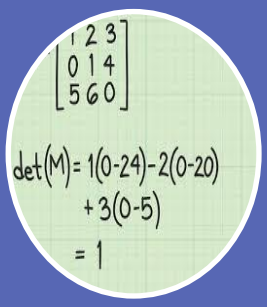
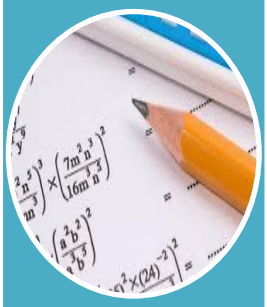
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي/الجامعه المستنصريه

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

الدراسات الاولية/المرحلة الثانية

للعام الدراسي 2020-2021





LINEAR ALGABRI

الجبر الخطي

الاستاذ المساعد الدكتورة

سهاد علي شهيد مجيد

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

المرحلة الثانية (صباحي+مسائي)

2021-2020

الكورس الثاني/الجبر الخطي

منظومة المعادلات الخطية (Systems of Linear Equations)

3-1 المقدمة : (Introductions)

في الرياضيات، منظومة المعادلات الخطية(System of linear equations) هي مجموعة من المعادلات الخطية ,تضم نفس المجموعة من المتغيرات، ان لمنظومة المعادلات الخطية دورا مهما في موضوع الجبر الخطي حيث توجد مسائل كثيرة في الجبر الخطي تؤدي دراستها الى منظومة المعادلات الخطية واصبح لدراستها اهمية كبيرة ويمكن تعريف المعادلة الخطية المعادلة هي التساوي بين عبارتين وتكون هذه المعادلة اما صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى، على سبيل المثال المعادلة **2x+1=7** تكون صحيحة عندما تكون x=3 وتكون المعادلة خاطئة عندما x لايساوي 3. فنقول حل المعادلة عند التعويض بقيمة x تساوي 3 تصبح المعادلة **2(3)+1=7** وهذا صحيح وأصبح الطرفان متساويان.

ويمكن تمثيل معادلة الخط المستقيم من المتغيرين x , y بالصيغة:

$$ax + by = c$$

ويمكن كتابة المعادلات الخطية التي تحتوي على n من المتغيرات كالتالي

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$$

ويوجد نوعين من المعادلات :

- المعادلات الخطية (وهي المعادلات التي تحتوي على متغيرات من الدرجة الاولى)
- المعادلات غير الخطية (وهي المعادلات التي تحتوي على متغيرات بدرجات اعلى ، جذور، دوال مثلثية، ضرب متغيرات مع بعضها البعض او دوال اسية)

الشكل الهندسي للمعادلات الخطية بمتغيرين هما x و y كالتالي

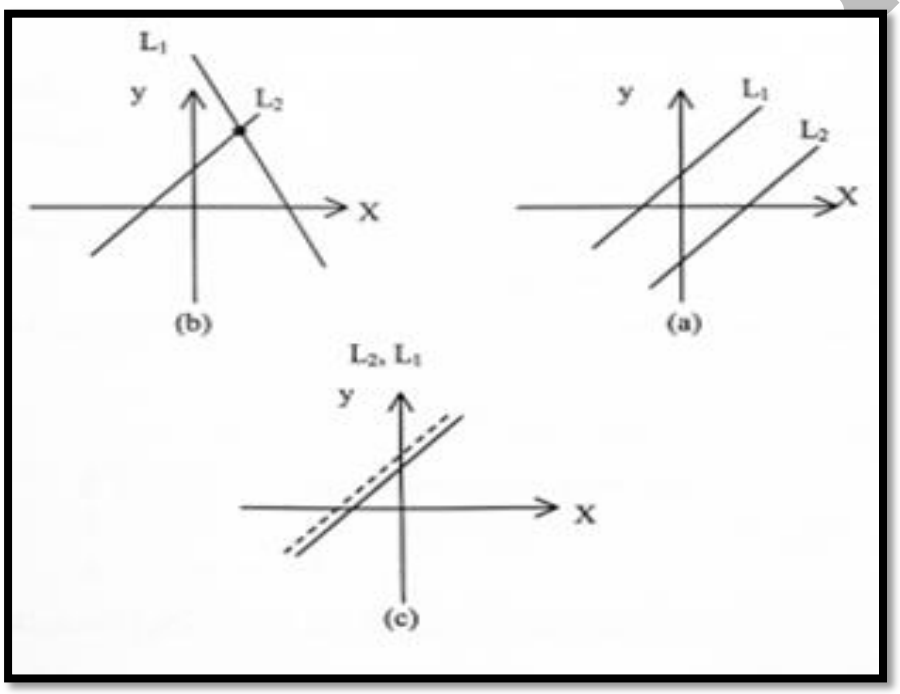
$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$A_2x + b_2y = c_2$$

