}}$$

Restricted Maximum Likelihood.

In (Ω) unrestricted Model:

هنا دنيا β و σ^2 حتى و سنستخدم لهما طريقة m.l. عند التقدير اي طريقة الامكان الاعظم الاعتيادية. لتقدير نكون حصلنا على $\hat{\beta}$ و $\hat{\sigma}^2$ اولا ←

where σ^2 set to $\hat{\sigma}^2$

and $\underline{\beta}$ set to $\underline{\hat{\beta}}$.

حيث where $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{(\underline{Y} - \underline{X}\underline{\hat{\beta}})'(\underline{Y} - \underline{X}\underline{\hat{\beta}})}{n}$

then $$L(\underline{\beta}, \sigma^2) \text{ in } (\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\hat{\sigma}_\Omega^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\hat{\sigma}_\Omega^2} \underbrace{(\underline{Y} - \underline{X}\underline{\hat{\beta}})'(\underline{Y} - \underline{X}\underline{\hat{\beta}})}_{n\hat{\sigma}_\Omega^2} \right\}$$

اي نستخدم تقديرات الامكان الاعظم الاعتيادية. وعند التعويض

$$L(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\hat{\sigma}_\Omega^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2}}$$

وبذلك كان الاختبار ...

$$\lambda = \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$$

$$= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\hat{\sigma}_\omega^2)^{n/2}} e^{-n/2}}{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\hat{\sigma}_\Omega^2)^{n/2}} e^{-n/2}}$$

$$\lambda = \left(\frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^{2/n} = \frac{\hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\omega^2}$$

$$\therefore \quad \lambda^{2/n} = \frac{SSE \text{ unrestricted}}{SSE \text{ restricted.}}$$

اي بدالة $\bar{x}$

اي بدالة β_0

$$= \frac{(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}})'(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}})}{(\underline{Y} - X\underline{\beta}_0)'(\underline{Y} - X\underline{\beta}_0)}$$

Recall and identify

$$(Y - X\beta_0)'(Y - X\beta_0) = (Y - X\beta_0 - X\hat{\beta} + X\hat{\beta})(Y - X\beta_0 - X\hat{\beta} + X\hat{\beta})$$

$$= [(Y - X\hat{\beta}) + X(\hat{\beta} - \beta_0)]' [(Y - X\hat{\beta}) + X(\hat{\beta} - \beta_0)]$$

$$= [(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta_0)'X'X(\hat{\beta} - \beta_0) + (Y - X\hat{\beta})'X(\hat{\beta} - \beta_0) + (\hat{\beta} - \beta_0)'X'(Y - X\hat{\beta})]$$

$$= (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta_0)'X'X(\hat{\beta} - \beta_0)$$

$$(Y - X\beta_0)'(Y - X\beta_0) = \text{SSE unrestricted} + (\hat{\beta} - \beta_0)'X'X(\hat{\beta} - \beta_0)$$

$$\therefore \lambda^{2/n} = \frac{\text{SSE unrestricted}}{\text{SSE restricted.}}$$

$$= \frac{\text{SSE unrestricted}}{(Y - X\beta_0)'(Y - X\beta_0)}$$

$$= \frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{\text{SSE unrestricted} + (\hat{\beta} - \beta_0)'X'X(\hat{\beta} - \beta_0)}$$

$$= \frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) + (\hat{\beta} - \beta_0)'X'X(\hat{\beta} - \beta_0)}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{(\hat{\beta} - \beta_0)'X'X(\hat{\beta} - \beta_0)}{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}}$$

$$\lambda^{2/n} = \frac{1}{1 + \dfrac{(\hat{\beta}-\beta_0)' x' x (\hat{\beta}-\beta_0)}{(Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta})}}$$

ولكن يمكن توضيحها

χ^2_p

$\chi^2_{(n-p)}$

where

$$U = \frac{(\hat{\beta}-\beta_0)' X' X (\hat{\beta}-\beta_0)}{(Y-X\hat{\beta})'(Y-X\hat{\beta})} = \frac{\chi^2_p}{\chi^2_{(n-p)}} = F_{(p,n-p)}$$

$$\lambda^{2/n} = \frac{1}{1+U}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+U} \leq \lambda_0$$

is amonotonic fun. (decreasing) of U.

$$\therefore \quad F = U\left(\frac{n-p}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \quad U = \left(\frac{p}{n-p}\right) F.$$

So our test statistic would be rejected H_0 if

$$F > F_{(\alpha, p, n-p)} \quad \text{is G.L.R.T.}$$

وبذلك خلصنا استنتجنا نظريًا.

بان اختبار G.L.R.T. هو اختبار F

L.R.T

وبذلك خاذ خطوات استخدام طريقة
الاختبار - الفرضية العامة $H_0: H\beta = h$
تتلخص بالآتي :

① نجد دالة المقدرية L الى w تحت الفرضية H_0. $L(\underline{\varepsilon}, \underline{\beta})$ in (w)
حيث . ان β يكون محدود وهو β_0 اما σ^2 متغير
محدود ويأخذ للفرضية H_0 . وتقدير هو $\hat{\sigma}^2_w$ وسمي $L(w)$ بالانموذج
المقيد .

