**ثانيا: الطريقة المبسطة لحل نموذج البرمجة الخطية عندما تكون القيود متباينات أكبر أو**

 **تساوي أو معادلات:**

أذا كان نموذج البرمجة الخطية يتألف من قيود بهيئة متباينات أكبر أو تساوي أو معادلات, ففي هذا النوع من النماذج يتم تحويلها الى الصيغة القياسية كما بينا سابقا بطرح المتغيرات المكملة من القيود التي هي اكبر أو تساوي ( وأضافة المتغيرات الى القيود التي هي أقل أو تساوي ان وجدت ), أما القيود التي هي أصلا معادلات فتبقى على حالها, لنفلرض لدينا نموذج البرمجة الخطية الآتي:

**Min. Z = C1 X1 + C2 X2 + C3 X3 + 0 S1 + 0 S2  + 0 S3**

 **S.T.**

**a11 X1 + a12 X2 + a13 X3 ≤ b1**

**a21 X1 + a22 X2 + a23 X3 ≥ b2**

**a31 X1 + a32 X2 + a32 Xn  = b3**

 **X1 , X2 , X3 ≥ 0**

يتم تحويل هذا النموذج من الصيغة العامة الى الصيغة القياسية باضافة متغير مكمل للطرف الأيسر للقيد الاول وطرح متغير مكمل من الطرف اليسر للقيد الثاني في حين يبقى ال قيد الثالث كما هو وكالآتي:

**Min. Z = C1 X1 + C2 X2 + C3 X3 + 0 S1 + 0 S2**

 **S.T.**

**a11 X1 + a12 X2 + a13 X3 + S1 = b1**

**a21 X1 + a22 X2 + a23 X3 - S2  = b2**

**a31 X1 + a32 X2 + a32 Xn  = b3**

 **X1 , X2 , X3 , S1 , S2 ≥ 0**

للحصول على أول حل أساسي , Z = 0 , **X1 = X2 = X3 = 0** والتي تمثل المتغيراتغير الاساسية, اما المتغيرات الاساسية فهي , **S1 = b1** و  **-S2  = b** أي **((S2  = -b2**

نلاحظ أن قيمة **S2**  سالبة وهذا يخالف قيود اللاسلبية , كما أن القيد الثالث عندما

**X1 = X2 = X3 = 0** فأن ذلك يؤدي الى أن **b3 = 0** بمعنى ان المورد الثالث يساوي صفر وهذا لا يجوز . يتم معالجة هذه المشكلة باتباع احد الاسلوبين الآتيين:

1- اسلوب M الكبيرة : Big M Technique

2- اسلوب المرحلتين : Two Phase Technique

وفيما يلي شرح لهذين الاسلوبين وفق طريقة المبسطة.

1 - اسلوب M الكبيرة : Big M Technique

بموجب هذا الاسلوب تعالج المشكلتين التي تم التطرق اليهما سابقا باضافة متغيرات اصطناعية لكل قيد تم طرح المتغير المكمل منه ( أي القيود بهيئة المتباينات أكبر او تساوي ) طبعا بعد طرح المتغير المكمل, وكذلك تضاف المتغيرات الاصطناعية لكل قيد بهيئة معادلة. يرمز عادة لهذه المتغيرات الاصطناعية بالرمز A أو R وسوف نستخدم الرمز A , وفق هذه المعالجة يصبح النموذج القياسي بالشكل الآتي:

**Min. Z = C1 X1 + C2 X2 + C3 X3 + 0 S1 + 0 S2**

 **S.T.**

**a11 X1 + a12 X2 + a13 X3 + S1 = b1**

**a21 X1 + a22 X2 + a23 X3 - S2 + A1  = b2**

**a31 X1 + a32 X2 + a32 Xn + A2   = b3**

 **X1 , X2 , X3 , S1 , S2 , A1  , A2  ≥ 0**

بعد ذلك يتم أضافة كل متغير أصطناعي لدالة الهدف بعد ضربه بكمية كبيرة جدا يرمز لها بالرمز M , أما في حالة التعضيم يتم طرح كل متغير أصطناعي من دالة الهدف بعد ضربه بكمية كبيرة ليصبح النموذج القياسي بالشكل الآتي:

 **Min. Z = C1 X1 + C2 X2 + C3 X3 + 0 S1 + 0 S2 + MA1 + MA2**

 **S.T.**

**a11 X1 + a12 X2 + a13 X3 + S1 = b1**

**a21 X1 + a22 X2 + a23 X3 - S2 + A1  = b2**

**a31 X1 + a32 X2 + a32 Xn + A2   = b3**

 **X1 , X2 , X3 , S1 , S2 , A1  , A2  ≥ 0**

**ملاحظة//** الغاية من أضافة كل متغير أصطناعي لدالة الهدف بعد ضربه بكمية كبيرة هو لضمان عدم ظهور المتغيرات الاصطناعية في الحل الأساسي الامثل.

بعد ذلك يتم تكوين أول جدول مبسط كما تم توضيحه سابقا ونستمر بنفس خطوات الطريقة المبسطة حتى نصل للحل المثل.

مثال(1):

أوجد الحل ألامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

**Min. Z = 3 X1 + 8 X2 + X3**

 **S.T.**

**6 X1 + 2 X2 +6 X3 ≥ 6**

**6 X1 + 4 X2  = 12**

**2 X1 - 2 X2  ≤ 2**

 **X1 , X2 , X3 ≥ 0**

الصيغة القياسية لهذا النموذج تكون كالآتي:

**Min. Z = 3 X1 + 8 X2 + X3 + 0 S1 + 0 S2 + MA1 + MA2**

 **S.T.**

**6 X1 + 2 X2 +6 X3 - S1 + A1 = 6**

**6 X1 + 4 X2 + A2  = 12**

**2 X1 - 2 X2 + S2  = 2**

 **X1 , X2 , X3 , S1 , S2 , R1  , R2 ≥ 0**

أول حل اساسي ممكن يكون:

Z = o

 المتغيرات غير ألأساسية **X1 = X2 = X3  = S1 = 0**

المتغيرات الأساسية **A1 = 6 , A2 = 12 , S2  = 2**

نكون أول جدول مبسط:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **3** **8** 1 0 M M 0  | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|   **X1 X2 X3 S1 A1 A2 S2**  |
| **6** |  **6 2 6 -1 1 0 0** | **A1**  | **M** |
| **12** |  **6 4 0 0 0 1 0** | **A2**  | **M** |
| **2** |  **2 -2 0 0 0 0 1**  | **S2**  | **0** |
| **Z= 18M** | **12M-3 6M-8 6M-1 -M 0 0 0** | **Zj** - **Cj** |

 حساب قيم صف **Zj** - **Cj**

$Z\_{1} – C\_{1} = \left(\begin{matrix}M&M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}6\\6\\2\end{matrix}\right)- \left(3\right)=12M-3$

 $Z\_{2} – C\_{2} = \left(\begin{matrix}M&M&0\end{matrix}\right)\* \left( \begin{matrix} 2\\ 4\\-2\end{matrix}\right)- \left(8\right)=6M-8 $

 $Z\_{3} – C\_{3} = \left(\begin{matrix}M&M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}6\\0\\0\end{matrix}\right)- \left(1\right)=6M-1$

 $Z\_{4} – C\_{4} = \left(\begin{matrix}M&M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}-1\\ 0\\ 0\end{matrix}\right)- \left(0\right)=-M$

 $Z\_{5} – C\_{5} = \left(\begin{matrix}M&M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right)- \left(M\right)=0$

$Z\_{6} – C\_{6} = \left(\begin{matrix}M&M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right)- \left(M\right)=0$

$Z\_{7} – C\_{7} = \left(\begin{matrix}M&M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right)- \left(M\right)=0$

$Z = \left(\begin{matrix}M&M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}6\\12\\2\end{matrix}\right)=18M$

المتغير الداخل هو X1 اذ انه يقابل أكبر قيمة في صف  **Zj** - **Cj** وهي **12M-3** , ولتحديد المتغير الخارج نحسب النسب :

R1 = 6/6 = 1 , R2 = 12/6 = 2 , R3 = 2/2 = 1

النسبتين R1 و R3 , متساويتين وهما الاقل لذا يمكن اختيار أما A1 أو S2 ليصبح متغيرا خارجا والافضل ان نختار A1 لنتخلص منه من البداية. اذن تم اختيار A1 متغير خارج. الصف الاول يمثل الصف المحوري والعمود الاول يمثل العمود المحوري والعنصر المحوري هو تقاطعهما(6).