الشكل الهندسي للمعادلتين اعلاه هو الخط المستقيم L_1 و L_2 كل خط مستقيم على حدة اما اذا كانت النقطة (x,y) تقع على المستقيم اذا كانت x و y تحقق معادلة المستقيم فتصبح حلول المنظومة الخطي هو تقابل المستقيمين.

ويوجد ثلاث احتمالات للحلول هي :

1) المستقيمان متوازيان ، لا يوجد نقط تقاطع وبالتالي ليس للنظام الخطي حل كما في المخطط (a).
2) المستقيمان يتقاطعان بنقطة ، ذلك يعني ان النظام الخطي له حل واحد فقط كما في المخطط (b).
3) المستقيمان متطابقان وبالتالي يوجد عدد غير محدود من الحلول كما في المخطط (c).



شكل (3-1) الشكل الهندسي للمعادلات الخطية عند وجود ثلاث احتمالات للحلول

☑**ملاحظة :** **نستنتج ان النظام الخطي اما ليس له حل (النظام غير المتسق Inconsistence System) او له حل وحيد (النظام المتسق Consistence System) او له عدد لانهائي من الحلول.**

اما المجموعة المنتهية التي تتكون من m من المعادلات الخطية تحتوي على n من المتغيرات (x_1 ،x_2 ،،...، x_n) تسمى بنظام(منظومة) المعادلات الخطية. وكذلك تسمي بالنظام الخطي. ويمكن كتابة النظام الخطي الذي يتكون من m من المعادلات ويحتوى على n من المتغيرات كالتالي:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 &+\cdots+ a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 &+\cdots+ a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots &\quad \vdots &\quad\quad \vdots &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 &+\cdots+ a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

كما ويمكن كتابة منظومة المعادلات الخطية كمتجهات أو كمصفوفات. كالاتي:

❖ **معادلات متجهة :**

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

❖ **معادلات مصفوفة :**

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

3-2 طرق حل منظومة المعادلات الخطية: Methods for solving a system of linear equations

هنالك عدة طرق لحل منظومة المعادلات الخطية وهي :

1) طريقتي جاوس وجاوس – جوردان.
2) حل الانظمة باستخدام معكوس مصفوفة المعاملات
3) قاعدة كرامر.

3-2-1 طريقتي جاوس وجاوس – جوردان : Gauss & Gauss Jordan methods

اذا كان لدينا نظام معادلات خطية يراد ايجاد الحل لها بطريقة طريقتي جاوس وجاوس – جوردان نتبع ما يلي:

1) نضع المصفوفة الموسعة والمكونة من معاملات المتغيرات والنواتج كعمود اخير.
2) نختزل المصفوفة الموسعة صيغة الدرجة الصفية (r.e.f) لو كان المطلوب الحل بطريقة جاوس ونختزلها على صيغة درجة صفية مختزلة (r.r.e.f) لو كان المطلوب الحل بطريقة جاوس – جوردان.
3) نحول المصفوفة المختزلة الى معادلات مرة اخرى (نظام مكافيء) ، ثم نجد حل النظام.

كما تم ذكره سابقاً ان انواع الحلول: (**Types of solutions**) هي :
1 - الحل الوحيد.
2 - العدد اللانهائي من الحلول.
3 - ليس للنظام حل.

مثال (59) : حل منظومة المعادلات بطريقة جاوس ثم بطريقة جاوس–جوردان:

$$x - 2y + 2z = 3$$
$$2x + y + z = 0$$
$$x \quad\quad + z = -2$$

الحل: اولاً: طريقة جاوس

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة [A|B] على صيغة درجية صفية (r.e.f) و نحصل على نظام خطي مثلثي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طر يقة جاوس لحل النظام الخطي.