ونعبر ايضا $L(w)$ نسبة لـ $L(\Omega)$ (يقوم بايجاد)

$$L(\underline{\varepsilon}, \underline{\beta}) \text{ in } w = L(w) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\hat{\sigma}^2_w)^{n/2}} e^{-\frac{n}{2}} \quad \text{rest. model}$$

② نجد دالة المقدرة L الى Ω حيث ان β و σ^2
غير محدودة ويتم تقديرها باستخدام طريقة الامكان الاعظم . m.l.e.
ويسمى $L(\Omega)$ نموذج بالانموذج المقيد .

$$L(\underline{\varepsilon}, \underline{\beta}) \text{ in } (\Omega) = L(\Omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\hat{\sigma}^2_\Omega)^{n/2}} e^{-\frac{n}{2}} \quad \text{unrest.}$$

③ ونجد قانون الاختبار
we certenaly know.

$$\lambda = \frac{L(w)}{L(\Omega)}$$

$$\lambda^{2/n} = \frac{\hat{\sigma}^2_\Omega}{\hat{\sigma}^2_w}$$

$$\lambda^{2/n} = \frac{SSE \text{ unrestricted}}{SSE \text{ restricted}}$$

$$\therefore \lambda^{2/n} = \frac{SSE \text{ unrestricted}}{SSE \text{ unrestricted} + q}$$

$$\lambda^{2(n} = \frac{1}{1 + \frac{q}{SSE_{unrestricted}}}$$

where $q = (H\hat{\beta} - h)' \left(H (X'X)^{-1} H' \right)^{-1} (H\hat{\beta} - h)$

and $\Delta SSReg = \Delta SSE.$

then

The L.R.T. must involve

$$\frac{\Delta SS\,Reg \,/\, \Delta.df.}{\Delta SS\,unrest. \,/ \Delta.df.} \sim f'$$

الان نقوم باشتقاق التقديرات المقيدة $\hat{\beta}_w$, $\hat{\sigma}_w$
وتذكر خصائص التقدير بالاتي :

$$\max . L . w . r . to\ \beta = \min (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

Subject to

$$H\beta = h$$

$$\therefore L(\beta, \sigma^2, Y, X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}} exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2}(Y - X\beta)'(Y - X\beta) \right\}$$

أ) نقدير $\hat{\beta}_w$ المقيدة restricted

By using Lagrange method بأستخدام طريقة لاكرانج
we get نحصل على

(1)

① تقدير $\hat{\beta}_w$ المقيدة.

$$Q = L(\beta, \sigma^2, y, x) - \lambda'(H\beta - h)$$

نشتق بالنسبة الى β

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y - x\beta)'(y - x\beta) - \lambda'(H\beta - h)\right\}$$

$$= \frac{-1}{2\sigma^2}(-2x'y + 2x'x\beta) - H'\lambda$$

نجعل $\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0$ فينتج

$$0 = \frac{-1}{2\hat{\sigma}^2}(-2x'y + 2x'x\hat{\beta}) - H'\lambda$$

$$0 = \frac{2x'y - 2x'x\hat{\beta} + 2\hat{\sigma}^2 H'\lambda}{2\hat{\sigma}^2}$$

نبسط

$$0 = \frac{2(x'y - x'x\hat{\beta}_w - \hat{\sigma}_w^2 H'\lambda)}{2\hat{\sigma}_w^2}$$

$$0 = x'y - x'x\hat{\beta}_w - \hat{\sigma}_w^2 H'\lambda$$

نرتب

$$x'y = x'x\hat{\beta}_w + H'\hat{\sigma}_w^2\lambda$$

where $\hat{\sigma}_w^2\lambda = \lambda^*$ ---- ①

Let $\hat{\sigma}_w^2\lambda = \lambda^*$ ①

then $x'x\hat{\beta}_w + H'\lambda^* = x'y$

$x'x\hat{\beta}_w = x'y - H'\lambda^*$

نضرب طرفين

$$\therefore \hat{\beta}_w = (x'x)^{-1}x'y - (x'x)^{-1}H'\lambda^*$$

Then $\hat{\beta}_w = \hat{\beta}_{ols} - (x'x)^{-1}H'\lambda^*$ ---- ②

التقدير الاعتيادي

حيث ان $\hat{\beta}_R$ تمثل التقديرات الاعتيادية غير المقيدة.

