الفصل الثالث - الغايـــات *Limits*

<u>تعريف</u>: نقول أن الدالة $f(x)$ لها غاية L في النقطة $x = a$ ، أذا وجد لأي عدد موجب $\varepsilon > 0$ عدد موجب آخر $\delta > 0$ بحيث:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

عندما $0 < |x - a| < \delta$

وذلك لكل x في منطلق الدالة f. وأن $\delta < \varepsilon$

مثـــال: جد غاية الدالة $f(x) = 2x - 3$ عندما $x = 6$ ، ثم برهن ذلك باستخدام التعريف ؟

Sol:

$$L = \lim_{x = 6} f(x) = \lim_{x = 6} 2x - 3$$

$$= 2(6) - 3$$

$$= 12 - 3 = 9$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$|2x - 3 - 9| < \varepsilon$$

$$|2x - 12| < \varepsilon$$

$$|x - 6| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

خـواص الغـايات:

١) إذا كانت $f(x) = c$ وكانت c ثابت فإن:

$$\mathop{Lim}_{x=a} f(x) = c$$

٢) إذا كانت $\mathop{Lim}_{x=a} f(x) = A$ و $\mathop{Lim}_{x=a} g(x) = B$ فإن:

شرط نفس قيمة x

$$\mathop{Lim}_{x=a} (f(x) \mp g(x)) = \mathop{Lim}_{x=a} f(x) \mp \mathop{Lim}_{x=a} g(x)$$

$$= A \mp B$$

٣) إذا كانت $\mathop{Lim}_{x=a} f(x) = A$ و $\mathop{Lim}_{x=a} g(x) = B$ فإن:

$$\mathop{Lim}_{x=a} (f(x) \,.\, g(x)) = \mathop{Lim}_{x=a} f(x) \,.\, \mathop{Lim}_{x=a} g(x)$$

$$= A \,.\, B$$

٤) إذا كانت $\mathop{Lim}_{x=a} f(x) = A$ و كانت c عدد ثابت فإن:

$$\mathop{Lim}_{x=a} c\, f(x) = cA$$

Ex: Find the Limits for the Following Function:

1) $f(x) = 2 \quad , \quad x = -1$

$$\mathop{Lim}_{x=-1} f(x)$$

$$\mathop{Lim}_{x=-1} 2 = 2$$

* الخطوة التي تعوض قيمة x لا تكرر كتابة Lim

2) $f(x) = \frac{1}{x^3} + x^2 \quad , \; x = a$

$$\lim_{x = a} f(x)$$

$$= \lim_{x = a} \left(\frac{1}{x^3} + x^2\right)$$

$$= \lim_{x = a} \frac{1}{x^3} + \lim_{x = a} x^2$$

$$= \frac{1}{a^3} + a^2$$

$$= \frac{1 + a^5}{a^3}$$

---

3) $f(x) = x^2 \left(\frac{1}{x}\right) \quad , \; x = b$

$$\lim_{x = b} f(x)$$

$$= \lim_{x = b} \left(x^2 \left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x = b} x^2 \cdot \lim_{x = b} \frac{1}{x}$$

$$= b^2 \cdot \frac{1}{b} = b$$

---

4) $f(x) = x^3 - 3x + 4$

$$\lim_{x = 2} f(x)$$

$$= \lim_{x = 2} (x^3 - 3x + 4)$$

$$= \lim_{x = 2} x^3 - \lim_{x = 2} 3x + \lim_{x = 2} 4$$

$$= (2)^3 - 3(2) + 4$$

$= 8 - 6 + 4$

$= 6$

٥) إذا كانت $Lim\ f(x) = A$ و $Lim\ g(x) = B$ وبشرط $B \neq 0$ فإن:

$$Lim_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{x=a} f(x)}{lim_{x=a} g(x)} = \frac{A}{B}$$

$B \neq 0$ يعني
المقام ≠ ٠

٦) إذا كانت $Lim\ [f(x)]^n$ وكانت n عدد نسبي فإن:

$$Lim_{x=a}[f(x)]^n = [Lim_{x=a} f(x)]^n$$

Ex: Find the limit for the Following Functions :

1) $f(x) = x^5$, $x = 2$

$$\lim_{x=2} f(x)$$

$$= \lim_{x=2} x^5$$

$$= [\lim_{x=2} x]^5 = [2]^5 = 32$$

2) $f(x) = \frac{2x^2-7x-4}{x-4}$

$$\lim_{x=4} f(x)$$

$$= \lim_{x=4} \left[\frac{2x^2-7x-4}{x-4} \right]$$

$$= \lim_{x=4} \left[\frac{(2x+1)(x-4)}{x-4} \right]$$

$$= \lim_{x=4} [2x+1]$$

$$= 2(4) + 1$$

$$= 9$$

3) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$, $x = 4$

نختبر شرط المقام

$x - 2 = 4 - 2$
$= 2 \neq 0$

بما ان المقام لايساوي صفر اذن نستطيع تطبيق الخاصية الخامسة

$$\lim_{x=4} f(x)$$

$$= \lim_{x=4} \left[\frac{x^2+1}{x-2} \right]$$

$$\frac{\lim_{x=4}(x^2+1)}{\lim_{x=4}(x-2)} = \frac{\lim_{x=4} x^2+\lim_{x=4} 1}{\lim_{x=4} x- \lim_{x=4} 2}$$

$$= \frac{[\lim_{x=4}]^2 +1}{4-2}$$

$$= \frac{[4]^2 +1}{2}$$

$$= \frac{17}{2}$$

Example: Find the limit for the Following Function:

1) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $x = 1$

$$\sqrt{x} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x=1} f(x)$$

∴ لا يمكن تطبيق الخاصية الخامسة لعدم تحقق الشرط

المرافق: هو نفس مقدار المقام فقط عكس الاشارة الوسطية

$$\lim_{x=1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$\lim_{x=1} \left(\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x+\cancel{\sqrt{x}}-\cancel{\sqrt{x}}-1}\right)$$

$$\lim_{x=1} \left(\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}\right)$$

$$\lim_{x=1} \left(\sqrt{x} - 1\right) \Rightarrow = \lim_{x=1} \sqrt{x} + \lim_{x=1} 1$$

$$= \sqrt{1} + 1 = 2$$

H.w: Find the limit for the Following Functions:

1- $f(x) = \frac{3x}{x+1} \quad , \quad x = 2$

2- $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x} \quad , \quad x = 3$

3- $f(x) = x^2 \left(\frac{1}{x-1}\right) \quad , \quad x = 2$

4- $f(u) = \sqrt[2]{u-1} \quad , \quad u = 5$