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & | & 3\\ 2 & 1 & 1 & | & 0\\ 1 & 0 & 1 & | & -2\end{bmatrix} \sim (-2R_1 + R_2\ , -R_1 + R_3) \begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & | & 3\\ 0 & 5 & -3 & | & -6\\ 0 & 2 & -1 & | & -5\end{bmatrix} \sim (-2R_3 + R_2)$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & | & 3\\ 0 & 1 & -1 & | & 4\\ 0 & 2 & -1 & | & -5\end{bmatrix} \sim (-2R_2 + R_3) \quad \begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & | & 3\\ 0 & 1 & -1 & | & 4\\ 0 & 0 & 1 & | & -13\end{bmatrix} \quad (\mathrm{r.e.f})$$ جاوس

$x - 2y + 2z = 3$

$y - z = 4$

$\mathrm{z} = -13$

$\therefore y + 13 = 4 \ \rightarrow y = -9$

$x + 18 - 26 = 3 \rightarrow x = 11$

للنظام حل وحيد هو $S = \{x = 11,\ \ y = -9\ \ , z = -13\}$

ثانياً: طريقة جاوس – جوردان

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة [A|B] على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة (r.r.e.f) و نحصل على نظام خطي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطر يقة تسمى طر يقة جاوس جوردن لحل النظام الخطي.

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 2 & | & 3\\ 0 & 1 & -1 & | & 4\\ 0 & 0 & 1 & | & -13\end{bmatrix} \sim (2R_2 + R_1\ , R_3 + R_2) \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & | & 11\\ 0 & 1 & 0 & | & -9\\ 0 & 0 & 1 & | & -13\end{bmatrix} (\mathrm{r.r.e.f})$$

للنظام حل وحيد هو $S = \{x = 11,\ \ y = -9\ \ , z = -13\}$

☑ملاحظة : حل النظام بطريقة جاوس او جاوس – جوردان لابد ان يعطي نفس الحل حتى و لو اختلفت طريقة الاختزال في (r.e.f).

☑ملاحظة : بعد الاختزال نلاحظ ان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل هذا يعني بأنهُ يوجد حل وحيد.

مثال (60) : حل المنظومة بطريقة جاوس ثم بطريقة جاوس–جوردان:

$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$

$3x_1 - 9x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 9$

$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4$

$2x_1 - 6x_2 + 8x_3 + x_4 = 7$

د. سهاد علي شهيد

1- بطريقة جاوس

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 3 & -9 & 10 & 2\\ 2 & -6 & 4 & 2\\ 2 & -6 & 8 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\9\\4\\7\end{bmatrix}\sim\begin{matrix}-3R_1+R_2\\-2R_1+R_3\\-2R_1+R_4\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\0\\3\end{bmatrix}\sim\frac{1}{4}R_2$$

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1/4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3/4\\0\\3\end{bmatrix}\sim -4R_2$$

$$+R_2\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1/4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3/4\\0\\0\end{bmatrix}\ (r.e.f)\ \text{جاوس}$$

المعادلات من الاسفل الى الاعلى (من المعادلة الثانية):

$$x_3-\frac{1}{4}x_4=\frac{3}{4}\rightarrow x_3=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x_4$$

نفرض ان $x_4=t$ حيث ان $t\in R$ فيكون

$$\therefore x_3=\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}t$$

من المعادلة الاولى نحصل على :

$$x_1-3x_2+2x_3+x_4=2\rightarrow x_1=2+3x_2-2x_3-x_4$$

نفرض ان $x_2=s$ حيث ان $s\in R$ ونعوض عنها x_3, x_4 يصبح لدينا :

$$x_1=2+3s-2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t\right)-t\rightarrow x_1=2\left(\frac{2}{2}\right)+3s-\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}t-\frac{2}{2}t$$

$$\therefore\ x_1=3s-\left(\frac{3}{2}\right)t+\left(\frac{1}{2}\right)$$

عدد لا نهائي من الحلول يعتمد على قيمتي t و s والحل هو

$$\left\{\left(x_1=3s-\left(\frac{3}{2}\right)t+\left(\frac{1}{2}\right),x_2=s,x_3=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t\right),x_4=t\right);t,s\in R\right\}$$

د. سهاد علي نجيد

2- بطريقة جاوس – جوردان

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}\begin{vmatrix}2\\3/4\\0\\0\end{vmatrix} \sim -2R_2 + R_1 \begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 3/2 & \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}\begin{vmatrix}1/2\\3/4\\0\\0\end{vmatrix} (r.r.e.f)$$

$$x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4} \rightarrow x_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_4$$

نفرض ان $x_4 = t$ حيث ان $t \in R$ فيكون $x_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t$

$$x_1 - 3x_2 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + 3x_2 - \frac{3}{2}x_4$$