نشتق بالنسبة الى λ

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = -(H\hat{\beta} - h)$$

نجعل $\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 0$ فينتج لنا.

$$0 = -(H\hat{\beta} - h)$$

$$0 = -H\hat{\beta} + h$$

$$\boxed{H\hat{\beta} = h} \quad \text{---------- (3)}$$

from (2) and (3) we have

$$H\hat{\beta} = h$$

$$H\left[\hat{\beta}_R - (x'x)^{-1}H'\lambda^*\right] = h$$

$$H\hat{\beta}_R - H(x'x)^{-1}H'\lambda^* = h$$

$$-H(x'x)^{-1}H'\lambda^* = h - H\hat{\beta}_R$$

نضرب الطرفين في -1

$$(H(x'x)^{-1}H')\lambda^* = -h + H\hat{\beta}_R$$

نضرب الطرفين في $(H(x'x)^{-1}H')^{-1}$ فيتبقى

$$\boxed{\lambda^* = (H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}_R - h)} \quad \text{---- (4)}$$

Then from (2) and (4) we have

$$\boxed{\hat{\beta}_w = \hat{\beta}_R - (x'x)^{-1}H'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}_R - h)} \quad \text{---- (5)}$$

Then from ② and ④ we have

$$\hat{\beta}_w = \hat{\beta}_R - (x'x)^{-1} H' \left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1} (H\hat{\beta}_R - h) \quad \text{---} \quad (5)$$

Know prove that

$$E(\hat{\beta}_w) = \hat{\beta}$$

اكاد كوتع $\hat{\beta}_w$

We have

$$\hat{\beta}_R = (x'x)^{-1} x' y$$

but $y = x\beta + \epsilon$ then

$$\hat{\beta}_R = (x'x)^{-1} x' (x\beta + \epsilon)$$

$$= (x'x)^{-1} x' x \beta + (x'x)^{-1} x' \epsilon$$

$$\hat{\beta}_R = \beta + (x'x)^{-1} x' \epsilon \quad \text{---} \quad (6)$$

وبتعويض (6) في (5) ينتج لنا .

$$\hat{\beta}_w = \beta + (x'x)^{-1} x' \epsilon - (x'x)^{-1} H' \left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1} (H\hat{\beta}_R - h)$$

$$\hat{\beta}_w = \beta + (x'x)^{-1} x' \epsilon - (x'x)^{-1} H' \left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1} [H(\beta + (x'x)^{-1}x'\epsilon) - h]$$

$$= \beta + (x'x)^{-1} x' \epsilon - (x'x)^{-1} H' \left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1} [\underbrace{H\beta - h}_{=0} + H(x'x)^{-1}x'\epsilon]$$

$H\beta = h$ لان
$h - h = 0$

$$\hat{\beta}_w = \beta + (x'x)^{-1} x' \epsilon - (x'x)^{-1} H' [H(x'x)^{-1}H']^{-1} [H(x'x)^{-1} x' \epsilon]$$

$$\hat{\beta}_w - \beta = (x'x)^{-1} x' \epsilon - (x'x)^{-1} H' [H(x'x)^{-1}H']^{-1} (H(x'x)^{-1}x'\epsilon)$$

$$\hat{\beta}_w - \beta = \underbrace{[(x'x)^{-1}x' - (x'x)^{-1}H'[H(x'x)^{-1}H']^{-1}H(x'x)^{-1}x']}_{A}\epsilon$$

A: مصفوفة ثابتة

$$\therefore \boxed{\hat{\beta}_w - \beta = A\epsilon} \quad \text{-------} \quad (7)$$

$$\therefore E(\hat{\beta}_w - \beta) = A\,E(\epsilon)$$

$$E(\hat{\beta}_w - \beta) = A(0)$$

$$E(\hat{\beta}_w - \beta) = 0$$

$$\therefore \boxed{E(\hat{\beta}_w) = \beta}$$

إيجاد توزيع ϵ

$\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$

② Var-Cover $(\hat{\beta}_w) = E\left[(\hat{\beta}_w - \beta)(\hat{\beta}_w - \beta)'\right]$ ايجاد التباين لـ $\hat{\beta}_w$

$\therefore \boxed{\hat{\beta}_w - \beta = A\epsilon}$ وعليه

$$V\text{-}Cov(\hat{\beta}_w) = A\, var(\epsilon)\, A'$$

$$= A\, \sigma^2\, A'$$

$$Var\text{-}Cov(\hat{\beta}_w) = \sigma^2 AA'$$

$$= \sigma^2 \left[(x'x)^{-1}x' - (x'x)^{-1}H'\left[H(x'x)^{-1}H'\right]^{-1}H(x'x)^{-1}x'\right]\left[(x'x)^{-1}x' - (x'x)^{-1}H'\left[H(x'x)^{-1}H'\right]^{-1}H(x'x)^{-1}x'\right]'$$

$$= \sigma^2(x'x)^{-1} - \sigma^2(x'x)^{-1}H'\left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1}H(x'x)^{-1} - \sigma^2(x'x)^{-1}H'\left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1}H(x'x)^{-1} + \sigma^2(x'x)^{-1}H'\left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1}H(x'x)^{-1}$$

$$\boxed{Var\text{-}Cov(\hat{\beta}_w) = \sigma^2(x'x)^{-1} - \sigma^2(x'x)^{-1}H'\left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1}H(x'x)^{-1}}$$

(2) $\hat{\sigma}^2_w$ تقدير $\hat{\sigma}^2_{ML}$

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}$$

نأخذ اللوغاريتم

$$\log L = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(Y-X\beta_w)'(Y-X\beta_w)$$

