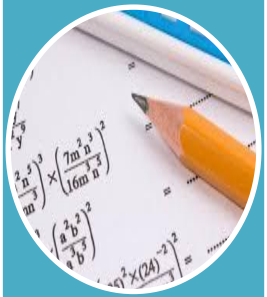
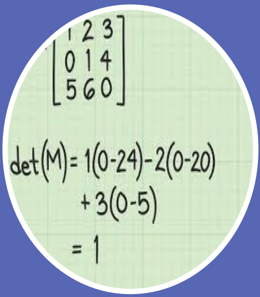
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي/الجامعه المستنصريه

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

الدراسات الاولية/المرحلة الثانية

للعام الدرسي 2020-2021





Matrices

المصفوفات

الاستاذ المساعد الدكتورة

سهاد علي شهيد مجيد

كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء

المرحلة الثانية (صباحي+مسائي)

2021-2020

الفصل الاول .... المصفوفات (The Matrix)

- ❖ 1–1 المقدمة.
- ❖ 1–2 بعض انماط المصفوفات.
- ❖ 1–3 العمليات الحسابية على المصفوفات.
- ❖ 1–4 مبدلة المصفوفة.
- ❖ 1–5 العمليات الصفية الاولية
- ❖ 1–6 بعض تطبيقات المصفوفات.
- ❖ تمارين نهاية الفصل

المحاضرة الثالثة

الفصل الاول

1 3 3 الضرب بالتجزئة

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times p$ ، وان $B = [b_{ij}]$ من الدرجة $p \times n$ ، عند تكوين حاصل الضرب AB ، تقسم المصفوفة A في الواقع الى m مصفوفة من الدرجة $1 \times p$ ، اما المصفوفة B فإنها تقسم الى n مصفوفة من الدرجة $p \times 1$ ، إن هناك تقسيمات اخرى يمكن استعمالها ، فلنجزئ مثلاً كل من A و B الى مصفوفات اخرى ذات درجات محددة على الجدول وذلك برسم مستقيمات كالاتي :

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c} (m_1 \times p_1) & (m_1 \times p_2) & (m_1 \times p_3) \\ \hdashline (m_2 \times p_1) & (m_2 \times p_2) & (m_2 \times p_3) \end{array}\right],$$

$$B = \left[\begin{array}{c:c} (p_1 \times n_1) & (p_1 \times n_2) \\ \hdashline (p_2 \times n_1) & (p_2 \times n_2) \\ \hdashline (p_3 \times n_1) & (p_3 \times n_2) \end{array}\right]$$

أو بالشكل الاتي:

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right], \qquad = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \\ \hdashline B_{31} & B_{32} \end{array}\right]$$

في كل تجزئة يجب ان تجزأ اعمدة المصفوفة A وصفوف المصفوفة B بشكل واحد ، ومن جهة اخرى يمكن ان تكون الاعداد m_1, m_2, n_1, n_2 اي اعداد صحيحة غير سالبة (تحتوي على صفر) ويكون $m_1 + m_2 = m$ ، و $n_1 + n_2 = n$ ويكون عندئذ

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\to C \qquad \dots (2)$$

مثال (8) : احسب AB اذا علمت ان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ، B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :

لحل المثال اعلاه نقوم بتجزئة المصفوفتين وفق الصيغة رقم (2) وبالشكل الذي يتوافق مع حاصل ضرب مصفوفتين، وكالاتي:

A11 A12 B11 B12

$$A=\left[\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 0\\ \hline 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{array}\right] \quad ، \quad B=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ \hline 2 & 3 & 1 & 2\end{array}\right]$$

A21 A22 B21 B22

$$C=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}4 & 3 & 3 & 0\\ 7 & 5 & 5 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

مثال (9): اذا كان $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ اوجد $D=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{bmatrix}$ بحيث يكون $A+B-D=0$ ؟

الحل :

$$A+B-D=\begin{bmatrix}1-3-p & 2-2-q\\ 3+1-r & 4-5-s\\ 5+4-t & 6+3-u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-p & -q\\ 4-r & -1-s\\ 9-t & 9-u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$-2-p=0 \rightarrow p=-2$

$-q=0 \rightarrow q=0$

$4-r=0 \rightarrow r=4$

$-1-s=0 \rightarrow s=-1$

$9-t=0 \rightarrow t=9$

$9-u=0 \rightarrow u=9$

$$D=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 4 & -1\\ 9 & 9\end{bmatrix}=A+B$$

مثال (10) : اوجد حاصل الضرب لكلاً مما يلي:

$$\text{(a) } [4\quad 5\quad 6]\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}=[4*2+5*3+6*(-1)]=[8+15-6]=[17]$$

$$\text{(b) } \begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}[4\quad 5\quad 6]=\begin{bmatrix}2*4 & 2*5 & 2*6\\ 3*4 & 3*5 & 3*6\\ -1*4 & -1*5 & -1*6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\\ -4 & -5 & -6\end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} [1\quad 2\quad 3]\begin{bmatrix}4 & -6 & 9 & 6\\ 0 & -7 & 10 & 7\\ 5 & 8 & -11 & -8\end{bmatrix}=$$

$$[1(4)+2(0)+3(5)\quad 1(-6)+2(-7)+3(8)\quad 1(9)+2(10)+3(-11)\quad 1(6)+2(7)+3(-8)]$$

$$[1\quad 2\quad 3]\begin{bmatrix}4 & -6 & 9 & 6\\ 0 & -7 & 10 & 7\\ 5 & 8 & -11 & -8\end{bmatrix}=[19\quad 4\quad -4\quad -4]$$

$$\text{(d) } \begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(1)+3(2)+4(3)\\ 1(1)+5(2)+6(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\29\end{bmatrix}$$

$$\text{(e) } \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(3)+2(1)+1(-2) & 1(-4)+2(5)+1(2)\\ 4(3)+0(1)+2(-2) & 4(-4)+0(5)+2(2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 8 & -12\end{bmatrix}$$

مثال (11) : اذا كان $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ، فجد A^2 ، A^3 ، A^3؟

الحل :

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}5 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -8 & 0\\ 8 & -1 & 8\\ 8 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

مما تجدر اليه الاشارة يمكن البرهنة على ان $A^3=AA^2$ وكذلك $A^5=A^2A^3=A^3A^2$