نفرض ان $x_2 = s$ حيث ان $s \in R$ ونعوض عن فيكون x_3 فيكون

$$x_1 = \frac{1}{2} + 3s - \frac{3}{2}t$$

عدد لا نهائي من الحلول يعتمد على قيمتي t و s والحل هو

$$\left\{\left(x_1 = 3s - \left(\frac{3}{2}\right)t + \left(\frac{1}{2}\right), x_2 = s, x_3 = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}t\right), x_4 = t\right); t, s \in R\right\}$$

☑ملاحظة : بعد الاختزال كان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل وهذا يعطي (عدد لا نهائي من الحلول).

مثال (61) : حل النظام بطريقة جاوس–جوردان:

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 - x_3 = -1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

الحل:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 2 & 1 & 1 & \end{bmatrix}\begin{vmatrix}1\\-1\\2\end{vmatrix} \sim -2R_1 + R_3 \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & \end{bmatrix}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix} \sim$$

$$-R_2 + R_3 \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix} (r.r.e.f)$$

من المعادلة الاخيرة $0x_3 = 1$ وهذا مستحيل ، هذا يعني بأنهُ ليس للنظام حل.

☑ملاحظة : في حالة ان الدرجة الصفية بعد الاختزال تكون احد المعادلات بصيغة $(0\ 0\ 0 = 1)$ ، اي ان ليس للنظام حل.

مثال (62) : حل النظام بطريقة جاوس–جوردان:

$$x_1 - x_2 = -1$$
$$x_1 + 3x_2 = -1$$
$$-3x_1 + 3x_2 = 3$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \vert & -1 \\ 1 & 3 & \vert & -1 \\ -3 & 3 & \vert & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} -R_1 + R_2 \\ 3R_1 + R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vert & -1 \\ 0 & 4 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & \vert & 0 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{4}R_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vert & -1 \\ 0 & 1 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & \vert & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$R_2 + R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vert & -1 \\ 0 & 1 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & \vert & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 0$$

اذاً الحل وحيد $S = \{(-1,0)\}$

مثال (63) : حل النظام بطريقة جاوس:

$$3x + 2y = 4$$
$$9x + 6y = 12$$
$$-6x - 4y = -8$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & \vert & 4 \\ 9 & 6 & \vert & 12 \\ -6 & -4 & \vert & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} -3R_1 + R_2 \\ 2R_1 + R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & \vert & 4 \\ 0 & 0 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & \vert & 0 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{3}R_2 \begin{bmatrix} 1 & {}^{2}/_{3} & \vert & {}^{4}/_{3} \\ 0 & 1 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & \vert & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \frac{2}{3}y = \frac{4}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}y$$

نفرض ان $y = t$ حيث ان $t \in R$ ونعوض فيكون

$$x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}t$$

عدد لا نهائي من الحلول يعتمد على قيمتي t و s والحل هو

$$\left\{\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}t, t\right), t \in R\right\}$$

مثال (64): حل النظام بطريقة جاوس:

$$x_1 - x_2 = -1$$
$$x_1 + 3x_2 = -1$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

د. سهاد علي شهيد

الحل:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & |-1\\ 1 & 3 & |-1\\ 1 & 1 & |1\end{bmatrix}\sim_{-R_1+R_3}^{-R_1+R_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & |-1\\ 0 & 4 & |0\\ 0 & 2 & |2\end{bmatrix}\sim\frac{1}{4}R_2\begin{bmatrix}1 & -1 & |-1\\ 0 & 1 & |0\\ 0 & 2 & |2\end{bmatrix}\sim$$

$$-2R_2+R_3\begin{bmatrix}1 & -1 & |-1\\ 0 & 1 & |0\\ 0 & 0 & |2\end{bmatrix}$$

من المعادلة الاخيرة $0x_2 = 2$

وهذا مستحيل ، بمعنى ليس للنظام حل.