نشتق بالنسبة لـ σ^2

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0 - \frac{n}{2\sigma^2} - (-1)(2\sigma^2)^{-2}(2)(Y-X\beta_w)'(Y-X\beta_w)$$

$$= \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{(Y-X\beta_w)'(Y-X\beta_w)}{2\sigma^4}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{(Y-X\beta_w)'(Y-X\beta_w)}{2\sigma^4}$$

نجعل $\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0$ فينتج

$$0 = \frac{-n}{2\hat{\sigma}^2_w} + \frac{(Y-X\hat{\beta}_w)'(Y-X\hat{\beta}_w)}{2\hat{\sigma}^4_w}$$

$$\frac{n}{2\hat{\sigma}^2_w} = \frac{(Y-X\hat{\beta}_w)'(Y-X\hat{\beta}_w)}{2\hat{\sigma}^4_w}$$

$$\frac{n\,2\hat{\sigma}^4_w}{2\hat{\sigma}^2_w} = (Y-X\hat{\beta}_w)'(Y-X\hat{\beta}_w)$$

$$n\hat{\sigma}^2_w = (Y-X\hat{\beta}_w)'(Y-X\hat{\beta}_w)$$

يتم ن

وبالتالي فإن

$$\hat{\sigma}^2_w = \frac{(Y-X\hat{\beta}_w)'(Y-X\hat{\beta}_w)}{n}$$

now,

$$n\hat{\sigma}_w^2 = (Y - X\hat{\beta}_w)'(Y - X\hat{\beta}_w)$$

ضيف وطرح $X\hat{\beta}_R$

$$= (Y - X\hat{\beta}_w - X\hat{\beta}_R + X\hat{\beta}_R)'(Y - X\hat{\beta}_w - X\hat{\beta}_R + X\hat{\beta}_R)$$

ضيف حد ذات

$$= [(Y - X\hat{\beta}_R) + X(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)]'[(Y - X\hat{\beta}_R) + X(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)]$$

$$= (Y - X\hat{\beta}_R)'(Y - X\hat{\beta}_R) + (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)'X'X(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w) + (Y - X\hat{\beta}_R)'X(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w) + (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)'X'(Y - X\hat{\beta}_R)$$

(1) (2) (3) = 0 (4) = 0

كل كل حد بتكلم صفر

Thus where $(Y - X\hat{\beta}_R)'X(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w) = (Y'X - \hat{\beta}_R'X'X)(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)$

$$= (Y'X - (X'X)^{-1}X'Y)'X'X)(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)$$

$$= (Y'X - Y'X(X'X)^{-1}X'X)(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)$$

$X'X)^{-1}$

$$= (Y'X - Y'X)(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)$$

$$\boxed{(Y - X\hat{\beta}_R)'X(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w) = 0}$$

and $(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)'X'(Y - X\hat{\beta}_R) = (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)'(X'Y - X'X\hat{\beta}_R)$

اكبر ١ (٢)

$$= (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)(X'Y - X'X(X'X)^{-1}X'Y)$$

$$= (\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)(X'Y - X'Y)$$

$$\boxed{(\hat{\beta}_R - \hat{\beta}_w)'X'(Y - X\hat{\beta}_R) = 0}$$

اكرا الاول

وبذلك فان

$$n\hat{\sigma}^2_w = (y - x\hat{\beta}_r)'(y - x\hat{\beta}_r) + (\hat{\beta}_r - \hat{\beta}_w)'x'x(\hat{\beta}_r - \hat{\beta}_w)$$

اكز. الثاني — اكز. الاول

ونحن لدينا بان التباين غير المقيد هو:

$$\hat{\sigma}^2_r = \frac{(y - x\hat{\beta}_r)'(y - x\hat{\beta}_r)}{n}$$

$$\therefore \quad n\hat{\sigma}^2_r = (y - x\hat{\beta}_r)'(y - x\hat{\beta}_r)$$

وهو يمثل اكز. الاول.

وكذلك من العلاقة (5) نخرج بان:

$$(\hat{\beta}_r - \hat{\beta}_w) = (x'x)^{-1}H'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}_r - h)$$

وبذلك فان اكز. الثاني هو

اكرا الثاني

$$(\hat{\beta}_r - \hat{\beta}_w)'x'x(\hat{\beta}_r - \hat{\beta}_w) = \left[(x'x)^{-1}H'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}_r - h)\right]'x'x\left[(x'x)^{-1}H'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}_r - h)\right]$$

$$= (H\hat{\beta}_r - h)'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}H\underbrace{(x'x)^{-1}x'x}_{I}(x'x)^{-1}H'[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta}_r - h)$$

$$= (H\hat{\beta}_r - h)'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}\underbrace{H(x'x)^{-1}H'}_{I}(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}_r - h)$$

$$= (H\hat{\beta}_r - h)'(H(x'x)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}_r - h)$$

$$(\hat{\beta}_r - \hat{\beta}_w)'x'x(\hat{\beta}_r - \hat{\beta}_w) = q$$

وبذلك فان

$$n\hat{\sigma}^2_w = n\hat{\sigma}^2_r + q$$

Now $n\hat{\sigma}^2_{\omega} = SSE \text{ restricted}$

$= SSE \text{ unrestricted} + (H\hat{\beta}_R - h)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta}_R - h)$