نكون الجدول المبسط الثاني :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** | **3** **8** 1 0 M M 0  | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
| **X1 X2 X3 S1 A1 A2 S2**  |
| **1** | **1 2/6 1 -1/6 1/6 0 0** | **X1**  | **3** |
| **6** | **0 ( 2 ) -6 1 -1 1 0** | **A2**  | **M** |
| **0** | **0 -16/6 -2 2/6 -2/6 0 1**  | **S2**  | **0** |
| **Z= 18M** | **0 2M-7 -6M+2 M-1/2 -2M+1/2 0 0**  | **Zj** - **Cj** |

أول صف نحسب قيم عناصره هو صف X1

X1 row = (1/6)( 6 2 6 -1 1 0 0 6 )

 = ( 1 2/6 1 -1/6 1/6 0 0 1 )

بقية الصفوف تحسب كالآتي:

A2 row = (6 4 0 0 0 1 0 12)-6( 1 2/6 1 -1/6 1/6 0 0 1) = ( 0 2 -6 1 -1 1 0 6 )

S2 row = (2 -2 0 0 0 0 1 2)-2( 1 2/6 1 -1/6 1/6 0 0 1)

 = (0 -16/6 -2 2/6 -2/6 0 1 0 )

Zj - Cj row = (12M-3 6M-8 6M-1 -M 0 0 0 18M)

 - (12M-3) ( 1 2/6 1 -1/6 1/6 0 0 1)

 = ( 0 2M-7 -6M+2 M-1/2 -2M+1/2 0 0 6M+3 )

بما أن قيم صف Zj - Cj تحوي قيمتين موجبتين لذا فأن الحل الاساسي الممكن الثاني لايعتبر حل أمثل, ولتكوين حل أساسي جديد نختار المتغير الداخل من بين المتغيرات غير الاساسية وهذا المتغير هو X2 اذ انه يقابل اكبر قيمة موجبة في صف Zj - Cj , ولتحديد المتغير الخارج من بين المتغيرات الاساسية نحسب النسب R ( R1 = 3 , , R2 = 3 والنسبة R3 تهمل للأن مقامها قيمة سالبة) , النسبتين متساوية لذا يمكن اختيار احد المتغيرين X1 أو A2 ليكون متغيرا خارجا و الافضل اختيار A2 هو المتغير الخارج , الصف المحوري هو الصف الثاني والعمود المحوري هو العمود الثاني وتقاطعهما هو العنصر المحوري ( القيمة 2 ) الجدول المبسط الثالث يكون كالآتي:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** | **3** **8** 1 0 M M 0  | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
| **X1 X2 X3 S1 A1 A2 S2**  |
| **0** | **1 0 2 -2/6 0 -1/6 0** | **X1**  | **3** |
| **3** | **0 1 -3 1/2 -1/2 1/2 0** | **X2**  | **8** |
| **8** | **0 0 -10 10/6 -10/6 8/6 1**  | **S2**  | **0** |
| **Z= 24** | 0 0 -19 3 -M-3 -M+7/2 0  | **Zj** - **Cj** |

أول صف نحسب قيم عناصره هو صف X2

X2 row = (1/2) ( 0 2 -6 1 -1 1 0 6 )

 = ( 0 1 -3 1/2 -1/2 1/2 0 3 )

بقية الصفوف تحسب كالآتي:

X1 row = (**1 2/6 1 -1/6 1/6 0 0** 1)

 - (2/6)( 0 1 -3 1/2 -1/2 1/2 0 3 )

 = ( 1 0 2 -2/6 0 -1/6 0 0)