مثال (65): حل النظام بطريقة جاوس–جوردان:

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

الحل:

$$\begin{bmatrix}5 & -2 & 6 & |0\\ -2 & 1 & 3 & |1\end{bmatrix}\sim 2R_2+R_1\begin{bmatrix}1 & 0 & 12 & |2\\ -2 & 1 & 3 & |1\end{bmatrix}\sim 2R_1+R_2\begin{bmatrix}1 & 0 & 12 & |2\\ 0 & 1 & 27 & |5\end{bmatrix}$$

$$x_1 + 12x_3 = 2 \to x_1 = 2 - 12x_3$$
$$x_2 + 27x_3 = 5 \to x_2 = 5 - 27x_3$$

نفترض $x_3 = t$ حيث ان $t \in R$ ونعوض فيكون

$$x_1 = 2 - 12t$$
$$x_2 = 5 - 27t$$

وهذا يعني وجود عدد لا نهائي من الحلول

$$\{(\mathbf{2-12t, 5-27t, t}), \mathbf{t \in R}\}$$

مثال (66) : ليكن النظام الخطي:

$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1$$
$$3x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 6x_5 = 2$$

A. اكتب النظام الخطي على صيغة $AX = B$.

B. اوجد مجموعة حل النظام $AX = B$.

د. سهاد علي شهيد

الحل/*A* : النظام على صيغة $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الحل/*B* : لحل النظام $AX = B$ نضع المصفوفة الموسعة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -4 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -6 & -6 & -6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim -R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من المعادلة الاخيرة $0x_5 = 1$

وهذا مستحيل ، بمعنى ليس للنظام حل.

☑**ملاحظة : مما سبق يمكن ان نستنتج بعد الاختزال**

1 -اذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل يكون للنظام حل وحيد.

2 -اذا كان عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول وهذه الانظمة يسمى كل منها نظام متسق (او متآلف).

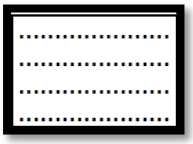
3 -اذا كانت احدى المعادلات $\begin{Bmatrix} \text{عدد} \\ \neq 0 \end{Bmatrix} \{0 \quad 0 \quad 0 \mid$ ، فأن النظام ليس لهُ حل ويسمى نظام غير متسق (او غير متآلف).

☑**ملاحظة : مما سبق يمكن ان نستنتج قبل الاختزال**

د. سهاد علي شهيد

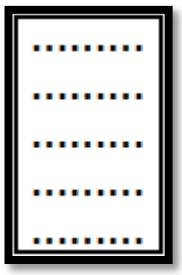
$m = n$

1) اذا كانت مصفوفة المعاملات للنظام مربعة (عدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات)



$m > n$

او مستطيلة(عدد المعادلات اكبر من عدد المتغيرات)



فأن النظام قد يكون متسق بحل وحيد او عدد لا نهائي من الحلول او قد يكون غير متسق (ليس لهُ حل).

2) اما اذا كانت مصفوفة المعاملات للنظام مستطيلة(عدد المعادلات اقل من عدد المتغيرات)

$m < n$

فأن النظام قد يكون متسق بعدد لا نهائي من الحلول او قد يكون غير متسق (ليس لهُ حل) ومستحيل ان يكون لهُ حل وحيد.

2-2-3 حل الانظمة باستخدام معكوس مصفوفة المعاملات : Systems solution using inverse coefficient matrix

هذه الانظمة لا تحل بطريقة المعكوس الا اذا كانت مربعة ويكون لمصفوفة المعاملات معكوس(Inverse) يكون الحل بها حل وحيد ، اما اذا كانت مربعة وليس لمصفوفة المعاملات معكوس فلا يمكن الحل بهذه الطريقة ويكون للنظام اما عدد لا نهائي من الحلول او ليس لهُ حل ولا يمكن معرفة ذلك الا بالعودة الى جاوس او جاوس جوردان.

مثال (67) : اكتب النظام الاتي على الصيغة $AX = B$ ، ثم اوجد A^{-1} حيث A مصفوفة المعاملات و اوجد مجموعة حل النظام باستخدام A^{-1} ان وجد.

$$x - 2y + 2z = -1$$
$$2x - y + 3z = 1$$
$$3x + y + 2z = -1$$

الحل

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-2 - 18 + 4) - (-6 + 3 - 8) = -5$$

$\because |A| \neq 0$ ، عليه للمصفوفة A معكوس

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

نجد A^{-1} بطريقة $[A \quad I] \rightarrow [I \quad A]$ او $\mathbf{A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}}$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -12 & 8 \\ -10 & 8 & -2 \\ -10 & 14 & -6 \end{bmatrix}$$

ويكون حل النظام

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -12 & 8 \\ -10 & 8 & -2 \\ -10 & 14 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مجموعة الحل = $\{-3, 2, 3\}$

مثال (68) : باستخدام طريقة المعكوس بين ان نظام المعادلات ليس لهُ حل وحيد.