$= n\hat{\sigma}^2_R$

$$n\hat{\sigma}^2_{\omega} = n\hat{\sigma}^2_R + q$$

Therefore.

$$\lambda^{n/2} = \frac{\hat{\sigma}^2_R}{\hat{\sigma}^2_{\omega}}$$

$$\lambda^{\frac{n}{2}} = \frac{SSE \text{ unrestricted}}{SSE \text{ restricted} + q}$$

$$\lambda^{n/2} = \frac{1}{1 + \frac{q}{SSE.unrest.}}$$

ملاحظة: يمكن ايضاً الحصول على التقديرات المقيدة $\hat{\beta}_w$ من خلال.

طريقة اولى للتفاضل

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} = \frac{-1}{2\sigma^2}(-2X'Y + 2X'X\beta) - H'\lambda = 0$$

$$X'X\hat{\beta}_w + H'\lambda^* = X'Y \quad \text{------ (1)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = -(H\beta - h) = 0$$

$$H\hat{\beta}_w = h \quad \text{---------- (2)}$$

وبذلك فاننا حصلنا على المعادلتين (1)، (2) ومنهما حصلنا على.

$$X'X\hat{\beta}_w + H'\lambda^* = X'Y \quad \text{------ (1)}$$
$$H\hat{\beta}_w = h \quad \text{------ (2)}$$

$$\begin{bmatrix} X'X & H' \\ H & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_w \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ h \end{bmatrix}$$

ex.

let

Y	X	model	
1.5 2.7 3.5	1.0 1.5 2	I	$Y_1 = \alpha_1 + \beta_1 X_{1i} + \epsilon_{1i}$, $i = 1, 2, 3$
2.3 4.0 4.8	1.5 2.0 2.5	II	$Y_2 = \alpha_2 + \beta_2 X_{2i} + \epsilon_{2i}$ $i = 4, 5, 6$
3.8 3.6 6.5	1.5 1.8 2.0	III	$Y_3 = \alpha_3 + \beta_3 X_{3i} + \epsilon_{3i}$, $i = 7, 8, 9$

Test

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

where $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ are three slops.

The 1st method

الحل باستخدام الطريقة الاولى

$$Y = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.7 \\ 3.5 \\ 2.3 \\ 4.0 \\ 4.8 \\ 3.8 \\ 3.6 \\ 6.5 \end{bmatrix}_{9\times1}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}_{9\times6}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}_{6\times1}$$

where.

$$y_i = \alpha_1 + \beta_1 x_{1i} + \epsilon_i \quad , i = 1,2,3$$

$$y_i = \alpha_2 + \beta_2 x_{2i} + \epsilon_i \quad , i = 4,5,6$$

$$y_i = \alpha_3 + \beta_3 x_{3i} + \epsilon_i \quad , i = 7,8,9$$

$$\therefore \quad y_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \epsilon_i \quad , i = 1,2,\dots,9$$

* Unrestricted full model

$R(B_1, B_2)$

$$X'X = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & 0 & 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 5.3 \\ \hdashline 4.5 & 0 & 0 & 7.25 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3 & 0 & 0 & 9.49 \end{array}\right), \quad X'Y = \begin{pmatrix} 7.7 \\ 11.1 \\ 13.9 \\ 12.55 \\ 23.45 \\ 25.18 \end{pmatrix}$$

B_{11} B_{12} B_{21} B_{22}

6×6 $\quad 6 \times 1$

Then:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & -B_{11}^{-1} B_{12} D^{-1} \\ -B_{22}^{-1} B_{21} C^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

where:

$$C^{-1} = \left(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}\right)^{-1}$$

$$D^{-1} = \left(B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12}\right)^{-1}$$

Now we find.

$$C^{-1} = \left[B_{11} - B_{12}\, B_{22}^{-1}\, B_{21}\right]^{-1}$$

$$C^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.5 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.25 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 9.49 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0.207 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 4.831 & 0 & 0 \\ 0 & 8.333 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Also

$$D^{-1} = \left(B_{22} - B_{21}\, B_{11}^{-1}\, B_{12}\right)^{-1}$$

$$D^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 7.25 & 6 & 6 \\ 0 & 12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 9.49 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.5 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3 \end{pmatrix}^{-1}\right]^{-1}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1207 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7.893 \end{pmatrix}$$

Then

$$-B_{22}^{-1} B_{21} C^{-1} = -\begin{pmatrix} 7.25 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.833 & 0 & 0 \\ 0 & 8.333 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$-B_{22}^{-1} B_{21} C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -13.944 \end{pmatrix}$$

$$-B_{11}^{-1} B_{12} D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7.893 \end{pmatrix}$$

$$-B_{11}^{-1} B_{12} D^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -13.944 \end{pmatrix}$$

وبذلك فإن

$$(X'X)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4.831 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 8.333 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & -13.944 \\ \hline -3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -13.944 & 0 & 0 & 7.893 \end{array}\right)$$

Then

$$\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} -0.452 \\ -1.3 \\ -3.676 \\ 2.0 \\ 2.5 \\ 4.665 \end{pmatrix}$$

, where $x'y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} y_i \\ \sum_{i=4}^{6} y_i \\ \sum_{i=7}^{9} y_i \\ \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \\ \sum_{i=4}^{6} x_i y_i \\ \sum_{i=7}^{9} x_i y_i \end{pmatrix}$

Then we have.