S2 row = (0 -16/6 -2 2/6 -2/6 0 1 0 )

 - (-16/6) ( 0 1 -3 1/2 -1/2 1/2 0 3 )

 = ( 0 0 -10 10/6 -10/6 8/6 1 8 )

Zj - Cj row = ( 0 2M-7 -6M+2 M-1/2 -2M+1/2 0 0 6M+3 )

 - (2M-7) ( 0 1 -3 1/2 -1/2 1/2 0 3 )

 = ( 0 0 -19 3 -M-3 -M+7/2 0 24 )

بعد خروج المتغيرين الاصطناعيين A1 و A2 من الحل الاساسي الممكن الثالث لذا يتم هذف عموديهما من جدول الحل اذ انهما متغيرين تم استخدامها للمساعدة في ايجاد الحل الامثل وليس لهما أي دور أخر. الحل الاساسي الممكن الثالث لا يمثل حلا أمثلا لوجود قيمة موجبة في صف Zj - Cj وهي (3) تحت عمود S1 لذا يعتبر هذا المتغير المتغير الداخل للحل الاساسي الرابع, بحساب النسب R يتم تحديد المتغير الخارج ( R1 تهمل , R3 = 4.8 , R2 = 6 ) لذا فأن المتغير الخارج هو S2 لأن R3 هي الاقل, اذن الصف المحوري هو الصف الثالث والعمود المحوري هو العمود الرابع.جدول الحل الاساسي الرابع يكون كالآتي:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** | **3** **8** 1 0 0  | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
| **X1 X2 X3 S1 S2**  |
|  |  | **X1**  | **3** |
|  |  | **X2**  | **8** |
|  |  | **S2**  | **0** |
| **Z=**  |  | **Zj** - **Cj** |

 اكمال الجدول يترك كتمرين للطالب ( علما ان هذا الحل يمثل الحل الامثل )

مثال(2):

أوجد الحل ألامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

Max. Z = 3 X1 + X2 - X3

 S.T.

 X1 + X2 + X3 = 10

2 X1 - X2  ≥ 2

 X1 - 2 X2 + X3  ≤ 6

 X1 , X2 , X3 ≥ 0

الصيغة القياسية تكون كالتالي مع ملاحظة ان المتغيرات الاصطناعية تضاف لدالة الهدف بعد ضربها بـ ( - M ) في حالة تعظيم دالة الهدف أي عكس حالة التصغير :

Max. Z = 3 X1 + X2 - X3 + 0S1 +0 S2 - MA1 - M A2

 S.T.

 X1 + X2 + X3 + A1 = 10

2 X1 - X2 - S1 + A2  = 2

 X1 - 2 X2 + X3 + S2  = 6

 X1 , X2 , X3 , A1 , A2 , S1 , S2 ≥ 0

أول حل اساسي ممكن هو :

Z = 0

 المتغيرات غير ألأساسية X1 = X2 = X3  = S1 = 0

المتغيرات الأساسية A1 = 10 , A2 = 2 , S2  = 6

نكون اول جدول مبسط :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **3** **1** -1 0 0 -M -M  | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|   **X1 X2 X3 S1 S2 A1 A2**  |
| **10** |  **1 1 1 0 0 1 0** | **A1**  | **0** |
| **2** | **(2 ) -1 0 -1 0 0 1** | **A2**  | **0** |
| **6** |  **1 -2 1 0 1 0 0**  |  **S2**  | **0** |
| **Z=-12M**  | **-3M-3 -1 -M+1 M 0 0 0** | **Zj** - **Cj** |

حساب قيم صف **Zj** - **Cj**

$Z\_{1} – C\_{1} = \left(\begin{matrix}-M&-M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right)- \left(3\right)=-3M-3$

$Z\_{2} – C\_{2} = \left(\begin{matrix}-M&-M&0\end{matrix}\right)\* \left( \begin{matrix} 1\\-1\\-2\end{matrix}\right)- \left(1\right)= -1 $

$Z\_{3} – C\_{3} = \left(-\begin{matrix}M&-M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}\right)- \left(-1\right)=-M+1$

$$Z\_{4} – C\_{4} = \left(\begin{matrix}-M&-M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix} 0\\ -1\\ 0\end{matrix}\right)- \left(0\right)= M$$