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$4x + 5y + 6z = -1$$
$$7x + 8y + 9z = 1$$

الحل: بعد حساب المحدد $|A|$ يكون

د. سهاد علي شهيد

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 0$$

حيث ان $|A| = 0$ اي ان معكوس المصوفة A^{-1} غير موجود وعليه النظام ليس لهُ حل وحيد وانما قد يكون لهُ عدد لا نهائي من الحلول او ليس لهُ حل ، ولمعرفة ذلك نحل بطريقة بجاوس او جاوس جوردان.

3-2-3 قاعدة كرامر : Cramer Base

هي طريقة أخرى لحل نظام المعادلات ، ويشترط ان تكون مصفوفة المعاملات مربعة ويكون لها معكوس أي ان $|A| \neq 0$ والحل بهذه الطريقة يعطي حل وحيد . اما اذا كان $|A| = 0$ فلا يمكن الحل بها ولا بطريقة المعكوس وانما تحل بطريقة جاوس او جاوس – جوردن ويكون للنظام عدد لانهائي من الحلول او ليس له حل .

مثال (69) : استخدم قاعدة كرامر لحل النظام :

$$x - 2y + 2z = -1$$

$$2x - y + 3z = 1$$

$$3x + y + 2z = -1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix} = (-2 - 18 + 4) - (-8 + 3 - 6) = -5$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = (2 + 6 + 2) - (-4 - 3 + 2) = 15$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = (2 - 9 - 4) - (-4 - 3 + 6) = -10$$

د. سهاد علي شهيد

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix} = (1 - 6 - 2) - (4 + 1 + 3) = -15$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{15}{-5} = -3 \, , y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$z = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-15}{-5} = 3$$

<u>مثال (70) :</u> استخدم قاعدة كرامر لحساب x_4 التي تحقق النظام التالي :

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[-2R_1 + R_2 \, , -R_1 + R_3 \, , -3R_1 + R_4]{} = \begin{vmatrix} + & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ - & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ + & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{matrix} = (4 + 195) - (120 + 15) = 64$$

$$\therefore x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{64}{-32} = -2$$

<u>تمرين:</u> اوجد x_1 ، x_2 ، x_3 في المثال السابق

<u>الجواب النهائي $x_1 = 1 \, , x_2 = -1 \, , x_3 = 2$</u>

د. سهاد علي شهيد

مثال (71) : استخدم قاعدة كرامر لإيجاد y في النظام :

$$x - y + z = 1$$

$$-x + 2y + z = 0$$

$$-x + y - 2z = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} = (-4 + 1 - 1) - (-2 + 1 - 2) = -1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & \overset{-}{1} & 1 \\ -1 & \overset{+}{0} & 1 \\ -1 & \overset{-}{0} & -2 \end{vmatrix} = -1(2 + 1) = -3$$

$$\therefore y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3$$

مثال (72) : استخدم قاعدة كرامر لإيجاد x في النظام حيث $(a \in IR)$

$$x - y + 2z = 0$$

$$2x + y - z = -a$$

$$3x - z = 2a$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ + & - & + \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 1(3) = -6$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ -a & 1 & -1 \\ + & - & + \\ 2a & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2a(-1) - 1(a - a) = -2a$$

$$\therefore x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2a}{-6} = \frac{a}{3}$$

د. سهاد علي

مثال (73) : استخدم طريقة كرامر لإيجاد كلا من x, y بدلالة $a\ , b$ في النظام

$$x - ay + z = 1$$

$$ax + y - z = -1$$

$$bz = 2 \qquad b \neq 0 \text{ حيث}$$

ثم اوجد حل النظام اذا كانت $a = 1$ و $b = 1$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ + & - & + \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b\,(1 + a^2)$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ + & - & + \\ 2 & 0 & b \end{vmatrix} = 2(a-1) + b(1-a)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -1 & -1 \\ + & - & + \\ 0 & 2 & b \end{vmatrix} = -2(-1-a) + b(-1-a)$$

$$\therefore x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2a - 2 + b - ab}{b(1+a^2)}$$

$$\therefore y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2 + 2a - b - ab}{b(1+a^2)}$$

عندما $a = 1$ و $b = 1$

$$x = \frac{0}{2} = 0\ , y = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore bz = 2 \ \rightarrow z = 2$$

مجموعة الحل $= \{0,1,2\}$

د. سهاد علي شهيد