SS Total $= y'y = \sum y_i^2 = 135.77$ with 9. d.f.

SS Reg $= \hat{\beta}'x'y = 132.044$ with 6. d.f.

SS error $= y'y - \hat{\beta}'x'y = 3.726$ with 3. d.f.
$9 - 6 = 3$

SS unrestricted

بسم الله الرحمن الرحيم .

Restricted model reduce $R(B_2)$

الأنموذج المقيد او المختزل

الفرضية

$H_0 : B_1 = B_2 = B_3 = B$.

But we have the model

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + B_1 X_{1i} + B_2 X_{2i} + B_3 X_{3i} + \epsilon_i \quad , i = 1, \dots, n$$

under H_0, the model will be.

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + B X_{1i} + B X_{2i} + B X_{3i} + \epsilon_i$$

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + B (X_{1i} + X_{2i} + X_{3i}) + \epsilon_i$$

Let $X_i = X_{1i} + X_{2i} + X_{3i}$

then the model is.

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + B X_i + \epsilon_i \quad , i = 1, \dots, n$$

الأنموذج المقيد .

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & B \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \vec{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ B \end{pmatrix}$$

Then $X'X = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 4.5 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 5.3 \\ 4.5 & 6 & 5.3 & 29.24 \end{array}\right]$

B_{11} B_{12} B_{21} B_{22}

and $(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & -B_{11}^{-1} B_{12} D^{-1} \\ -B_{22}^{-1} B_{21} E^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$

$B_{11}^{-1}, B_{11}D^{-1}, D^{-1}, C^{-1}$ $(X'X)^{-1}$

$-B_{22}^{-1} B_{21} C^{-1}$

Now we find:

$$C^{-1} = \left[B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}\right]^{-1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4.5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5.3 \\ 5.3 & 29.24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4.5 & 6 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1.983 & -1.359 \\ -1.359 & 1.188 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\therefore C^{-1} = \begin{pmatrix} 2.316 & 2.643 \\ 2.649 & 3.866 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = [B_{22} - B_{21} B_{11}^{-1} B_{12}]^{-1}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 3 & 5.3 \\ 5.3 & 29.24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4.5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 4.5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5.3 \\ 5.3 & 10.49 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 3.104 & -1.568 \\ -1.568 & 0.888 \end{pmatrix}$$

$$-B_{11}^{-1} B_{12} D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 4.5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.104 & -1.568 \\ -1.568 & 0.888 \end{pmatrix}$$

$$-B_{11}^{-1} B_{12} D^{-1} = -\begin{pmatrix} -2.352 & -1.331 \\ -3.136 & 1.765 \end{pmatrix}$$

$$-B_{22}^{-1} B_{21} C^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 5.3 \\ 5.3 & 29.24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4.5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.316 & 2.643 \\ 2.6249 & 3.865 \end{pmatrix}$$

$$-B_{22}^{-1} B_{21} C^{-1} = -\begin{pmatrix} -2.338 & -3.118 \\ 1.323 & 1.765 \end{pmatrix}$$

وبذلك فان مصفوفة $(X'X)^{-1}$ هي كما يلي.

Then

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2.316 & 2.649 & 2.352 & -1.331 \\ 2.649 & 3.866 & 3.136 & -1.775 \\ 2.338 & 3.118 & 3.104 & -1.568 \\ -1.323 & -1.775 & -1.568 & 0.888 \end{pmatrix}$$

and

$$X'Y = \begin{pmatrix} 7.7 \\ 11.1 \\ 13.9 \\ 61.18 \end{pmatrix}$$

Σy_i , $i = 1,2,3$

Σy_i , $i = 4,5,6$

Σy_i , $i = 7,8,9$

$\Sigma x_i y_i =$

Then

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} -0.452 \\ -1.3 \\ -3.686 \\ 2 \\ 2.5 \\ 4.665 \end{pmatrix}$$

where $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta \end{pmatrix}$

Then we have.

$$SS(Reg) = \hat{\beta}' X' Y = ($$

$$SS(Reg) = 128.23$$

مجموع مربعات الانحدار للانموذج الكامل with 4 d.f.