$Z\_{5} – C\_{5} = \left(-\begin{matrix}M&-M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right)- \left(0\right)=0$

$Z\_{6} – C\_{6} = \left(\begin{matrix}-M&-M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right)- \left(-M\right)=0$

$Z\_{7} – C\_{7} = \left(\begin{matrix}-M&-M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right)- \left(-M\right)=0$

$Z = \left(\begin{matrix}-M&-M&0\end{matrix}\right)\* \left(\begin{matrix}10\\2\\6\end{matrix}\right)=-12M$

بما أن دالة الهدف تأخذ صيغة التعظيم فأن هذا الحل لا يمثل حل أمثل والمتغير الداخل من بين المتغيرات غير الاساسية هو X1 . تحسب النسب ( R1 = 10 , R2 = 1 R3 = 6 ) و اقل هذه النسب هي R2 لذا يكون المتغير A2 هو المتغير الخارج من الحل الاساسي.الصف المحوري هو الصف الثاني والعمود المحوري هو العمود الاول وتقاطعهما العنصر المحوري (2)

نكون جدول الحل الثاني :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **3 1 -1 0 0 -M -M** | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|  **X1 X2 X3 S1 S2 A1 A2**  |
| **9** | **0 ( 3/2 ) 1 1/2 0 1 -1/2** | **A1**  | **0** |
| **1** | **1 -1/2 0 -1/2 0 0 1/2** | **X1**  | **0** |
| **5** | **0 -3/2 1 1/2 1 0 -1/2**  |  **S2**  | **0** |
| **Z=-9M+3**  | **0 -3/2M-5/2 -M+1 -1/2M-3/2 0 0 3/2M+3/2** | **Zj - Cj** |

نحسب قيم الصفوف :

أول صف نحسب قيم عناصره هو صف X1

X1 row = (1/2)( **2 -1 0 -1 0 0 1 2** )

 = ( 1 -1/2 0 -1/2 0 0 1/2 1 )

بقية الصفوف تحسب كالآتي:

A1 row = (**1 1 1 0 0 1 0** 10)

 -1(1 -1/2 0 -1/2 0 0 1/2 1)

 = ( 0 3/2 1 1/2 0 1 -1/2 9 )

S2 row = (**1 -2 1 0 1 0 0 6**)

 -1(1 -1/2 0 -1/2 0 0 1/2 1)

 = (0 -3/2 1 1/2 1 0 -1/2 5 )

Zj - Cj row = (**-3M-3 -1 -M+1 M 0 0 0** -12M)

 - (-3M-3) (1 -1/2 0 -1/2 0 0 1/2 1)

 = (0 -3/2M-5/2 -M+1 -1/2M-3/2 0 0 3/2M+3/2 -9M+3 )

الحل الاساسي الثاني لايمثل حل امثل لوجود قيم سالبه في صف Zj - Cj و اقــل هـــذه القيم هــي

 ( **(-3/2M-5/2**لذا فالمتغير الداخل هو X2 وبحساب النسب نجد لدينا نسبة واحده فقط وهي (R1=6) اما R2 و R3  تهملان لأن مقامهما قيمة سالبة, لذا فأن المتغير الخارج هو A1 , جدول الحل الاساسي الثالث يكون كالآتي:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **b****R.H.S** |  **3 1 -1 0 0 -M -M** | **Cj** **Basic**  **variable** **( B.V)**  | **CB** |
|  **X1 X2 X3 S1 S2 A1 A2**  |
| **6** | **0 1 2/3 1/ 3 0 2/3 -1/3**  | **A1**  | **0** |
|  |  | **X1**  | **0** |
|  |  |  **S2**  | **0** |
|  |  | **Zj - Cj** |

يترك اكمال الحل كتمرين للطالب (علما ان الحل الاساسي الممكن الثالث لايمثل حلا أمثلا لذا يتم الاستمرار في تكوين حل اساسي ممكن رابع وهو الذي يمثل الحل الامثل).