Know we found $\Delta SS(Reg)$ where

نجد التغير بمجموع مربعات الانحدار بين الانموذج غير المقيد والانموذج المقيد

$$\Delta SS(Reg) = SS(Reg.\ unrest.) - SS(Reg.\ restricted)$$

مجموع مربعات الانحدار غير المقيد. — مجموع مربعات الانحدار المقيد.

$$= 132.054 - 128.23$$

$$\Delta SS(Reg) = 3.814$$

اما درجة الحرية فالفرق ضمن H0

$$\Delta(d.f.) = d.f.(unrest.) - d.f.(rest.)$$

للانموذج غير المقيد. — للانموذج المقيد

مجموع مربعات الانحدار — مجموع مربعات الانحدار

$$= 6 - 4$$

$$\Delta d.f. = 2.$$

$SSE(unrestricted) = 3.726$ with $d.f. = 3$

Then the our test statistic will be.

$$f = \frac{\frac{\Delta SS(Reg)}{\Delta(d.f.)}}{S^2(unrest.)}$$

$$f = \frac{\frac{3.814}{2}}{\frac{3.726}{3}} = 0.88$$

From the f table we have

$$f(2, 3, 0.05) = 9.55$$

since $f_{test\ calculate} = 0.88 < f_{(2,3,0.05)\ table} = 9.55$

Then we accept $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$.

means.

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta.$$

The 2nd method

الطريقة الثانية

we have

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$

باستخدام اختبار الفرضيات العام وهو

$$H_0: H\beta = h$$

حيث

$$H = \underset{2\times 6}{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \underset{6\times 1}{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Now we find

$$H(x'x)^{-1}H' = \underset{2\times 6}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \underset{6\times 6}{\begin{pmatrix} 4.833 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 8.333 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & -13.944 \\ -3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -13.944 & 0 & 0 & 7.893 \end{pmatrix}} \underset{6\times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 13.944 & 0 & 2 & -7.893 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H(x'x)^{-1}H' = \begin{pmatrix} 4 & 9.893 \\ -2 & 7.893 \end{pmatrix}$$

and

$$\left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.154 & 0.039 \\ -0.193 & 0.078 \end{pmatrix}$$

نعيد H لأن حسابه لانه اعتقد منه فط،

and

$$\underset{2\times 1}{H\hat{\beta}} = \underset{2\times 6}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \underset{6\times 1}{\begin{pmatrix} -0.45 \\ -1.3 \\ -3.686 \\ 2 \\ 2.5 \\ 4.665 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.165 \end{pmatrix}}$$

$$H\hat{\beta} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.165 \end{pmatrix}$$

H.W. يعاد صاية

Then $(H\hat{\beta} - h)' \left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1} (H\hat{\beta} - h) =$

$$= \left[\begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.165 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]' \begin{bmatrix} 0.154 & 0.039 \\ -0.193 & 0.078 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.165 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.5 & -2.165 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.154 & 0.039 \\ -0.193 & 0.078 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.165 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.341 & -0.188 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.165 \end{pmatrix}$$

$$= 0.2365$$

This means

$$\left(H\hat{\beta} - h\right)' \left(H(x'x)^{-1}H'\right)^{-1} (H\hat{\beta} - h) = 0.2365$$

داغة موجب او هو لانه صيغة تربيعية

Also

$$S^2 = \frac{SSE}{n-p} = \frac{3.726}{3} = 1.242$$

then the our test statistics will be.

$$F = \frac{(H\hat{\beta} - h)' (H(x'x)^{-1}H')^{-1} (H\hat{\beta} - h)}{r\, S^2}$$

$$= \frac{0.2365}{2(1.242)}$$

$r = r(H) = 2$ (2×6)

$$F = 0.86$$

From the F-tables we have

$$F(2, 3, 0.05) = 9.55$$

$$(F_{calculate} = 0.86) < ((F(2,3,0.05) = 9.55))$$

we accept H_0

i.e: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

Case II

$$Y = X\beta$$

$$E(\underline{\epsilon}) = \underline{0}$$

$$V(\underline{\epsilon}) = \sigma^2 I$$

$X_{n \times p}$ of rank p

H.W.

Q1): Consider a model: $\underline{Y} = X_1\underline{\beta}_1 + X_2\underline{\beta}_2 + \underline{\epsilon}$, $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$
where β_1 is $(r \times 1)$ and β_2 is $((p-r) \times 1)$

(i) Give the dist. of $\underline{\beta}_2$ and then give the dist. of $\underline{\beta}_2$ if $X_1\beta_1$ were not in the model

(ii) Give the dist. of $A = \dfrac{\underline{Y}'[X(X'X)^{-1}X' - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']\underline{Y}}{\sigma^2}$

(iii) Give the expected of A if $\beta_2 = 0$.

Q2): let $\underline{Y} \sim N(\mu J, \sigma^2 I)$, and let H be the Helmert matrix defined as follows:
The first row of H is $\dfrac{J'}{\sqrt{n}}$, for $r = 2, 3, \dots, n$
and the rth row of H its the first $(r-1)$ component equal to $[r(r-1)]^{-1/2}$, the rth component is equal to $\dfrac{-(r-1)}{[r(r-1)]^{-1/2}}$
and the remaining components are zero

(a) Show that H is an orthogonal matrix

(b) Determine the dist. of $Z = HY$

(c) use this transformation to determine the joint of $\bar{y}$ and $S^2 = \dfrac{\underline{Y}'(I - \frac{JJ'}{n})Y}{\sigma^2}$

(d) Test $H_0: \mu = 0$
$H_1: \mu \neq 0$
and give the dist. of the test statistic

Q3). if $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, C_{11}^{-1}\sigma^2)$, where

$C_{11} = X_1'X_1 - X_1'X_2 (X_2'X_2)^{-1} X_2'X_1$

show that $\frac{\hat{\beta}_1' C \hat{\beta}_1}{\sigma^2} \sim \chi^2_{r,\lambda}$, where $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\beta_1' C \beta_1$

اكل ص 96 و ص 97

Q4) if $\hat{\beta} \sim N(\beta, (X'X)^{-1}\sigma^2)$,

show that

$$\frac{(\hat{\beta}-\beta)'(X'X)(\hat{\beta}-\beta)}{\sigma^2} \sim \chi^2_p$$

where σ^2 is known, and X is $n \times p$ of rank p.

under $H_0: \beta = \beta_0$

شابه هذا السؤال الفرع الثاني من التمرين في ص 46 و ص 47 الاضافة الثانية.

وهناك طريقة اخرى للحل في ص 97 تم التكملة في ص 62 و ص 63 الملزمة.

وهو تمرين.

Q5). let $Y = X\beta + \epsilon$, $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$,

$H_0: \beta = \beta_0$

$H_1: \beta \neq \beta_0$

Find the dist. of $\frac{(\hat{\beta}-\beta_0)'(X'X)(\hat{\beta}-\beta_0)}{pS^2}$

اكل في ص 94 و ص 95 الملزمة.

(Q6): Show that

$$E\left[\frac{R(\beta_1/\beta_2)}{r}\right] = \sigma^2 + \frac{1}{r}\underline{\beta}_1'\left(X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\right)\underline{\beta}_1$$

(Q7) let $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$, $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$, $X = [X_1 : X_2]$ (r , $p-r$)

and $H_0 : \underline{\beta}_1 = 0$

v.s. $H_1 : \underline{\beta}_1 \neq 0$

prove that $\dfrac{R(\beta_1/\beta_2)}{r\,S^2} \sim F_{r,n-p}$

(Q8) Do same thing for : $y_i = \alpha^* + \beta x_i + \epsilon_i$,

$$\frac{\hat{\beta}_1'\left[X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1\right]\hat{\beta}_1}{r\,S^2} \sim F_{(1,n-p)}$$

, if $r = 1, 2, \ldots$

(Q9) Show that S^2 with any subset of $\hat{\beta}$ will be independent.

Q10 Recall: $X = [X_1 : X_2]$, $H_0: \beta_1 = 0$
$H_1: \beta_1 \neq 0$

(i) Compute $R(\beta_1/\beta_2) = R(\beta_1, \beta_2) - R(\beta_2)$

$$\frac{R(\beta_1/\beta_2)}{r s^2} \sim F_{(r, n-p)}, \text{ under } H_0$$

(ii) Compute

$$\frac{\hat{\beta}_1' [X_1'X_1 - X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1] \hat{\beta}_1}{r\, s^2} \sim F_{(r, n-p)}$$

under H_0.

Q11) Two regression Linears

(i) $Y_{1i} = \alpha_1 + \beta_1 X_{1i} + \epsilon_{1i}$, $i = 1, 2, 3, 4$

Y	3	7	10	4
X	1	3	5	6

(ii) $Y_{2i} = \alpha_2 + \beta_2 X_{2i} + \epsilon_{2i}$, $i = 5, 6, 7$

Y	19	20	29
X	7	8	11

Test; H_0: $\alpha_1 = \alpha_2$
$\beta_1 = \beta_2$ at $\alpha = 0.01$

By using GLHM.

(Q12) consider the full rank model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \epsilon_i$$

and $X'X = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $X'Y = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

suppose we use to test

hypothesis (a), $H_0: \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{\beta} = \underline{0}$, (hypothesis a)

hypothesis (b), $H_0: \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{\beta} = 0$, (hypothesis (b))

(1) Given the test statistics for hypothesis (a) (b)

(2) " = = = =

(3) What is the relation ship between the two type.

Q13. Consider the general linear model

$$Y = X\beta + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, V),$$

where V is $n \times n$ known positive definite we wish to estimate simultaneously the fun. $\underline{\ell}_1'\beta$ and $\underline{\ell}_2'\beta$

(a) Give point estimation for the fun. $\underline{\ell}_1'\beta$ and $\underline{\ell}_2'\beta$

(b) Give one expression describing ajoint (1-α) conf. regression for $\underline{\ell}_1'\beta$ and $\underline{\ell}_2'\beta$

(c) Referring back to part (a) of the question describe the properties of the estimators $\underline{\ell}_1'\beta$ and $\underline{\ell}_2'\beta$.